

エレクトロニクスの基礎

by 谷川

2016 年 11 月 14 日

目次

第 1 章 電磁気の基本量	7
1.1 物理定数	7
1.2 電磁気の基本式	8
1.3 電場と電流密度	9
1.4 オームの法則	10
第 2 章 直流回路 (DC)	11
2.1 抵抗の合成	11
2.2 シミュレーション	12
2.3 回路網のキルヒホッフの法則	14
2.4 テレゲンの定理	16
2.4.1 ベクトル解析による導出	18
2.5 線形回路の法則	19
2.5.1 線形 2 端子回路の等価回路	19
2.5.2 線形回路網の相反定理	22
2.5.3 電力の収支	24
2.6 2 端子対回路網 (4 端子回路網)	24
2.6.1 Z 行列と Y 行列	25
2.6.2 Δ 型回路と Y 型回路の等価性	25
第 3 章 過渡現象 (トランジェント)	29
3.1 コンデンサーとインダクターの性質	29
3.1.1 電流と電圧の関係	29
3.1.2 エネルギーの吸収と放出	30
3.2 RC 回路の応答	30
3.2.1 積分回路と微分回路	31
3.2.2 一般の入力に対する応答	32
3.2.3 インパルス応答	33

第4章	ラプラス変換による演算子法	35
4.1	ラプラス変換の概要	35
4.2	ラプラス変換表	35
4.3	実数値関数のラプラス変換	38
4.4	初期値問題	38
4.5	伝達関数	39
4.6	初期値の分離	40
第5章	交流解析 (AC)	43
5.1	周波数応答	43
5.2	複素インピーダンス	44
5.3	交流の電力	45
5.4	周波数応答と演算子法	46
5.5	RL 回路	47
5.6	RCL 回路	47
第6章	伝送線路とインピーダンスマッチング	49
6.1	伝送線路の原理	49
6.2	インピーダンスマッチング	52
6.3	インピーダンス変換の例	53
6.4	インピーダンスチャート	54
第7章	半導体デバイスの基礎	57
7.1	半導体材料	57
7.2	n 型半導体と p 型半導体	58
7.3	pn 接合	59
7.4	バイポーラ・トランジスタ	62
7.5	MOSFET	63
7.6	回路記号	64
第8章	電子回路	67
8.1	pn 接合の性質	67
8.2	トランジスタ増幅回路	69
8.2.1	動作点	69
8.2.2	入出力の結合	69
8.2.3	ベース接地	70
8.2.4	エミッタ接地	71

8.2.5	コレクタ接地	72
8.3	発振回路	73
8.4	論理回路	75
8.4.1	基本論理回路	76
8.4.2	順序回路	80
8.5	OP アンプ	82
8.6	電源回路	86
付 録 A 抵抗, キャパシタンスの表示		93
付 録 B よく使う数学公式		95
B.1	三角関数と指数関数	95
B.2	合成関数の微積分	95
B.3	積の微積分	95
B.4	2×2 行列	96
B.5	コンボリューションとデルタ関数	96
B.6	ラプラス変換	97
B.6.1	定義	97
B.6.2	フーリエ変換との関係 – 逆変換	98
B.6.3	簡単な例	99
B.6.4	ラプラス変換の性質	99

第1章 電磁気の基本量

1.1 物理定数

エレクトロニクスの計算に使うかもしれない物理定数を並べておく．利用しやすいように，単位を選んである¹．たとえば， c の値から，光の周波数と波長は反比例し周波数 0.3 GHz の波長は 1 m である．また， hc の値から，波長とエネルギーも反比例し，波長 1.2 μm の光子・エネルギーは 1 eV である．

$$\text{光速} \quad c = 0.299\,792\,458 \text{ GHz}\cdot\text{m}$$

$$\text{電気素量} \quad e \cong 1.60 \times 10^{-19} \text{ C} = 0.16 \text{ aA}\cdot\text{s}$$

$$\text{プランク定数} \quad h \cong 4.1 \text{ feV/Hz}$$

$$\text{プランク定数} \times \text{光速} \quad hc \cong 1.24 \mu\text{m}\cdot\text{eV}$$

$$\text{ボルツマン定数} \quad k_B \cong 86 \mu\text{eV/K}$$

$$\text{ボルツマン定数/プランク定数} \quad k_B/h \cong 20.8 \text{ GHz/K}$$

$$\text{磁気定数(真空透磁率)} \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \cong 1.3 \mu\text{H/m}$$

$$\text{電気定数(真空誘電率)} \quad \epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} = \frac{10^7}{4\pi c^2} \cong 8.9 \text{ pF/m}$$

$$\text{球の電気容量/半径} \quad 4\pi\epsilon_0 \cong 111 \text{ pF/m}$$

エネルギーの単位である eV(エレクトロンボルト) は

$$1 \text{ eV} = e \times 1 \text{ V} \cong 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

¹ 物理定数を含んだ式の値を単位を含めて計算することができるプログラムの中で，Google 検索が便利である．たとえば，「光速」を検索すると「299 792 458 m / s」と出てくる．「パーセク/光年」だと「3.26163344」と出るから，1 パーセクは約 3.26 光年である．「プランク定数*光速」を検索するとこの積の値がわかるが，これは光の波長とエネルギーの積でもあるので，エレクトロンボルトを使ってあらわしたいと思う．そこで，「プランク定数*光速/eV」を検索する．答えは「1.23984193 ミクロン」となり，プランク定数×光速の値は，約 1.24 $\mu\text{m}\cdot\text{eV}$ であることがわかる．また，「1/ボルツマン定数*電子ボルト」だと，「11 604.5193 ケルビン」になるから，ボルツマン定数の逆数は 12 000 K/eV ぐらいである．このように，特定の単位を使いたい場合は，その単位で割ったりかけたりしたものを求めればよい．なお，「1/ボルツマン定数 in kelvin/eV」のような質問もできる．

である。また、単位の接頭辞は次のとおり。

$$\begin{aligned} \text{T} &= 10^{12}(\text{テラ}), & \text{G} &= 10^9(\text{ギガ}), & \text{M} &= 10^6(\text{メガ}), & \mu &= 10^{-6}(\text{マイクロ}), \\ \text{n} &= 10^{-9}(\text{ナノ}), & \text{p} &= 10^{-12}(\text{ピコ}), & \text{f} &= 10^{-15}(\text{フェムト}), & \text{a} &= 10^{-18}(\text{アト}) \end{aligned}$$

1.2 電磁気の基本式

q_1, q_2 を電荷, I_1, i_2 を電流, q_{m1}, q_{m2} を磁荷, r を距離, ℓ を長さとする。

$$\text{光速度} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\text{クーロン力} \quad F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \left(k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \right)$$

$$\text{平行電流間の力} \quad F = k_p \frac{I_1 I_2 \ell}{r} \quad \left(k_p = \frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} = 2 \times 10^{-7} \text{ H/m} \right)$$

$$\text{磁荷間のクーロン力} \quad F = k_m \frac{q_{m1} q_{m2}}{r^2} \quad \left(k_m = \frac{1}{4\pi\mu_0} \right)$$

電気定数 ϵ_0 は上の式と光速度 c と磁気定数 μ_0 の定義値によって定義される。

アンペアの定義

かつて、「1cm 離れた平行な導線の両方に 1 emu の電流が流れているとき、導線の長さ 1 cm の部分に働く力は 2 dyn である」として電流の単位が決められたが、MKSA 単位系では、電流の単位 A (アンペア) は 1/10 emu になるように定められた。

両方の導線の電流が 1/10 倍なら、力は $(1/10)^2 = 10^{-2}$ 倍になる。導線の間隔を 1 cm から 1 m にすると力は 1/100 倍になるが、さらに長さを 1 cm から 1 m にすると力は 100 倍になって元に戻る。dyn = 2×10^{-5} N であるから、

1 m 離れた平行な導線の両方に 1 A の電流が流れているとき、導線の長さ 1 m の部分に働く力は 2×10^{-7} N である。

〔例〕 直径 1mm の銅線 (比重 8.5) 2 本に電流を流し、重力に逆らってくっつけておきたい。 $\ell = 1$ m の導線の質量は $100 \text{ cm} \times \pi \times (0.05 \text{ cm})^2 \times 8.5 \cong 6.68 \text{ g}$, 重力は $F = (6.68/1000) \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \cong 0.0655 \text{ N}$. 間隔は $r = 1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m}$. $I_1 = I_2 = I$ とすると, $I = \sqrt{(Fr/\ell)/(2 \times 10^{-7} \text{ N/A}^2)} \cong 18.1 \text{ A}$. よって, 2 本とも同じ電流を流すなら, 約 18A でよい..

誘導される単位

クーロン $1\text{ A} \times 1\text{ s} = 1\text{ C}$.

1 A(アンペア)の電流は, 1 s(秒)の間に 1 C(クーロン)の電荷を運ぶ.

ボルト $1\text{ V} \times 1\text{ A} = 1\text{ W}$ (ワット), $1\text{ V} \times 1\text{ C} = 1\text{ J}$ (ジュール).

導電体でできた線に 1 A の電流が流れているときに 1 W の仕事率で電気エネルギーを消費しているとき, 線の両端間の電圧は 1 V である.

ファラド $1\text{ C} = 1\text{ F}$ (ファラド) $\times 1\text{ V}$.

コンデンサーの電気量は電圧に比例する. 比例係数を「キャパシタンス」という.

〔例〕 半径 a の導体球の電気容量は $C = 4\pi\epsilon_0 a$. 半径 1m だと, $C \cong 111\text{ pF}$ (p は 10^{-12}). これを $11.1\text{ }\mu\text{C}$ の電荷で充電すると, 電圧は約 100 kV.

ヘンリーとテスラ 電流 I から距離 r 離れたところに平行に置いた電流 I' の長さ a の部分には, 大きさ $F = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} I' a$ の力が働くので, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ とすると, $F = BI'a$ となる. $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ は電流 I によって作られる磁場の「磁束密度」である.

磁束密度の単位は T(テスラ). 磁束密度に面積をかけると「磁束」になる. 磁束の単位は Wb(ウェーバー). 電流に対する磁束の比はインダクタンスといい, 単位は H(ヘンリー).

これらの単位の関係は, $\text{Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2 = \text{H} \cdot \text{A}$, $\text{N}(\text{ニュートン}) = \text{T} \cdot \text{A} \cdot \text{m}$.

また, $\text{J}(\text{ジュール}) = \text{N} \cdot \text{m} = \text{Wb} \cdot \text{A} = \text{H} \cdot \text{A}^2$

1.3 電場と電流密度

導体内のある点 A を考える. A から x 方向へ Δx ずれた点の元の点に対する電圧を $\Delta_x V$ とする. すると, ここでの「電場の x 成分」は $E_x = \Delta_x V / \Delta x$ である. 電場の y 成分や z 成分も同様にして決まる. x 成分, y 成分, z 成分をまとめると「電場ベクトル」になる. 電場の単位は V/m .

x 軸に垂直な面を通して, 単位面積あたり, 単位時間あたり J_x の電荷が流れているとき, 電流密度 $\mathbf{J}$ の x 成分は J_x である. y 成分と z 成分も同様. 電流密度の単位は A/m^2 .

消費される電力は単位体積あたり $E_x J_x + E_y J_y + E_z J_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$. この単位は W/m^3 .

1.4 オームの法則

金属は、温度が変わらなければ、電圧と電流が比例する。このようなものは「抵抗体」と呼ぶことが多い。電圧の電流に対する比例係数は**抵抗**である。すなわち、 $\text{抵抗} = \text{電圧} / \text{電流}$ 。抵抗の単位は Ω (オーム) である。**コンダクタンス** は抵抗の逆数であり、単位は S (ジーメンズ)。

$$\Omega = V/A, \quad S = A/V$$

電力 = 電圧 $\times$ 電流 と、電圧 = 抵抗 $\times$ 電流 から、電力 = 抵抗 $\times$ 電流² = コンダクタンス $\times$ 電圧² となる。よって、

$$\Omega = W \cdot A^{-2}, \quad S = W \cdot V^{-2}$$

抵抗体の中に電場 E があると $J = \sigma E$ の密度の電流が流れる。 σ は**電気伝導率**、 $\rho = 1/\sigma$ は**抵抗率**という。電気伝導率の単位は S/m 、抵抗率 ρ の単位は $\Omega \cdot m$ 。これらは抵抗体の物性値で、形状には関係ない。

断面積 S 、長さ L の電線の抵抗は $R = \rho L/S$ 、コンダクタンスは $1/R = \sigma S/L$ 。

〔例〕鉄、アルミ、銅でできた直径 1mm の針金の長さ 1km あたりの抵抗値と質量を計算すると表のようになる。抵抗率と密度は温度 20°C のときの概略値。

種類	抵抗率 ($10^{-8} \Omega \cdot m$)	密度 (10^3 kg/m^3)	抵抗値 (Ω)	質量 (kg)
鋼鉄	10~20	7.9	130~260	6.2
アルミニウム	2.7	2.7	34	2.1
銅	1.7	9.0	22	7.1

アルミの抵抗を銅と同じにするには断面積を 34/22 倍にする必要があるが、そのようにしても、質量は $2.2 \text{ kg} \times (34/22) \cong 3.2 \text{ kg}$ にしかならず、まだ銅の半分以下である。値段も安く錆びにくいので、アルミケーブルは自動車の配線、高圧送電線に使われる。しかし、アルミは空気中では表面に強靱な酸化膜ができるので、はんだ付けが難しく、電子回路の配線にはあまり使われない。

練習: 1.2 節の〔例〕で計算しているように、直径 1mm の 2 本の銅線を重力に逆らってくっつけておくには約 18 A の電流を流せばよい。同じ太さのアルミ線で同じことをする場合、電流を何倍にすればよいか。そのとき、同じ長さで比べて、消費電力は何倍になるか。

第2章 直流回路(DC)

2.1 抵抗の合成

直列抵抗 抵抗値が和になる (流れにくくなる).

$$R = R_1 + R_2$$

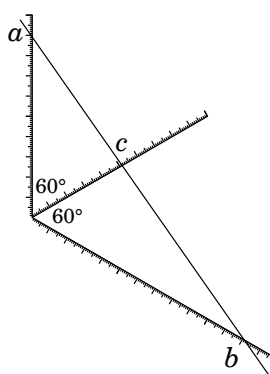
並列抵抗 コンダクタンス (抵抗値の逆数) が和になる (流れやすくなる).

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ノモグラム $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ を解くのに使えるノモグラムがある.

下図のように, 一つの三角形が2つの三角形に分割されていて, 共通の頂点の角度は60度, 30度, 30度になっている. この頂点を通る3つの辺のうち, 外側の2つの辺の長さを a, b とし, 内側の辺の長さを c とすると,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$



三角形の2辺の長さとならぶ頂点の角度の正弦で三角形の面積をあらわす公式がある. また, 分割してできた図形の面積を足すと, 元の図形の面積が得られる. それらを使えば, 上の式はすぐに証明できる.

図には、長さの読み取りができるよう目盛りが付けてある。 a, b, c のうち 2 つがわかれば、該当する 2 点を直線で結んで交点を読み取れば、残りの一つがわかる。

練習: 並列抵抗のノモグラムを使って次のことを示せ (式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ を使ってはいけない)。

1. b を無限大にすると c は a に近づく。
2. $a = b$ なら $c = a/2$ となる。

2.2 シミュレーション

電子回路の設計では多くの数値計算が必要になるので、コンピュータシミュレーションは欠かせない。現実をよく反映する計算がシミュレーションでできれば、試作の手間が省ける。回路の働きを勉強するにもシミュレーションが適している。ただし、詳細なデータが無いと詳細なシミュレーションはできないし、コンピュータの計算力による限界もある。

電子回路のシミュレーターには回路データと計算条件を入力する必要があり、プログラミング言語のようにこれをテキストでおこなうシミュレーターもあるし、図を描くことでも入力できるシミュレーターもある。Qucs は回路図入力ができるシミュレーターである。

電子回路シミュレータ Qucs の機能 Qucs のメニューを日本語にするには、次のように操作してから一旦終了する。

File⇒Application Settings...

Language: Japanese

Qucs にはだいたい次のような機能がある。

- ・ **編集画面** 回路図入力, シミュレーション設定, 式入力
- ・ **部品リスト** 集中定数部品, ソース源, シミュレーション部品, etc.
- ・ **図表の種類** 直交座標, 極座標, 数表, etc.
- ・ **シミュレーションの種類** 直流, 交流, トランジェント, デジタル, パラメータスイープ, etc.

部品リストは左側の枠に表示されるが、種類ごとに分類されているので、部品を探すには、まず部品の種類を選ぶ必要がある。回路部品だけではなく、グラフや表、シミュレーション条件の設定も部品リストの中から探しだして使う。

次のようなツールはよく使われる。



選択ボタンを押すか ESC キーを押すと、選択モードになる。



虫眼鏡ツールで拡大・縮小をおこなう。



編集ツールでは、「切り取り」と「コピー」は部品を選択してからおこなう。「貼付け」では連続貼り付けモードになる。「削除」は選択されている部品を削除するもしくは連続削除モードになる。「やり直し」は一つ前の状態に戻し「元に戻す」は「やり直し」を取り消すのだが、この訳語は逆にしたほうがよい。



無効／有効切り替えと回転も、選択済み部品に作用するか、もしくは連続モードに切り替える。



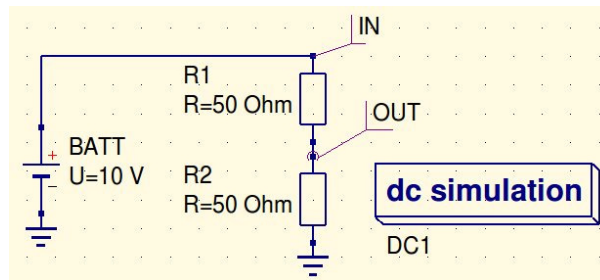
「ワイア」ツールで接続線(ワイア)を引く。斜めのワイアは引けない。右クリックで折れ曲がる向きの変更ができる。電圧を見る必要があるワイアには「ワイアラベル」で名前を付けておく必要がある。ワイアの名前にはアルファベットの大文字、小文字、数字およびアンダースコアが使える。「グラウンド」は電圧の基準点になる。これが無いとエラーになる。



「シミュレート」ボタンで計算をおこなう。自動的にデータ表示画面になる。後の2つは、データ表示と回路図の切り替えボタン、およびグラフの座標値を表示するボタンである。

練習: 以下の説明にしたがって簡単な直流回路のシミュレーションをおこなえ。

1. ソース源部品にある DC 電圧源を配置し、名前を V1 から BATT に変え、 $U=10\text{ V}$ にする。
2. ツールバーからグラウンドツールを選び(または Ctrl-G を押し)グラウンドを DC 電圧源のマイナス側につなぐ(丸を一致させるとつながる)。つながったことの確認のため、選択ツールで(または Esc キーを押して)グラウンドをドラッグしてみる。Ctrl キーを押しながらマウスのホイールを回すとズームができる。失敗しても、編集用ツールでやり直しや削除をおこなうことができる。
3. 集中定数部品の中の抵抗を縦向きにして電源の右側に置く。部品をドラッグしている間に右クリックで向きを変えることができる。その下にもう一つ抵抗を置き、その下側端子にグラウンドを付ける。
4. 下図のようにワイヤでつなぐ。ワイヤを配置しているあいだに右クリックでワイヤの曲がり方を切り替えることができる。また、左クリックでワイヤが通る点を固定することもできる。部品の端子やワイヤの端を示す赤丸が消えない場合は、ワイヤがつながっていないので、ワイヤを一旦消してつなぎ直す。ワイヤの断片が残ってしまうことがあるので注意。
5. 下図のようにワイアラベルを2つ配置し、名前を IN, OUT にする。

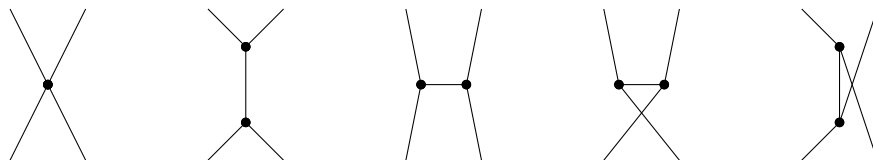


6. シミュレーション部品から DC シミュレーションを選んで適当な場所に配置する。
7. ファイル ⇒ 保存で、Desktop に test という名前で保存。test.sch がデスクトップにあることを確認。
8. シミュレーションツールをクリックする。計算がおこなわれ、空白画面に変わる。図表部品の「表」を配置すると、表示内容を選択するダイアログがあらわれる。BATT.I, IN.V, OUT.V を順にダブルクリック。OK。
9. タブで回路図 (test.sch) に切り替え、電源の電流と IN, OUT の電圧を自分で計算する。電源の電圧を 2 つの抵抗の和で割ると電流が求められる。BATT.I は BATT の電流のことだが、電源に流れる電流の正の向きは+から-の向きと定義されているため、マイナス符号になる。IN.V は IN ワイヤの電圧である。ワイヤの電圧は常にグラウンドを基準にして測られる。OUT.V は OUT ワイヤの電圧だが、下側の抵抗の両端間の電圧に等しいので、電流とこの抵抗との積で求められる。タブで結果表示にもどして、数値を確認。
10. 回路図で下側の抵抗値を 1 オーム増やして再シミュレーションし、結果を記録。また 1 オーム増やして再シミュレーションし、結果を記録。また 1 オーム 増やして再シミュレーションし、結果を記録。記録した数値を見て納得できるかどうかを考える。

2.3 回路網のキルヒホッフの法則

ノード 回路の理論では、「素子」には複数の端子があって、ひとつひとつの素子の全端子電流と全端子電圧の関係は一意的に決まると考える。各素子の端子間は導線でつながれる。この導線は抵抗がゼロであるとみなす。また、電流によって生じる磁場の急激な変動は導線に誘導起電力が生じるが、そのような変動も無いものとする。すると、連続した導線でつながれているすべての点の電位は等しい。このような部分をひとかたまりにして「ノード」と呼ぶ。

導線の接続のしかたによるノードの形状の違いは意味を持たない。たとえば、次のつながり方はすべて同等であり、ひとつのノードをあらわしている。



KCL(電流保存, 第一法則) 回路の任意の部分について, そこへ流入するすべての電流の和はゼロである. たとえば, 抵抗の一方の端子から電流 I が流入しているとき, 他方の端子からは電流 I が流出している. また, 3つの分岐があるノードに電流 I_1 と電流 I_2 が流入しているとき, もう一つの分岐からは $I_1 + I_2$ の電流が流出している.

KVL(保存場の法則, 第二法則) 任意の閉じた経路に沿って測った各素子の電圧の和はゼロである. 一つの閉じた経路を1方向に辿り, 通過しているすべての素子について, 経路の出口に対する経路の入り口の電圧を足し合わせる. すると, ぐるっとまわって元に戻った場合に, 電圧の和はゼロになる.

これは, 素子の端子間の電圧がノードの電位の差に等しいということに過ぎない.

電流と電圧の向き キルヒホッフの法則を適用する前に, 回路の各部の電流の正の向きを仮定しておかなければならない. 計算した結果が負であったら, 向きの仮定が間違っていたのではなく単に逆向きであったというだけのことである.

回路とは独立に, 素子自体の特性を説明するために, 電流や電圧の向きの基準を定める必要もある. 2端子素子の場合, 入り口と出口を適当に決め, 入り口から入って出口から出て行く向きを電流の正の向きと定義する¹. 2端子素子では素子の「電圧」を出口に対する入り口の電圧であると決める. すると, 電流と電圧の積は素子による消費電力になる².

直流電源の場合, プラス側を入り口, マイナス側を出口と決める. すると, 起電力の向きと電圧の向きが一致するが, 入り口から入って出口から出て行く向きを電流の正の向きと定義するので, 抵抗をつないだときに電源に流れる電流は負になる. その結果, 「消費電力」は負になるが, これは電源が正の電力を生産していることを意味する.

3つ以上の端子がある素子では, 素子に流れる電流というものは定義できないが, 各端子の電流には意味がある. 素子に入る向きを端子の電流の正の向きとすることが多い. 電圧に関しては, 端子に名前を付け, どの端子のどの端子に対する電圧であるかがわかるようにする. たとえば, バイポーラトランジスタは C, B, E の3つの端子があるが, V_{BE} は E に対する B の電圧, V_{CB} は B に対する C の電圧であるというように決める.

¹ この電流は電線を通る電流と同様に磁場を作るので測定が可能である.

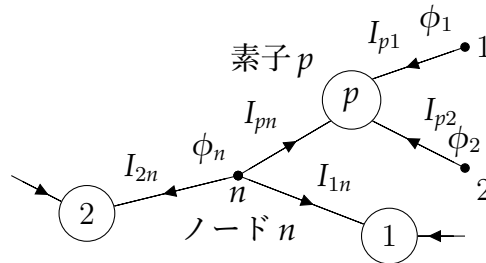
² 2端子素子の「入り口から入って出口へ向かう電流」を図であらわすには, 入り口端子から出口端子へ向かうまっすぐな矢印を素子の絵の上かその近くに描き, 必要に応じて, 電流の値ないし式をその近くを書く. 「出口に対する入り口の電圧」を示すには, 出口から入り口へ向かう円弧状矢印を使うことが多い. その場合, 必要に応じて, 電圧の値ないし式をその近くを書く.

電圧源と電流源 2端子の素子で、流れる電流にかかわらず端子間の電圧が一定に保たれるようなものを、「電圧源」という。これは電池や発電機の理想化である。「定電圧源」ともいう。一方、2端子の素子で、端子間の電圧にかかわらず流れる電流が一定に保たれるようなものを、「電流源」、あるいは「定電流源」という³。

2.4 テレゲンの定理

回路の「素子」ということばは抵抗器やトランジスタのような基本的な機能を持つ物体を意味することが多い。これらは導線で他のところに電氣的につながるといふ点で、集積回路のようなより複雑な回路部品と同じである。ここでは、「素子」とは一般に回路の任意の部分であって他の部分といくつかのノードでつながっているものであると考える。素子が他の部分とつながっているノードをその素子の「端子」と呼ぶ。

回路の全ノードに一意的な番号を付け、全素子にも一意的な番号を付ける。ノード n の電位を ϕ_n とする。また、素子とノードがつながっていてもつながってなくてもお構いなしに、全素子と全ノードの組み合わせを考え、素子 p へノード n から流れ込んでいる電流を I_{pn} と書く。ただし、素子 p とノード n がつながっていないなら $I_{pn} = 0$ である。



KCL から、任意の素子 p に全ノードから流れ込む電流の和や、任意のノード n から全素子に流れていく電流の和はゼロである。すなわち、

$$\sum_{n \in \text{ノード}} I_{pn} = 0, \quad \sum_{p \in \text{素子}} I_{pn} = 0 \quad (2.4.1)$$

任意の素子 p を固定し、それにノード n から流れ込む電流とそのノードの電位の積 $\phi_n I_{pn}$ を全ノードに渡って足しあわせた和

$$\sum_{n \in \text{ノード}} \phi_n I_{pn}$$

³ 完全に一定であるとしていたい場合に「定」を付け、一定に近いかそういう傾向があるだけということにしたい場合は「定」を付けないということもある。

を考える⁴。これは、電流だけの和とは違って、ゼロになるとは限らない。この和をすべての素子 p に渡って加え合わせてみよう。総和をおこなう順序は交換できることと、分配法則より、

$$\sum_{p \in \text{素子}} \sum_{n \in \text{ノード}} \phi_n I_{pn} = \sum_{n \in \text{ノード}} \sum_{p \in \text{素子}} \phi_n I_{pn} = \sum_{n \in \text{ノード}} \left(\phi_n \sum_{p \in \text{素子}} I_{pn} \right)$$

(2.4.1) のように、 $\sum_p I_{pn}$ はゼロであったのだから、

$$\sum_{p \in \text{素子}} \sum_{n \in \text{ノード}} \phi_n I_{pn} = 0$$

素子 p とノード n がつながっていないと $\phi_n I_{pn}$ はゼロだから、 n に関する和は実際には素子 p の全端子 (つなぎ目) に対する和である。

$$\sum_{p \in \text{素子}} \sum_{n \in p \text{ の端子}} \phi_n I_{pn} = 0 \quad (2.4.2)$$

同じ数の素子とノードを含んだ2つの回路 A, B があるとしよう⁵。これらは実際には同じ回路であってもよいし、1つの回路の異なる時刻や異なる条件における状態であってもよい。回路 A の素子に回路 B の素子を対応させて同一の番号を付け、A のノードに B のノードを対応させて同一の番号を付ける。

A の方のノードの電位を ϕ_n^A と書き、B の方のノードから素子への電流を I_{pn}^B と書き、積 $\phi_n^A I_{pn}^B$ の n 及び p による和を考えると、この電流にも KCL が適用されるため、前と同様の計算によって、

$$\sum_{p \in \text{素子}} \sum_{n \in p \text{ の端子}} \phi_n^A I_{pn}^B = 0 \quad (2.4.3)$$

という定理が得られる。明らかに、A と B を入れ替えた式も成り立つ。

上の導き方には KCL を使っているが、KVL もノードの電位の一意性という形で入っていることに注意してほしい。すなわち、この定理はキルヒホッフの法則の帰結である。

素子 p が2端子素子であるとし、その2つの端子を a, b とすると、KCL より、 $I_{pa}^B = -I_{pb}^B$ である。 $I_p^B = I_{pa}^B$, $V_p^A = \phi_a^A - \phi_b^A$ と置くと、

$$\sum_{n \in p \text{ の端子}} \phi_n^A I_{pn}^B = \phi_a^A I_{pa}^B + \phi_b^A I_{pb}^B = (\phi_a^A - \phi_b^A) I_p^B = V_p^A I_p^B$$

⁴ この式の次元は電力であることに注意。

⁵ 数が同じであれば中身は何でもよい。数が違っていても、電流が流れない素子やどこにもつながっていないノードを補って数を合わせることも可能である。

I_p^B は端子 a から入って端子 b へ出て行く電流であり、 V_p^A は端子 b に対する端子 a の電圧、すなわち「電圧降下」である。このように、2 端子素子の端子についての和は、単に電流と電圧降下の積になる。

特に、すべての素子が 2 端子素子である場合は、(2.4.3) は次のように簡略化される。

$$\sum_{p \in \text{素子}} V_p^A I_p^B = 0 \quad (2.4.4)$$

これを **Tellegen の定理** という。式 (2.4.3) は一般化された Tellegen の定理というべきものである。

2.4.1 ベクトル解析による導出

位置の関数である電位 $\phi(x, y, z)$ と電流密度 $J(x, y, z)$ の積の発散を計算すると、

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\phi J) &= \frac{\partial(\phi J_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi J_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\phi J_z)}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} J_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} J_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} J_z \right) + \phi \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \right) \\ &= (\operatorname{grad} \phi) \cdot J + \phi (\operatorname{div} J) \end{aligned}$$

直流回路では電流密度の発散はゼロ。 $-\operatorname{grad} \phi$ は電場ベクトル E である。また、ガウスの定理

$$\iiint_V \operatorname{div} A \, dv = \iint_{\partial V} A \cdot dS$$

が成り立つ。 ∂V は任意の 3 次元領域 V の閉じた表面。 よって、

$$\iiint_V E \cdot J \, dv = - \iint_{\partial V} \phi J \cdot dS$$

回路のある領域 V_p を考えると、その表面からは複数の導線が出ていて電流が出入りしている。導線は電気抵抗が 0 であって 1 つの導線のどの部分の電位も等しい。導線 n から流れ込んでいる電流を I_{pn} 、導線 n の電位を ϕ_n 、導線 n の断面積を S_n とすると、上式から、

$$\iiint_{V_p} E \cdot J \, dv = - \sum_n \iint_{S_n} \phi_n J \cdot dS = - \sum_n \phi_n \iint_{S_n} J \cdot dS = \sum_n \phi_n I_{pn}$$

注目する部分が導線が電氣的につながった一つのノードである場合は、 ϕ_n は全部等しく、KCL から I_{pn} の和はゼロなので、上の式はゼロになる。独立した回路全体を考える場合は、外部に出ている導線は無いので、この場合も上式はゼロである。独立した回路全体の体積積分は素子やノードの体積積分の総和でもあるが、ノードに関する部分は0であったから除かれる。よって、すべての素子 p に関する和はゼロであることがわかった。

$$\sum_p \sum_n \phi_n I_{pn} = 0$$

ϕ_n と I_{pn} は、形が同じであれば異なる回路の電位と電流でもよい。それぞれの回路で $\text{div } \mathbf{J} = 0$ という式と $-\text{grad } \phi = \mathbf{E}$ という式が成り立つからである。

2.5 線形回路の法則

抵抗と電源からなる回路は「線形」と言われる。それは次のような意味である。

重ね合わせの理 線形回路の任意の場所の電流と電圧は、すべての電圧源の電圧 (既知の電圧) とすべての電流源の電流 (既知の電流) に係数を掛けたものの和であらわされる。たとえば、電圧 E_1, E_2 の電圧源と電流 G_3 の電流源があるとき、ある場所を流れる電流は

$$I = aE_1 + bE_2 + cG_3$$

のように、 E_1 と E_2 と G_3 の1次式であらわされる。係数 a は、 $E_2 = 0, G_3 = 0$ の場合の I/E_1 の値になっている。言い換えれば、 E_2 を取って短絡し、 G_3 を取って開放し、 E_1 だけを残した場合の I がわかると、 I/E_1 によって係数 a が求められる。同様に、 E_1 を取って短絡し、 E_2 も取って短絡したときの I/G_3 が係数 c になる。

2.5.1 線形2端子回路の等価回路

なんらかの線形回路から2つの端子が外部に出ているものとし、その2端子間に電圧を変えることができる電圧源をつないだと考え。端子1の端子2に対する電圧を V とし、端子1から出て端子2へ戻る電流を I とする。この関係は回路内部の構造で決まり、つなぐものにはよらない。特別な場合として、端子間に何もつながない場合を「開放」といい、端子を導線で直接つなぐ場合を「短絡」という。開放では $I = 0$ 、短絡では $V = 0$ である。開放の場合の電圧を「開放電圧」、短絡の場合の電流を「短絡電流」という。

線形性から、 I と V の関係は 1 次式、つまり直線の式であらわせる。開放電圧を V_0 、短絡電流を I_0 とすれば、直線は $(V, I) = (V_0, 0)$ という点と $(V, I) = (0, I_0)$ という点を通るのだから、直線の方程式は、

$$\frac{V}{V_0} + \frac{I}{I_0} = 1 \quad (2.5.1)$$

この式は、 $R_0 = V_0/I_0$ と置けば、

$$V = V_0 - R_0 I \quad \left(R_0 = \frac{V_0}{I_0} \right) \quad (2.5.2)$$

と書くことができる。この V と I の関係は、定電圧源 V_0 と抵抗 R_0 が直列につながったものと同じである。これをヘルムホルツ-テブナンの定理という。この直列抵抗 R_0 は「等価抵抗」と呼ばれる。

線形 2 端子回路は、等価抵抗と開放電圧によって、直列抵抗付きの電圧源に置き替えることができる。

式 (2.5.1) は次のように書くこともできる。

$$I = I_0 - \frac{V}{R_0} \quad (2.5.3)$$

この関係は、定電流源 I_0 に並列抵抗 R_0 がつながったものと同じである。これをノートンの定理という。

線形 2 端子回路は、等価抵抗と短絡電流によって、並列抵抗付きの電流源に置き替えることもできる。

電流 I は、端子間電圧 V に依存するだけではなく、回路中の電圧源や電流源にも線形に依存しているから、電圧源や電流源を $V_1, V_2, \dots, I_3$ などと書くと、

$$I = aV_1 + bV_2 + \dots + cI_3 + gV$$

のような形の式であらわされるはずである。係数 a, b などは定数である。この式と (2.5.3) 式を比較すると、 $I_0 = aV_1 + bV_2 + \dots + cI_3$ 、 $-\frac{1}{R_0} = g$ であることがわかる。よって、

$$I = I_0 - \frac{1}{R_0} V, \quad I_0 = aV_1 + bV_2 + \dots + cI_3$$

ここで、内部の電圧源や電流源をすべてゼロにしてみる。すると、 I_0 は 0 になるから、

$$-I = \frac{V}{R_0}$$

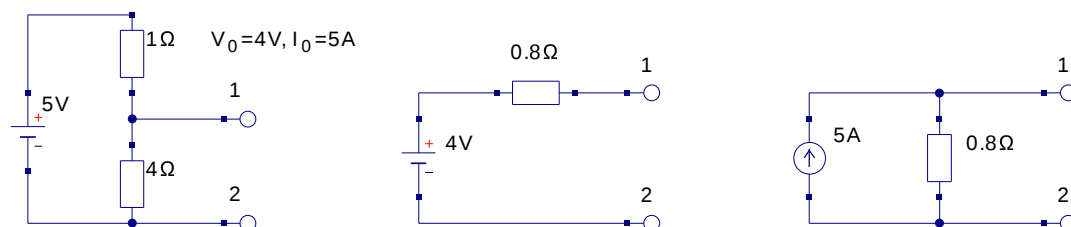
$-I$ は端子 1 から回路に流れ込む電流であるから、この回路は抵抗値 R_0 の抵抗と同じになった。この場合、回路は抵抗ばかりの回路になっているのだから、

等価抵抗は回路中にある電圧源と電流源をすべてゼロにした場合の合成抵抗である。

電圧源をゼロにするには、それをはずして導線で短絡した状態にすればよいし、電流源をゼロにするには、それをはずして開放すればよい。このようにしてから端子間の抵抗を測るか、合成抵抗を計算すれば、等価抵抗が得られるのである。

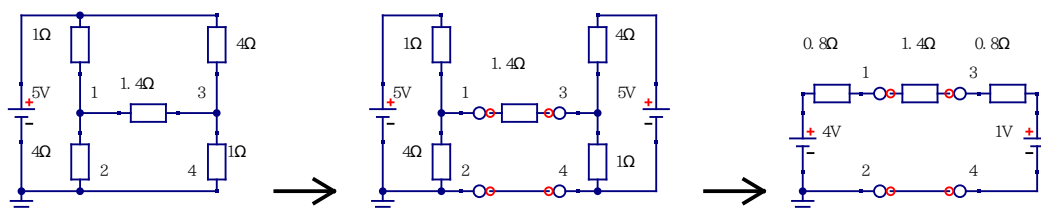
(2.5.2) 式から $V_0 = R_0 I_0$ である。すなわち、開放電圧、短絡電流、等価抵抗のうち、2つがわかれば他の1つもわかる。求めにくいものは後から計算すればよいのである。

〔例1〕下図の3つの回路は、いずれも、端子1, 2間を開放したときの電圧は4Vであり、端子1, 2間を短絡したときの電流は5Aである。よって、3つの回路は端子1, 2から見て等価である。



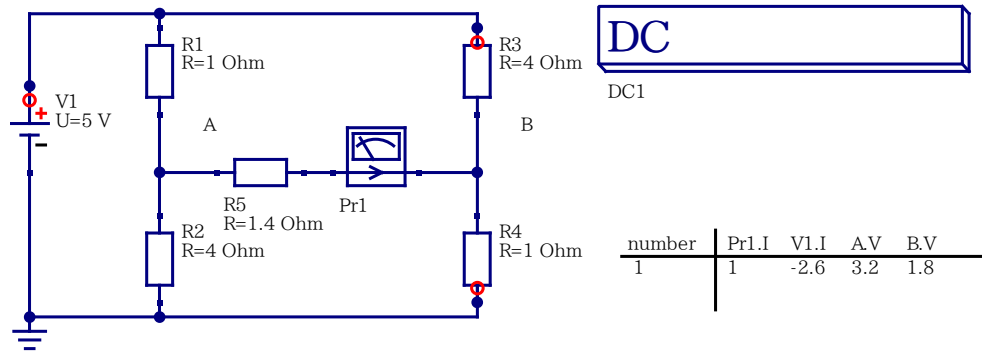
念の為、等価抵抗についても独立に計算しておこう。まず、左端の回路の電圧源をはずしてそこを導線でつなぐと、端子1, 2間は1Ωと4Ωの並列な抵抗でつながるので、端子間の抵抗値は $1/(1/(1\Omega) + 1/(4\Omega)) = 0.8\Omega$ になる。中央の回路の電圧源をはずしてそこを導線でつなぐと、端子1, 2間の抵抗は明らかに0.8Ωである。また、右端の回路の電流源をはずして開放すると、端子1, 2間の抵抗は明らかに0.8Ωである。よって、等価抵抗もすべて等しいことが確かめられた。

〔例2〕下図の左端の回路の中央の抵抗に流れる電流を求めたい。それには、この回路を図のように変形して右端の等価回路に変換するとよい。1.4Ωの抵抗を一旦はずし、端子1と端子2の間の開放電圧と等価抵抗を求めて、左側の部分を直列抵抗付きの電圧源に変換し、端子3と端子4の間の開放電圧と等価抵抗を求めて、右側の部分を直列抵抗付きの電圧源に変換し、1.4Ωの抵抗を元に戻したものである。



$$(4\text{ V} - 1\text{ V}) / (0.8 + 1.4 + 0.8)\Omega = 1\text{ A}$$

シミュレーションで確かめてみよう．電流プローブを入れて電流を表示する．

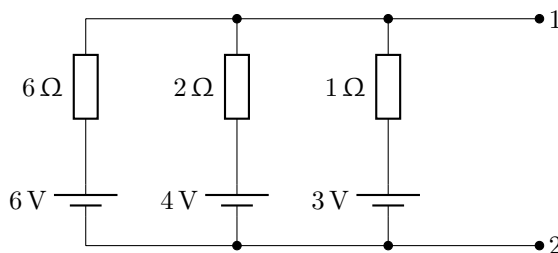


練習: 上の等価回路によって端子 1 のアースに対する電位と端子 3 のアースに対する電位を求め、それを使って、元の回路の各抵抗に流れる電流を計算せよ。

練習: 上のシミュレーションの回路において、電流計 Pr1 をはずしてできる 2 端子に注目する。この 2 端子から見た回路の開放電圧を求めよ。さらに、5V の電圧源を 0V にして等価抵抗を求めよ。これらから短絡電流もわかる。このようにして、もとの回路の電流計の電流を求めよ。

練習: 上のシミュレーションの回路の Pr1 を 1A の電流源に置き換える。そうしても他には影響が無い。そのようにしてから、5V の電圧源を 0V にした場合の各部の電流と、1A の電流源を 0A にした場合の電流を求め、それらの結果を加えあわせて、元の回路の各部の電流を求めよ。

練習: 3つの定電圧源と3つの抵抗からなる下図の回路の端子 1, 2 間の短絡電流と等価抵抗を求め、それらから開放電圧を求めよ (等価抵抗は電圧源をすべてはずして短絡して求める)。検算するため、求められた開放電圧と同じ電圧の電源を端子 1, 2 間につないだ時に各抵抗に流れる電流の和からこの電源に流れる電流を求め、それが 0 であることを確かめよ。



2.5.2 線形回路網の相反定理

$N-2$ 個の抵抗 $3, 4, \dots, N$ からなる回路に電源 1 および電源 2 を接続し、それらの電圧を V_1, V_2 とする。次の 2 つの場合を考えよう。ケース A では $V_1 = 0, V_2 = V$

とし、ケース B では $V_1 = V, V_2 = 0$ とする.

Tellegen の定理 (2.4.4) より,

$$\begin{aligned} V_1^A I_1^B + V_2^A I_2^B + \sum_{p=3}^N V_p^A I_p^B &= 0 \\ V_1^B I_1^A + V_2^B I_2^A + \sum_{p=3}^N V_p^B I_p^A &= 0 \end{aligned}$$

であるが、 $V_1^A = 0, V_2^A = V, V_1^B = V, V_2^B = 0$, であるから,

$$V I_2^B + \sum_{p=3}^N V_p^A I_p^B = V I_1^A + \sum_{p=3}^N V_p^B I_p^A = 0 \quad (2.5.4)$$

抵抗 p の値を R_p とすると、オームの法則から、 $V_p^A = R_p I_p^A$ と $V_p^B = R_p I_p^B$ が成り立つので,

$$V_p^A I_p^B = R_p I_p^A I_p^B = R_p I_p^B I_p^A = V_p^B I_p^A \quad (3 \leq p \leq N)$$

これと (2.5.4) から,

$$I_1^A = I_2^B$$

電源をつなぐ場所は「ポート」であり、各ポートには2つの端子がある. 上記のケース A はポート 1 に電圧源をつなぎポート 2 に電流計をつないで電流を測ることに相当し、ケース B はポート 2 に電圧源をつなぎポート 1 に電流計をつないで電流を測ることに相当する. これらの電圧が同じならば電流も同じになるということがわかったのである.

抵抗ばかりの回路は線形なので、一般には定数 G_{ij} を使った関係式

$$I_1 = G_{11} V_1 + G_{12} V_2, \quad I_2 = G_{21} V_1 + G_{22} V_2$$

が成り立つ. これを今の2つのケースに適用すれば、 $I_1^A = G_{12} V$ と $I_2^B = G_{21} V$ が出てくる. したがって,

$$G_{12} = G_{21} \quad (2.5.5)$$

これを**線形回路網の相反定理**という. 電源がもっと多い場合でも、同様の関係 $G_{ij} = G_{ji}$ が成り立つ. よって、電圧から電流を求める係数行列は対称行列である. すると、線形代数学により、電流から電圧を求める係数行列も対称行列になる.

ポート 2 の電圧と電流をポート 1 の電圧と電流であらわす式も線形であるから、

$$V_2 = a_{11} V_1 + a_{12} I_1, \quad I_2 = a_{21} V_1 + a_{22} I_1$$

とすると, (2.5.5) から, 次の関係が出てくる.

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -1 \quad (2.5.6)$$

すなわち, 2 行 2 列の行列式の値は -1 になる.

2.5.3 電力の収支

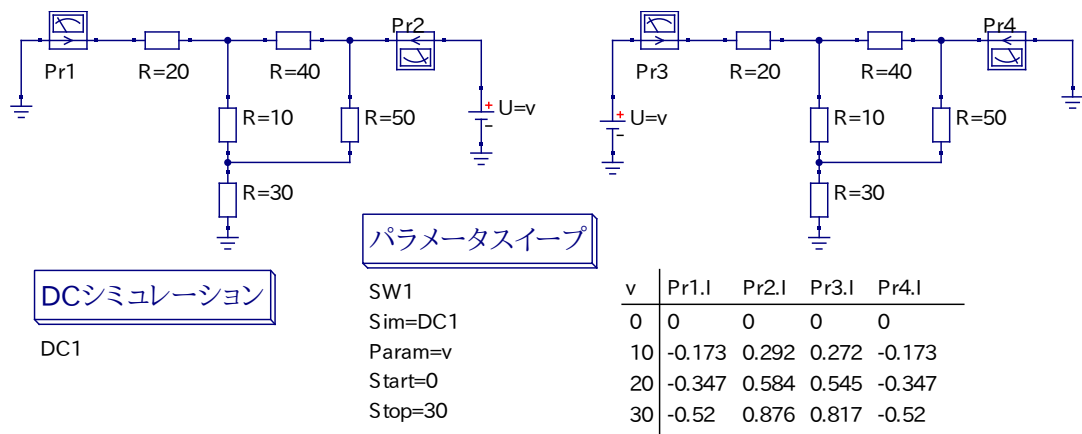
一つの孤立した回路に Tellegen の定理を適用すると, $V_p I_p$ は素子の消費電力であり, それを P_p と書くと,

$$\sum_p P_p = 0$$

P_p が正の素子は電力を消費し, P_p が負の素子は電力を供給し, 全体でバランスが取れている.

Tellegen の定理は, 1 つの回路での電力のバランスをあわらす式を別々の回路の電圧と電流の積のバランスの式に拡張するものと言することができる.

〔例〕相反定理をシミュレーションで試してみる. DC シミュレーションにパラメータスイープを組み合わせる. Pr1 と Pr4 はいつも等しいことに注目.



2.6 2 端子対回路網 (4 端子回路網)

2 端子対回路網は 2 つの「ポート」で外部とつながる回路である. ポート 1 からは端子 1, 1' が出ていて, ポート 2 からは端子 2, 2' が出ている. ポート 1 とポー

ト 2 にそれぞれ 2 端子の素子をつなぎ、端子 1 から流れ込み端子 1' から流れ出す電流を I_1 、端子 1' に対する端子 1 の電圧を V_1 、端子 2 から流れ込み端子 2' から流れ出す電流を I_2 、端子 2' に対する端子 2 の電圧を V_2 とする。

2.6.1 Z 行列と Y 行列

I_1, I_2 を V_1, V_2 に結びつける 1 次変換の係数行列を Z 行列といい、その逆行列を Y 行列という。定数項は無い、すなわち内部に起電力は無いとする。

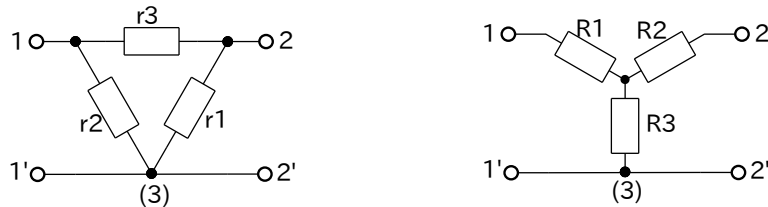
$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$I_2 = 0$ だと $V_1 = Z_{11}I_1$, $V_2 = Z_{21}I_1$ だから、ポート 2 を開放してポート 1 に電流源をつなげば Z_{11} と Z_{21} が求められる。これを逆にやれば、 Z_{12} と Z_{22} が求められる。Y 行列の成分は、短絡と電圧源接続で求められる。

相反定理が成り立つ場合は、 $Z_{12} = Z_{21}$, $Y_{12} = Y_{21}$ である。

Z 行列の成分の次元は電圧と電流の比であり、Y 行列の成分の次元は電流と電圧の比である。Z 行列は「インピーダンス行列」ともいい、Y 行列は「アドミッタンス行列」ともいう。

2.6.2 Δ 型回路と Y 型回路の等価性



左を Δ 型回路または Π(パイ) 型回路といい、右を Y 型回路または T 型回路またはスター型回路という。Δ 型回路の Y 行列は簡単に求められるし、Y 型回路では Z 行列が簡単に求められ、 $g_1 = 1/r_1$, $g_2 = 1/r_2$, $g_3 = 1/r_3$ と置けば、

$$Y(\Delta) = \begin{pmatrix} g_2 + g_3 & -g_3 \\ -g_3 & g_1 + g_3 \end{pmatrix}, \quad Z(Y) = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix}$$

となる⁶。逆に、対称行列 $Y(\Delta)$ の独立な 3 成分が与えられれば、上式左側より、 g_1, g_2, g_3 の値がわかり、それらから抵抗の値もわかるので、この Y 行列を持つ Δ

⁶ g_3 の前にマイナス符号が付くのは、端子 1 でも端子 2 でも、流れこむ向きを電流の正の向きと決めているため。

型回路を構成することができる⁷。同様に、対称行列 $Z(Y)$ からは、Y 型回路を構成することができる。

Δ 型回路の Z 行列と Y 型回路の Z 行列を等しくすれば両者は等価回路になる。Y 行列の逆行列が Z 行列であるから、 $Y(\Pi)^{-1} = Z(T)$ 。Y 行列を等しくしても同じなので、 $Y(\Pi) = Z(T)^{-1}$ 。よって、

$$\frac{1}{g_1 g_2 + g_2 g_3 + g_3 g_1} \begin{pmatrix} g_1 + g_3 & g_3 \\ g_3 & g_2 + g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} g_2 + g_3 & -g_3 \\ -g_3 & g_1 + g_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \begin{pmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_1 + R_3 \end{pmatrix}$$

これらの関係から、

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{g_1} = \frac{R_2}{g_2} = \frac{R_3}{g_3} &= R_1 r_1 = R_2 r_2 = R_3 r_3 \\ &= \frac{1}{g_1 g_2 + g_2 g_3 + g_3 g_1} = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1 \end{aligned}$$

よって、変換の公式は次のようになる。

$$R_1 = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}, \quad R_2 = \frac{r_3 r_1}{r_1 + r_2 + r_3}, \quad R_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3}$$

$$r_1 = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}, \quad r_2 = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}, \quad r_3 = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

特別な場合として、対称な場合 ($r_1 = r_2 = r_3, R_1 = R_2 = R_3$) は、 $R_1 = r_1/3$ などとなる。

回路の Δ 型になった部分を Y 型に変換したりその逆をおこない、直列抵抗と並列抵抗の公式も利用して、回路を簡略化することができる。

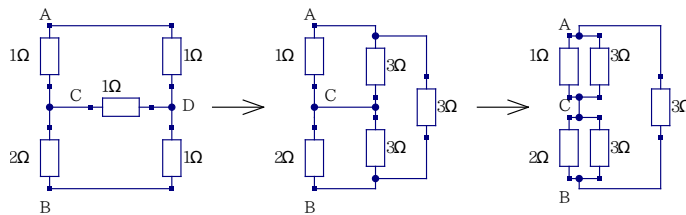
練習: 1Ω の抵抗 3 本による Y 型回路と、それに等価な Δ 型回路の図を描け。さらに、それらの 1 つの端子を開放したときの他の 2 端子間の合成抵抗が等しいことを確かめよ。

練習: 3 本の 1Ω の抵抗でできた Y 型回路を考える。ポート 2 を短絡しポート 1 に電圧源を接続して Y 行列の 2 成分を求め、ポート 1 を短絡しポート 2 に電圧源を接続して Y 行列の他の成分を求

⁷ただし、正の抵抗値の抵抗しか使えないとすると、Y 行列の非対角成分は負であり、対角成分は非対角成分の絶対値より大きい必要がある。

めよ。また、ポート 2 を開放しポート 1 に電流源を接続して Z 行列の 2 成分を求め、ポート 1 を開放しポート 2 に電流源を接続して Z 行列の他の成分を求めよ。最後にこれらの行列の積を計算せよ。

練習: 下図は、左端の回路の A 点と B 点の間の抵抗を計算するために、対象な Y 型部分を Δ 型に変換し、さらに合成抵抗を計算しようとしているところである。AB 間の抵抗値を求めよ。



練習: 上図左端の回路の A 点と B 点の間の抵抗を計算せよ。ただし、対象な Δ 型部分を Y 型に変換してから合成抵抗を計算すること。

第3章 過渡現象(トランジェント)

3.1 コンデンサーとインダクターの性質

3.1.1 電流と電圧の関係

電気容量 C のコンデンサーの電圧 V と電荷 Q と電流 I は, $Q = CV$, $I = dQ/dt$ を満たすから,

$$I = C \frac{d}{dt} V$$

正弦波交流の場合は $V = V_0 \cos(\omega t + \alpha)$ と表せ, $I_0 = C\omega V_0$ と置くと, 上式から,

$$I = I_0 \cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) \quad \left(I_0 = C\omega V_0 \right)$$

電流と電圧の振幅の比は $C\omega$ であるから, 電気容量と周波数が大きいほど電流は流れやすい. 周波数がゼロなら電流はゼロになるから, コンデンサーは直流を通さない. 交流の位相に関しては, 電圧は電流より 90 度遅れている.

インダクタンス L のインダクターの電流 I と磁束 Φ と電圧 V は, $\Phi = LI$, $V = d\Phi/dt$ を満たすから,

$$V = L \frac{d}{dt} I$$

正弦波交流では, $I = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$, $V_0 = L\omega I_0$ として,

$$V = V_0 \cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) \quad \left(V_0 = L\omega I_0 \right)$$

よって, 電圧と電流の振幅の比は $L\omega$. インダクターは直流に対しては抵抗がゼロである. 位相に関しては, 電圧は電流より 90 度進んでいる.

電圧と電流の振幅の比 V_0/I_0 を「インピーダンスの大きさ」という. 「インピーダンス」については後述する.

〔例〕 $1 \mu\text{F}$ のコンデンサーの周波数 60 Hz におけるインピーダンスの大きさは,
 $V_0/I_0 = 1/(C\omega) = 1/(1 \mu\text{F} \times 2\pi \times 60 \text{ Hz}) \cong 2.7 \text{ k}\Omega$

練習: コンデンサー C とインダクター L のインピーダンスの大きさが等しくなる周波数は $1/(2\pi\sqrt{LC})$ であることを示せ.

3.1.2 エネルギーの吸収と放出

素子の電流 I と電圧 V によって、素子に流入している電力は $P = IV$ と表される。これはエネルギーの吸収の速さである。 P が負であるときはエネルギーの放出が起こっている。

コンデンサーでは、

$$P = IV = C\left(\frac{dV}{dt}\right)V = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}CV^2\right)$$

となるから、エネルギーの吸収と放出によって $\frac{1}{2}CV^2$ が増減する。 $\frac{1}{2}CV^2$ はコンデンサーに蓄えられているエネルギーである。 インダクターでは、 $P = IV = IL\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right)$ となる。 $\frac{1}{2}LI^2$ はインダクターに蓄えられているエネルギーである。

インダクター L に電流 I が流れているときにインダクターに蓄えられているエネルギーがすべてコンデンサー C に移行してコンデンサーの電圧が V になったとすると、 $|V| = \sqrt{L/C}|I|$ である。 $\sqrt{L/C}$ は抵抗の次元を持っている。 インダクターに一定の電圧 V_0 を時間 T だけかけて電流を流すと $I = V_0T/L$ となり、そのエネルギーをコンデンサーに移すと $|V| = \frac{T}{\sqrt{LC}}|V_0|$ となる。 蓄積時間 T を LC 固有時間 $\sqrt{LC}$ より長くすれば電圧を高くする変換ができる。 インダクターのエネルギーをコンデンサーに移すには、単に両者を電線で接続すればよい。

練習: 1 H のインダクターに 1 秒の間 1 V の電圧をかけてから 1 μ F のコンデンサーにつなぐと、電圧は最大でいくらに達するか。 そのときコンデンサーのエネルギーはいくらになるか。

3.2 RC 回路の応答

電圧源 V に RC の直列回路がつながっていて電流 I が流れているとき、 R の電圧を V_R , C の電圧を V_C とすると、

$$V = V_R + V_C, \quad V_R = RI, \quad I = C\frac{dV_C}{dt}$$

よって、

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC}V_C = \frac{1}{RC}V$$

R の次元は 電圧/電流, C の次元は 電荷/電圧, 電荷は 電流・時間 なので, RC は 時間である. これを「時定数」という. 上の微分方程式は

$$\frac{d}{dt} (e^{t/RC} V_C) = \frac{1}{RC} V e^{t/RC}$$

と変形できる.

練習: $e^{-t/RC} \frac{d}{dt} (e^{t/RC} V_C) = \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} V_C$ を示せ.

3.2.1 積分回路と微分回路

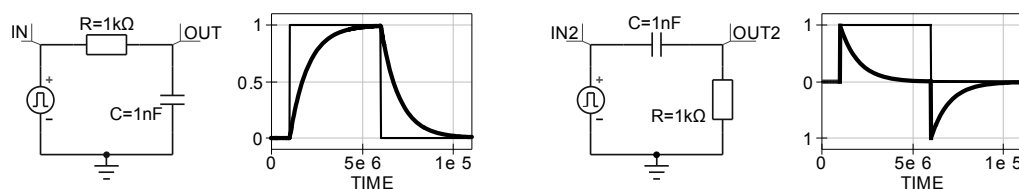
V が時刻 $t = 0$ で 0 から V_0 に立ち上がるステップ電圧であり, $t = 0$ 以前で $V_C = 0$ であったとする. $t \geq 0$ で V は一定値 V_0 である. 上の式を $[0, t]$ で積分して V_C を求め, $V_R = V - V_C$ を使うと次のようになる.

$$V_C = (1 - e^{-t/CR}) V_0, \quad V_R = e^{-t/CR} V_0$$

V_C は RC 程度の時間で立ち上がって V_0 に達する. V_R はいきなり V_0 まで立ち上がってから RC 程度の時間でゼロになる. ステップ信号をインプットしたときアウトプットが V_C のように変化する回路を「積分回路」といい, ステップ信号をインプットしたときアウトプットが V_R のように変化する回路を「微分回路」という.

下図は積分回路(左)と微分回路(右)の例である. ここでは, 入力電圧が立ち上がったあと, コンデンサの電圧が一定値になってから, 入力電圧をゼロに戻している. 入力電圧が減少した時に出力電圧が負になるのは微分回路の特徴をあらわしている.

この例のように, 入力と出力の片側は共通グランドとするのが, 実際においてもシミュレーションにおいても都合がよい.



練習: 上の微分回路のシミュレーションをやってみよ. 信号源には「電圧パルス」を使い, そのパラメータ $U1, U2, T1, T2$ をそれぞれ, 0 V, 1 V, 1 μ s, 6 μ s とし, トランジェント解析のパラメータはスタートを 0, ストップを 20 μ s, ステップ数を 1000 にする. コンデンサか抵抗の値を変えて時定数を大きくしていくと, 出力波形はどのように変化するか?

3.2.2 一般の入力に対する応答

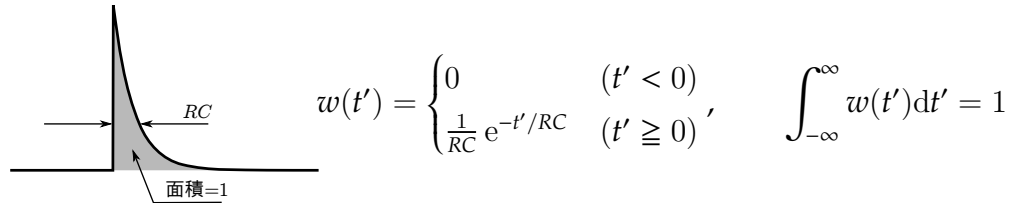
十分以前から回路が動作していると考えると，過去の初期条件は関係がないから，先程の微分方程式は次のように $[-\infty, t]$ の積分で解ける．

$$e^{t/RC} V_C(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t V(t') e^{t'/RC} dt'$$

これを整理すると， V_C と V_R が次のように求められる．

$$V_C(t) = \int_0^\infty \frac{1}{RC} e^{-t'/RC} V(t-t') dt', \quad V_R(t) = RC \frac{d}{dt} V_C(t)$$

$t' < 0$ で 0, $t' \geq 0$ で $\frac{1}{RC} e^{-t'/RC}$ と表される関数 $w(t')$ を考える．これは， $t' = 0$ で立ち上がって RC 程度の時間幅で消滅し，面積は 1 である．



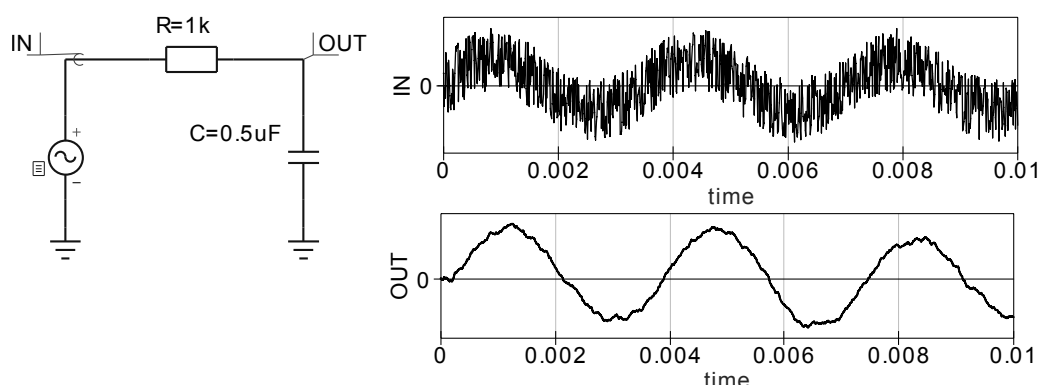
$V_C(t)$ を $w(t')$ を使って書くと，

$$V_C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t') V(t-t') dt'$$

この積分は関数 $w(t)$ と $V(t)$ の合成積 (コンボリューション) といい， $W(t) * V(t)$ と表す．

$$V_C(t) = w(t) * V(t)$$

$V_C(t)$ は V の過去 ($t-RC$ あたりから t まで) の値の重み付き平均になっている．このような平均を移動平均という．ほぼ RC の時間幅に渡って平均を取るので， RC より短い時間で速い変動が $V(t)$ に起こっていても，そのような成分は「積分出力」 $V_C(t)$ にはあまり現れない．速い変化をならして取り除くフィルターであるともいえる．比較的低い周波数帯の信号が比較的高い周波数帯のノイズと共存している場合，下図のように，積分回路をノイズ除去に用いることができる．



$V_R(t) = V(t) - V_C(t)$ であるから, $V_R(t)$ は $V(t)$ から比較的低い周波数帯の成分を取り除いた残りになる. よって, 微分回路は, 低い周波数帯のノイズを除去して高い周波数帯の信号を取り出すのに使うことができる. 直流の周波数はゼロだから, 微分回路は入力信号から直流成分を完全に取り除くことができる.

練習: $\int_{-\infty}^{\infty} w(t-t')V(t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} w(t')V(t-t')dt'$ を示せ.

3.2.3 インパルス応答

時刻 $t=0$ を含む非常に短い時間以外ではゼロであるような関数は時刻 0 でのインパルスである. 時刻 0, 強さ 1 のインパルスは単位インパルスであり, $\delta(t)$ と表す. 単位インパルスの面積は $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ である.

$w(t)$ と $\delta(t)$ のコンボリユーションは $w(t) * \delta(t) = w(t)$ となる. すなわち, $w(t)$ は $V(t) = \delta(t)$ に対する応答である. よって, $w(t)$ を「インパルス応答」と呼ぶ. インパルス応答がわかれば, コンボリユーション (積分) によって任意の応答を計算することができる. たとえば, インパルス応答を単に積分すれば, ステップ応答が得られる.

練習: 次の 2 つの関数 $w(t)$ と $V(t)$ のコンボリユーション $w(t) * V(t)$ を計算せよ. ただし, $a > 0$

$$w(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ a e^{-at} & (t \geq 0) \end{cases}, \quad V(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ b & (t \geq 0) \end{cases}$$

$w(t')$ と $V(t-t')$ がともにゼロでない条件は $0 < t' < t$ であるから, コンボリユーションが 0 にならないためには $0 < t$ でなければならない, その場合, 積分区間は $[0, t]$ である.

$a = 1/RC$, $b = V_0$ とすれば, この結果は積分回路のステップ電圧に対する応答になるだろう.

第4章 ラプラス変換による演算子法

微分操作や積分操作を数値と同じように扱って、微分方程式の解を代数計算で求める方法がある。このような方法を「演算子法」という。本来解析的に解ける線形問題の解は、演算子法によって素早く求められる。

4.1 ラプラス変換の概要

演算子法によく使われるのがラプラス変換の性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = s \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

である¹。この式を見ると、左辺の微分演算が右辺では変数 s によるかけ算に化けている。これが微積分を代数計算に置き替えるからくりである。ラプラス変換の基礎を理解するには、付録の B.6 を参照するとよい。

ラプラス変換は線形積分変換で、実数の関数を複素数の関数に変換する。元の関数を表関数または原関数といい、変換後の関数を裏関数または像関数という。表で微積分を計算するかわりに、裏で代数計算をおこなって、その結果を表に逆変換することができる。

ただし、変換が一对一の関係になるようにするため、ある値より小さい t に対して $f(t) = 0$ になるような関数だけに表関数を制限する。通常、この左端の位置を $t = 0$ とする。これは、時刻 $t = 0$ から後の現象だけを考慮に入れ、それ以前の経過を無視することを意味する。初期条件を与えて微分方程式を解くことが普通なので、これでよい。

4.2 ラプラス変換表

$t < 0$ でゼロになるようにするため、 $t < 0$ で $Y(t) = 0$ 、 $t \geq 0$ で $Y(t) = 1$ と定義された単位ステップ関数 $Y(t)$ を任意の関数 $f(t)$ に掛けて、 $f(t)Y(t)$ に対して上記

¹これは部分積分による。ただし、 t の関数 $f(t)e^{-st}$ が $t \rightarrow \pm\infty$ で 0 に収束するという条件が必要。

の $\pm\infty$ のラプラス変換をおこなう。これは積分範囲を 0 から ∞ としてそのまま変換するのと同じである。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)Y(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$Y(t)$ をかけたために $t=0$ で不連続が生じる場合があるし、関数の平行移動をおこなうとこの不連続点も移動しなければならないので、ラプラス変換には、注意して扱わなければならない複雑さが少しある²。

$f(t)Y(t)$ のラプラス変換を $[f](s)$ と書く。すなわち、

$$[f](s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)Y(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

よく出てくる式のラプラス変換を計算して公式を作っておき、現場ではそれを使って変換をおこなうのがよい。基本的なものを次に示す。ここで、 k は複素数、 a は実数、 n は 0 以上の整数である。 $\delta(t)$ は $t=0$ での単位インパルスである。 $\delta^{(n)}(t)$ はその n 階微分³。

² 不連続性は一般に衝撃力（インパルス）として計算に入れることができる。 $f(t)$ を a だけ移動して $f(t-a)$ にする場合、 $t < 0$ でも $t < -a$ でも $f(t) = 0$ になっていれば問題は無い。

³ $\delta(t)$ はディラックのデルタ関数ともいう。強さ 1 の衝撃力、あるいは、質量 1 の点をあらわすもの。 $t=0$ 以外で 0 であり、面積は 1。

表関数	裏関数
$f(t)$	$[f](s)$
$e^{-kt} f(t)$	$[f](s+k)$
$f(t-a)$ ただし $t < 0, -a$ で $f(t)=0$	$e^{-as} [f](s)$
$f'(t)$	$s[f] - f(0)$
$f''(t)$	$s^2[f] - sf(0) - f'(0)$
$\delta^{(n)}(t-a)$	$s^n e^{-as} \quad (a \geq 0)$ $0 \quad (a < 0)$
$f(t)Y(t) * g(t)Y(t)$	$[f](s) [g](s)$

表関数	裏関数
1	$\frac{1}{s}$
e^{-kt}	$\frac{1}{s+k}$
$\frac{t^n e^{-kt}}{n!}$	$\frac{1}{(s+k)^{n+1}}$
$Y(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s} \quad (a \geq 0)$ $\frac{1}{s} \quad (a < 0)$
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$
$\sin(kt)$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$

$f'(t)$ は $f(t)$ の t 微分であるが、その裏関数には、 $f(t)$ の裏関数と s との積だけではなく、 $f(t)$ の初期値 $f(0)$ が引き算で入っていることに注意しなければならない。たとえば、定数関数 $f(t) = 1$ の裏関数は表によれば $[f] = 1/s$ である。微分は $f'(t) = 0$ だから、その裏関数は $[f'] = 0$ になる。一方、変換表を使って計算すると、

$$[f'] = s[f] - f(0) = s \cdot (1/s) - 1 = 0$$

となって、辻褄が合っていることが確認できる (下の練習問題も参照)。

上の表の左列の下端の公式によれば、コンボリューションの裏関数は裏関数の積になる。3.2.2 節のように、回路の応答はコンボリューションになるので、それを裏関数であらわせば、関数の単なる積になってしまう。

練習: $f(t) = e^{-kt}$ とすると、 $f'(t) = -kf(t)$ と $f(0) = 1$ の2つの式が成り立つ。この2つの式と微分のラプラス変換の公式 $[f'] = s[f] - f(0)$ を使って (積分することなく)、 e^{-kt} の裏関数を求めよ。

練習: $f(t) = \cos(kt)$ とすると、 $f''(t) = -k^2 f(t)$ と $f(0) = 1$ と $f'(0) = 0$ が成り立つ。積分しないで $\cos(kt)$ の裏関数を求めよ。

4.3 実数値関数のラプラス変換

物理量は一般に実数であらわされるので、関数 $f(t)$ が実数値関数である場合に限りて成り立つ性質について検討しておこう。まず、

$$\overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t) e^{-st}} dt$$

はあきらかである。右辺の被積分関数を変形したい。実数の共役複素数は元の実数と同じであるから、 $\overline{f(t)} = f(t)$ である。複素数の指数関数については、 $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ である。さらに、 t は実数だから、 $\overline{st} = \bar{s}t$ 。したがって、

$$\overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{\bar{s}t} dt$$

すなわち、実数値関数のラプラス変換では、変数 s に共役複素数 $\bar{s}$ を代入するだけで、全体が共役複素数になる。 $Y(t)$ をかけて変換する場合も同じことである。

$$\overline{[f](s)} = [f](\bar{s}) \quad (4.3.1)$$

関数の変数を共役にするだけで関数全体が共役になるのは、実数係数の多項式関数や有理関数でも、 e^z や、 $\cos z$ のようなよくある超越関数でも同じである。

4.4 初期値問題

ラプラス変換の表を使って、抵抗の電流 I と電圧 V の関係 $V = RI$ を裏関数であらわすと、 R は定数であるので、次の比例関係が成り立つ。

$$[V] = R [I]$$

コンデンサーの場合は、電流 I と電圧 V の関係 $I = CV'$ に変換表を適用して裏関数であらわすと、

$$[I] = C(s[V] - V(0))$$

となる。ここで、 $V(0)$ はコンデンサーの初期電圧である。インダクターの場合は、 $V = LI'$ から、

$$[V] = L(s[I] - I(0))$$

ここで、 $I(0)$ はインダクターの初期電流である。コンデンサーとインダクターの場合に現れる定数項は $Y(t)$ の $t = 0$ での不連続性のために生じるもので、初期条件が初めから含まれるようになっている。

下図のように、コンデンサー C とインダクター L がノード A およびグランド G でつながってループになっている、 A の (グランドを基準にした) 電圧を V , A からコンデンサーに流れこむ電流を I とする. A からインダクターに流れこむ電流は $-I$ である. よって, $V_0 = V(0)$, $I_0 = I(0)$ とすると,

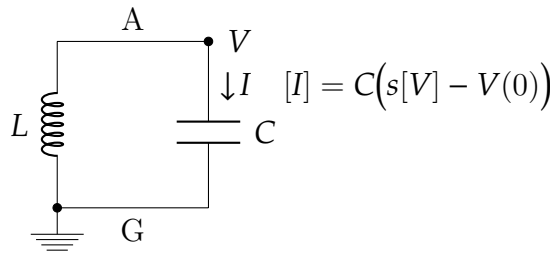
$$[I] = Cs[V] - CV_0, \quad [V] = -Ls[I] + LI_0$$

$[I]$ を消去して $[V]$ について解く. $k = \sqrt{1/LC}$ と置くと,

$$[V] = V_0 \frac{s}{s^2 + k^2} + \sqrt{\frac{L}{C}} I_0 \frac{k}{s^2 + k^2}$$

各項を表関数に置き換えると結果が出る ($Y(t)$ による積は省略).

$$V = V_0 \cos(kt) + \sqrt{\frac{L}{C}} I_0 \sin(kt), \quad k = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$



4.5 伝達関数

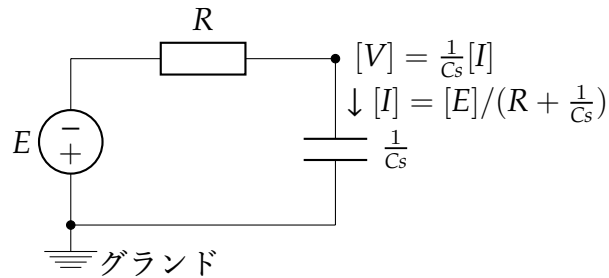
下図のような, グランド-電圧源 E -抵抗 R -コンデンサー C -グランドの順につながってループになった回路を考える. コンデンサーの電圧は V で, 初期値はゼロであるとする. E は時間の関数でもよい. E を「入力」, V を「出力」と考える.

V の初期値は 0 であるとしたので, 電流 I と V の裏の関係は,

$$[I] = C(s[V] - V(0)) = Cs[V]$$

となる. よって, 裏の電圧 $[V]$ と裏の電流 $[I]$ は比例していて, その比例定数 $1/Cs$ はコンデンサーの「インピーダンス」とみなすことができる⁴.

⁴ オームの法則を一般化したものと考えられる. このインピーダンスは裏関数としての電圧と電流の比であり, 複素数 s の関数である. 後でわかるように, インピーダンスの式の s に $i\omega$ を代入すれば, 交流の「複素インピーダンス」が得られる.



このループはインピーダンス R の抵抗とインピーダンス $1/C_s$ のコンデンサーの直列回路になっているので、全インピーダンスは $(1/C_s) + R$ である。電源電圧 $[E]$ を全インピーダンスで割ると電流 $[I]$ になり、これにコンデンサーのインピーダンス $1/C_s$ をかけると、コンデンサーの電圧 $[V]$ になる。よって、

$$[V] = \frac{1}{1 + CRs} [E]$$

右辺の $[E]$ のにかかる係数は入力 $[E]$ に対する出力 $[V]$ の比であり、これを入力から出力への「伝達関数」と呼ぶ。

$E = E_0$ (E_0 は定数) としてみる。変換表より、 $[1] = 1/s$ であるから、 $[E] = E_0/s$ 。これを上の式に代入し、分数式を部分分数に展開してから、裏から表に変換すると、

$$\begin{aligned}
 [V] &= \frac{E_0}{(1 + CRs)s} = \frac{E_0}{s} - \frac{E_0}{s + (1/CR)} \\
 \therefore V &= E_0 \cdot 1 - E_0 \cdot e^{-t/CR} = E_0 (1 - e^{-t/CR})
 \end{aligned}$$

このように、初期値がゼロの場合は、インピーダンスを使って直流回路と同様に考えれば裏関数の計算ができる。

入力 E が単位インパルス $\delta(t)$ の場合、 $\delta(t)$ の裏関数は 1 であるから、伝達関数の表関数が出力になる。これは「インパルス応答」であった。

練習: 上の回路のインパルス応答を変換表を使って求めよ。

4.6 初期値の分離

初期値がゼロではない場合でも、次のように考えれば、結局直流回路と同じになる。

初期電圧 $V(0) = V_0$ のコンデンサーの電流 I と電圧 V の裏の関係は

$$[I] = C(s[V] - V_0)$$

であったが、ラプラス変換表によれば、裏関数 V_0/s の表関数は V_0 であるので、

$$[I] = Cs\left([V] - \frac{V_0}{s}\right) = Cs[V - V_0]$$

$V_C = V - V_0$ と置くと、

$$[I] = Cs[V_C], \quad V = V_C + V_0$$

左側の式は初期電圧ゼロのコンデンサーの電流 I と電圧 V_C の関係であり、右側の式はこのコンデンサーと定電圧源 V_0 を直列につないだ回路の電圧である。よって、初期電圧 $V(0) = V_0$ のコンデンサーは、初期電圧ゼロのコンデンサーと電圧源 V_0 が直列につながったものとみなすことができる。そこで、この電圧源を入力電圧として扱えばよい。

同様に、初期電流 I_0 のインダクターは、電流源 I_0 が初期電流ゼロのインダクターと並列になっているものとみなし、この電流源を入力電流として扱えばよい。

コンデンサーやインダクターを含んだ回路の過渡現象の計算は、 s の関数としてのインピーダンスを使った回路計算に帰着させることができることがわかった。よって、キルヒホフの法則や等価回路の概念といった、直流回路と同じ概念を使って計算をおこなうことができるのである。初期電圧や初期電流も含めて、電圧源入力や電流源入力が複数ある場合は、重ね合わせの原理によって、各入力に対する応答を別々に計算し、結果を後で足し合わせれば全応答がわかる。この場合、入力の数だけの伝達関数があることになる。

練習: 初期電圧 V_0 のコンデンサー C に抵抗 R をつないで放電する過程で流れる電流 I を次の 2 とおりの方法で計算せよ。

1. $[V] = R[I]$ と $[I] = C[V']$ から $[I]$ を求める (コンデンサーを分解しない方法).
2. $[V] = R[I]$ と $[V] = [V_C] + [V_0]$ と $[I] = Cs[V_C]$ から $[I]$ を求める (初期電圧ゼロのコンデンサーと定電圧源 V_0 に分解する方法).

最後に、 $[I]$ から I を求めること。

第5章 交流解析 (AC)

5.1 周波数応答

$\tilde{V}(t) = V_0 \exp(i(\omega t + \alpha))$ とする。これは $V_0 \cos(\omega t + \alpha)$ の複素表現である。 $\tilde{V}(t) = V_0 \cos(\omega t + \alpha) + iV_0 \sin(\omega t + \alpha)$ でもあるので、インパルス応答 $w(t)$ の回路の入力 $\tilde{V}(t)$ に対する出力は、

$$w(t) * \tilde{V}(t) = w(t) * V_0 \cos(\omega t + \alpha) + i(w(t) * V_0 \sin(\omega t + \alpha))$$

インパルス応答は実数関数であるから、上式の実部は $w(t) * V_0 \cos(\omega t + \alpha)$ である。これは $V_0 \cos(\omega t + \alpha)$ に対する応答である。

このように、正弦波入力に対する応答を得るには、その複素表現に対する応答を計算してその実部を採ればよい。複素表現に対する応答は応答の複素表現にもなっている。

$\tilde{V}_0 = V_0 e^{i\alpha}$ と置くと、 $\tilde{V}(t) = \tilde{V}_0 e^{i\omega t}$ 。 $\tilde{V}(t)$ に対する応答 $\tilde{V}_c(t)$ は次のように計算できる。

$$\tilde{V}_c(t) = w(t) * \tilde{V}(t) = \tilde{V}_0 e^{i\omega t} \frac{1}{RC} \int_0^\infty e^{(-\frac{1}{RC} - i\omega)t'} dt' = \frac{1}{1 + iRC\omega} \tilde{V}(t)$$

このように、複素表現では、周波数の複素数値関数と入力信号との積が応答になる。この関数を「周波数伝達関数」という。周波数伝達関数を絶対値 b と偏角 β で $be^{i\beta}$ とあらわすと、

$$\tilde{V}_c(t) = b e^{i\beta} \tilde{V}(t) = b V_0 e^{i(\omega t + \alpha + \beta)}$$

この実部を採れば、

$$V_c(t) = b V_0 \cos(\omega t + \alpha + \beta)$$

すなわち、周波数伝達関数の絶対値がアウトプットとインプットの振幅比、偏角が位相ずれをあらわす。

積分回路の場合に、周波数伝達関数 $be^{i\beta} = \frac{1}{1 + iRC\omega}$ による振幅比と位相ずれを具体的に計算すると、

$$b = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}, \quad \beta = -\arctan(RC\omega)$$

振幅比は、角周波数 ω の増加に対して 1 から単調に減少していったゼロに近づく。 $\omega \gg 1/RC$ では、 $b \cong 1/RC\omega$ であって、 ω に反比例する。角周波数が $\omega = 1/RC$ のとき $b = 1/\sqrt{2}$ となる。この周波数を境にして、周波数が低い信号はインプットからアウトプットに伝わりやすく、周波数が高い信号は伝わりにくい。それで、このような回路を “low-pass filter” と呼ぶ。境目の周波数 $\frac{1}{2\pi RC}$ を「カットオフ」周波数という。位相ずれ β は、 ω の増加に対してゼロから $-\pi/2$ (-90°) まで変化する。 $\omega = 1/RC$ では $\beta = -\pi/4$ (-45°) になる。

$V_R(t)$ は

$$\tilde{V}_R = RC \frac{d}{dt} \tilde{V}_C = RC \cdot i\omega \tilde{V}_C = \frac{iRC\omega}{1 + iRC\omega} \tilde{V}(t)$$

の実部である。 V_R と V の振幅比は ω の増加に対してゼロから 1 へ単調に増加する。 $\omega = 1/RC$ で $1/\sqrt{2}$ になる。この周波数を境にして、周波数が低い信号はインプットからアウトプットに伝わりにくく、周波数が高い信号は伝わりやすい。それで、このような回路を “high-pass filter” と呼ぶ。位相ずれは、 ω の増加に対して $\pi/2$ (90°) からゼロまで変化する。カットオフ周波数 $\omega = 1/RC$ では $\beta = \pi/4$ (45°) になる。

練習： 積分回路の AC(交流) シミュレーションをおこなえ。ただし、 $C = 1 \text{ nF}$, $R = 159 \Omega$ とし、周波数 10 kHz から 100 MHz の範囲で両対数グラフを作成すること。

5.2 複素インピーダンス

電圧源や電流源がすべて同じ周波数の正弦波交流であるとき、線形回路の素子の電流やノード電位はすべて同じ周波数の正弦波交流になる。これらを全部複素表現で扱い、複素表現の電圧や電流もキルヒホッフの法則などを満たすとして計算をおこない、最後に実部を採れば答えが出る。

複素表現では、抵抗 R の電圧と電流の関係は $\tilde{V} = R\tilde{I}$ となる。コンデンサーでは、 $\tilde{I} = iC\omega\tilde{V}$ が成り立つ。また、インダクターでは、 $\tilde{V} = iL\omega\tilde{I}$ が成り立つ。複素表現での電圧と電流の比を「インピーダンス」、あるいは「複素インピーダンス」という。その逆数は「アドミタンス」である。抵抗のインピーダンス Z_R 、コンデンサーのインピーダンス Z_C 、インダクターのインピーダンス Z_L は、

$$Z_R = R, \quad Z_C = \frac{1}{iC\omega}, \quad Z_L = iL\omega$$

RC 直列回路のインピーダンスは $Z = R + Z_C$ であるので、電圧源が $\tilde{V}$ なら電流は $\tilde{I} = \tilde{V}/(R + Z_C)$ 。C の電圧は $\tilde{V}_C = Z_C\tilde{I} = \frac{1}{1+iRC\omega}\tilde{V}$ 。R の電圧は、 $\tilde{V}_R = R\tilde{I} = \frac{iRC\omega}{1+iRC\omega}\tilde{V}$ 。

このようにして、周波数応答の計算は微積分を全く使うことなく行える。R, C, L で構成された回路の電流や電圧の関係は線形であり、線形回路網の諸定理を適用することができる。

複素表現では、時間の関数はすべて $\tilde{V}(t) = v e^{i\omega t}$ のように複素振幅 v と $e^{i\omega t}$ の積で表される。 $e^{i\omega t}$ が共通なので、それを省いて複素振幅だけで関係式を書くこともできる。複素振幅は小文字で書くことが多い。

パワーの計算が必要な場合は複素振幅の $1/\sqrt{2}$ 倍である「複素実効値」を使うこともあるが、複素振幅を使おうと複素実効値を使おうと、電流や電圧の関係を表す式は同じである。

5.3 交流の電力

複素インピーダンスは実部 R と虚部 X で $z = R + iX$ のようにあらわすことができる。電流を $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$ とすると、電圧は次のようになる。

$$V(t) = RI_0 \cos(\omega t + \alpha) + XI_0 \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

電流に対して、第1項は同相であり、第2項は90度の位相差があるので、 R を抵抗成分、 X をリアクタンス成分という。電力の瞬時値 $P(t) = V(t)I(t)$ は

$$P(t) = \frac{RI_0^2}{2} (1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)) + \frac{XI_0^2}{2} \cos\left(2\omega t + 2\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。ここで、 $\cos$ の項の時間平均は0になるので、 $P(t)$ の時間平均は $\langle P(t) \rangle = RI_0^2/2$ となる。これを「有効電力」(effective power) と呼ぶ。 $XI_0^2/2$ の方は「無効電力」あるいは reactive power という。

$s = zI_0^2/2$ と定義される量 s を導入すると、 $s = (RI_0^2/2) + i(XI_0^2/2)$ より、実部が有効電力、虚部が無効電力となる。電流の複素表現 $\tilde{I}$ を使うと $\tilde{I} = I_0$ であり、電圧の複素表現は $\tilde{V} = z\tilde{I}$ とあらわせるから、

$$s = \frac{1}{2}zI_0^2 = \frac{1}{2}z\tilde{I}\tilde{I}^* = \frac{1}{2}\tilde{V}\tilde{I}^*$$

s の絶対値は $|s| = V_0 I_0 / 2$ であり、電圧振幅と電流振幅の単純な積（の半分）である。 $|s|$ を「皮相電力」と呼ぶ。有効電力を p 、無効電力を q とし、インピーダンスの偏角（電圧と電流の位相差）を δ とすると、次の関係が成り立っている。

$$|s|^2 = p^2 + q^2, \quad p = |s| \cos \delta, \quad q = |s| \sin \delta$$

5.4 周波数応答と演算子法

複素表現 $ve^{i\omega t}$ の実部は

$$V(t) = \frac{1}{2}v e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\bar{v} e^{i(-\omega)t}$$

であるから、実数表現は2つのフーリエ成分を持っていて、それらは複素表現とその共役である(係数1/2はある)。それらの角周波数は ω と $-\omega$ である。

任意の信号はいろいろな周波数の成分で構成されるから、すべての周波数における周波数応答が得られれば、任意の信号に対する応答がわかったことになる。

任意の関数を微分してフーリエ変換すると、はじめにフーリエ変換してから $i\omega$ をかけたものになる。任意の関数を微分してラプラス変換すると、はじめにラプラス変換してから s をかけたものになる¹。 n 階微分では、 $(i\omega)^n$ または s^n が出てくる。さらに、

$$\left(a_0 + a_1 \frac{d}{dt} + a_2 \frac{d^2}{dt^2} + \cdots\right) f(t)$$

は

$$\left(a_0 + a_1(i\omega) + a_2(i\omega)^2 + \cdots\right) F(\omega)$$

または

$$\left(a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots\right) [f](s)$$

のようになる²。このように、微分演算子はフーリエ変換やラプラス変換によって同じ形をした式になり、1階微分を $i\omega$ や s に入れ替えるだけでよい。そのため、ラプラス変換による演算子法の式と周波数応答の式は $i\omega$ と s を入れ替えるだけで同じになる。したがって、周波数応答の式は $i\omega$ に s を入れて s の式として扱ってもよいが、それだけではなく、その式を裏関数と見て表関数に変換すれば、過渡応答を計算することもできる。

R, C, L の電流 i (虚数単位 i ではない) と電圧 v の関係は次のようになる。

$$R: v = Ri, \quad C: v = \frac{1}{Cs}i, \quad L: v = Lsi$$

ここで、 v や i はラプラス変換の裏関数とみなしてもよいし、角周波数 $\omega = s/i$ のスペクトル成分とみなしてもよい。RC回路の応答を同様に書くと、

$$v_C = \frac{1}{1 + RCs}v, \quad v_R = \frac{RCs}{1 + RCs}v$$

¹フーリエ変換の場合では $\pm\infty$ で関数がゼロに収束しなければならないし、ラプラス変換では関数の初期値がゼロでなければならないが、このような条件がもともと成り立っていない場合でも、工夫によってそれを成り立たせることはできる。たとえば、初期値を差し引いて分離する。

²係数は定数でなければならない。

ここで、 v は入力電圧、 v_C はコンデンサーの電圧、 v_R は抵抗の電圧であるが、裏関数でもよいしスペクトル成分でもあってよい。

5.5 RL 回路

RL 直列回路に交流電圧 v をかけると電流は $i = v/(R + Ls)$ となる。R と L の電圧は、

$$v_R = \frac{1}{1 + (L/R)s}v, \quad v_L = \frac{(L/R)s}{1 + (L/R)s}v$$

R から出力すれば積分回路、L から出力すれば微分回路になる。時定数は L/R 。

練習: 100 mH のインダクターと 1 k の抵抗の直列回路の時定数は、100 μ s。

5.6 RCL 回路

RCL 直列インピーダンスは

$$Z = R + Ls + \frac{1}{Cs} = R + \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\sqrt{LC}s + \frac{1}{\sqrt{LC}s} \right)$$

$T = 1/\Omega = \sqrt{LC}$, $QR = \sqrt{L/C}$ とすると、

$$Z = R \left[1 + Q \left(\frac{s}{\Omega} + \frac{\Omega}{s} \right) \right]$$

であるから、交流電圧 v をかけたときの電流は

$$i = \frac{v}{R} \times \frac{1}{1 + iQ(\frac{\omega}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega})}$$

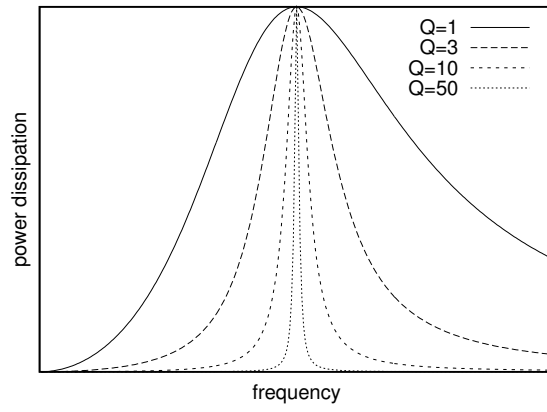
平均消費電力は、 $v_{\text{eff}} = |v|/\sqrt{2}$ と置くと、

$$P = \frac{1}{2} \Re(v\bar{i}) = \frac{v_{\text{eff}}^2}{R} \times \frac{1}{1 + Q^2(\frac{\omega}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega})^2}$$

$\omega = \Omega$ で P は最大になる。 $v_{\text{eff}} = |v|/\sqrt{2}$ は電圧の実効値である。共鳴の半値全幅 (P がピーク値の半分になる周波数の間隔) は

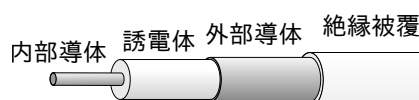
$$\Delta\omega = \frac{\Omega}{Q}$$

と求められる。



第6章 伝送線路とインピーダンス マッチング

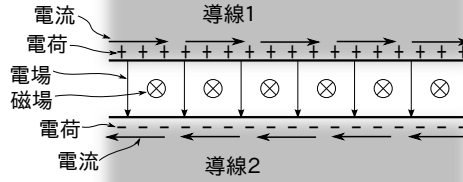
回路理論では、部品と部品をつなぐノードとしての導線は長さを持たないものとして扱われるが、実際の導線の長さが無視できない場合がある。電気信号は光速度程度の速さでしか伝わらないので、信号の変化の速さによっては、導線の一方の端と他方の端とで電圧が違うかもしれない。このような場合、一般には空間への電磁波放射が起こるために取り扱いが難しいが、導線の配置の仕方によって電磁波放射を抑えることもできる。それには、2本の導線を接近させて並べ、逆方向に電流が流れるようにする。このようにすると、キャンセルが起こって電流が流れていないように見え、その結果、電磁波放射を起こさないですむ。このような構造を**伝送線路**と呼ぶ。よく見かける伝送線路は「同軸ケーブル」である。下図のように、同軸ケーブルは内部導体と外部導体からできていて、それらの間は誘電体で埋められている。これらはある程度やわらかい材料で作られていて、ケーブルを曲げることができる。



6.1 伝送線路の原理

伝送線路の単位長さあたりのキャパシタンスとインダクタンス C , L を考える。伝送線路は2つの導体が並べてあるので、ある長さ Δx の部分を切り取るとコンデンサーになっていて、そのキャパシタンス $C(\Delta x)$ は Δx に比例する。単位長さあたりのキャパシタンス $C(\Delta x)/\Delta x$ を C とする。同じ部分を切り取って端をつないでループにし、2本の導体に逆向きに同じ大きさの電流が流れるようにすると、インダクターになっていて、そのインダクタンス $L(\Delta x)$ は Δx に比例する。単位長さあたりのインダクタンス $L(\Delta x)/\Delta x$ を L とする¹。

¹ これらの値は信号の周波数が十分に低い場合にしか成り立たない。伝送線路の太さで決まる「モードフリー周波数」というものがあり、この周波数に近くなると、伝送線路の断面の方向



電気信号は伝送線路の中を1次元の波として伝わる。これは音波が管の中を伝わるのと同様である。音波が速さとインピーダンスを持つのに同様に、伝送線路を流れる電気信号にも速さとインピーダンスがある。電気信号の場合のインピーダンスとは、電圧と電流の比である。これらを時刻 t と軸方向へ測った位置 x の関数と見て、 V と I であらわすと、次の関係式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} I_x &= -CV_t \\ V_x &= -LI_t \end{aligned} \right\} \quad (6.1.1)$$

ただし、 I と V の t 微分を I_t 、 V_t と書き、 x 微分を I_x 、 V_x と書いた。

$$I_t = \frac{\partial I}{\partial t}, \quad V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad I_x = \frac{\partial I}{\partial x}, \quad V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$$

(6.1.1)の上の方の式は、キャパシタンスの充電のために電流が使われることを意味している。つまり、左から入ってくる電流から充電に使われる電流を引いたものが右側に出てくる電流に等しい。また、下の方の式は、インダクタンスの電流を変化させるために電圧が使われることを意味する。つまり、電流の時間変化による誘導起電力が左側の電圧と右側の電圧の差を作り出している。

(6.1.1)式の解は右または左に進む進行波の重ね合わせになる。右向き進行波の解を考えよう。波の速さを v_L とすると、右向き進行波は V も I も $t - x/v_L$ の1変数関数になることから、

$$V_x = -\frac{1}{v_L}V_t, \quad I_x = -\frac{1}{v_L}I_t$$

となる。これを(6.1.1)式の左辺に入れると、

$$\frac{1}{v_L}I_t = CV_t, \quad \frac{1}{v_L}V_t = LI_t \quad (6.1.2)$$

に電磁波が伝わる時間が無視できなくなるため、コンデンサーとインダクターによるモデルが使えなくなる。

これらの式の両辺をかけてみると、 v_L がわかる。

$$v_L = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (6.1.3)$$

これを (6.1.2) のどちらかに代入すれば、

$$V_t = \sqrt{\frac{L}{C}} I_t$$

これを t で積分し、 $\sqrt{L/C}$ を Z_L とおけば、

$$V = Z_L I \quad \left(Z_L = \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \quad (6.1.4)$$

ここで、 V と I の積分定数は考慮していない。これらは直流成分であり、波として伝播するものではないからである²。なお、左に進む信号に関しては符号が逆になる。したがって、左右に進む信号が混ざっている場合は、 V と I の比は場所によって異なる。

Z_L は伝送線路の**特性インピーダンス**という。同軸ケーブルは、特性インピーダンスが 50Ω のものや 75Ω のものがよく使われている。工業規格では、いろいろな種類の同軸ケーブルの基本特性が決められている。

速さ v_L に関しては、別の簡単な公式がある。伝送線路内の電場と磁場が伝送線路の長さ方向に対して常に垂直であるとして電磁気学の法則を使えば、

$$v_L = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (6.1.5)$$

が得られるのである。ただし、導波管の導体のまわりがすべて真空であるか一般的な絶縁物で埋められている場合に限られる（電場や磁場がほとんど存在しないような場所は除く）。ここで、 μ は透磁率、 ϵ は誘電率であり、この式は（損失のない）物質中の平面電磁波の速さと同じである。通常使われる絶縁物の透磁率は真空の透磁率と同じなので、その場合には、比誘電率 ϵ_r と光速度 c によって、

$$v_L = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (6.1.6)$$

となる。 $1/\sqrt{\epsilon_r}$ を**波長短縮率**ともいう。

以上の話は、波長が短くなって伝送線路の太さと同程度になると、正確には成り立たなくなる。太さ方向に波が伝わる時間が無視できなくなるからである。

² 直流成分の電圧と電流の比は任意の値をとることができるので、伝送線路を電源供給に使うことができる。しかも、電源を供給しながら信号伝送に使うこともできる。

6.2 インピーダンスマッチング

伝送線路中の進行波はエネルギーを電力として運ぶ。右向き進行波は右向きに電力 $IV = V^2/Z_L = Z_L I^2$ を運んでいるし、左向き進行波も同様である。左右の成分があると引き算になる。

他の種類の波と同様、伝送線路中の電気信号も接続部で反射を起こす。反射係数はインピーダンスの比だけで決まる。接続部への入射信号の電圧と電流を V_i, I_i とし、反射信号の電圧と電流を V_r, I_r とし、透過信号の電圧と電流を V_t, I_t とし、入射側の特性インピーダンスを Z_1 、透過側の特性インピーダンスを Z_2 とすると、次の条件が満たされる必要がある。

$$\begin{aligned} V_i + V_r &= V_t \\ I_i + I_r &= I_t \\ V_i &= Z_1 I_i, \quad V_r = -Z_1 I_r, \quad V_t = Z_2 I_t \end{aligned}$$

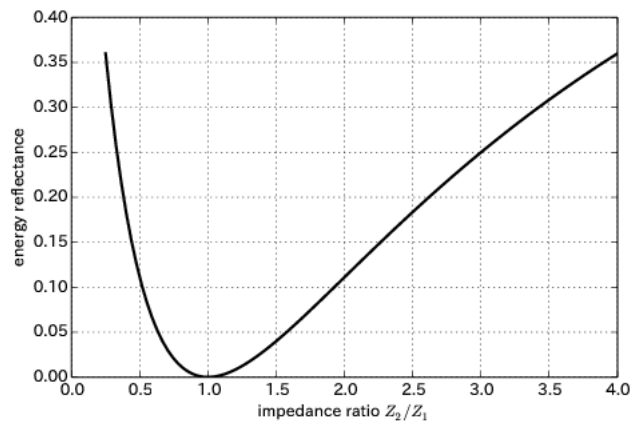
これを解いて、反射係数 V_r/V_i と透過係数 V_t/V_i を求めると、

$$\frac{V_r}{V_i} = \frac{(Z_2/Z_1) - 1}{(Z_2/Z_1) + 1}, \quad \frac{V_t}{V_i} = \frac{2Z_2/Z_1}{(Z_2/Z_1) + 1} \quad (6.2.1)$$

エネルギー反射係数とエネルギー透過係数は次のようになる。

$$\left| \frac{I_r V_r}{I_i V_i} \right| = \left| \frac{(Z_2/Z_1) - 1}{(Z_2/Z_1) + 1} \right|^2$$

これでわかるように、たとえば、インピーダンス比が3倍だと、反射によるエネルギー・ロスが25%になる。また、ロスを4%以内に抑えるには、インピーダンス比を1.5倍以内に合わせればよい。次のグラフはインピーダンス比 Z_2/Z_1 によるエネルギー反射係数の変化。



透過側の伝送線路は、特性インピーダンスと同じ抵抗値の抵抗におきかえても、反射係数は同じになる。それは、抵抗におきかえても $V_t = Z_2 I_t$ が成り立つからである。伝送線路の端につなぐこのような抵抗を**終端抵抗**という。もし純抵抗でないかもしれない場合は終端インピーダンスという。この場合は、交流信号に対する複素インピーダンスとして計算をおこなうことができる。

伝送線路の一方の端を特性インピーダンスと同じ抵抗で終端すれば、反射が起こらないために1方向への進行波のみが存在するから、伝送線路のどこでも(時間のずれはあるが)電圧振幅は同じで $V = Z_L I$ が成り立つ。したがって、伝送線路の入り口は終端抵抗と同じ抵抗に見え、入り口の信号はそのままの形と大きさとで終端にあらわれる。高速・高周波信号の測定では、測定器の入力インピーダンスと同じ特性インピーダンスの同軸ケーブルを用いる。このようにすると、測定対象に測定器を直につないだのとほぼ同じになる。

信号源が電圧源と直列抵抗で構成されると考えよう。この抵抗は**信号源抵抗**または**信号源インピーダンス**という。このような信号源に、信号源抵抗と同じ特性インピーダンスを持つ伝送線路をつなぐと、もう一方の端で反射が起こったとしても、反射波は信号源に戻ってきて吸収されてしまうので、終端に出てくる信号の強さは伝送線路の長さには関係なくなり、信号源が直接終端部につながったのと同じになる。高速信号を発生するセンサーや信号発生装置の多くはある決まった信号源抵抗を持つように作られている。それは、同じ特性インピーダンスの伝送線路で接続されることが予定されているのである。

信号源抵抗と伝送線路の特性インピーダンスと終端抵抗を一致させると、終端で吸収されるエネルギーは(信号源から供給されるエネルギーも)最大になる。インピーダンスが異なるものの間になんらかの回路を入れてインピーダンスを変換をおこなうこともある。インピーダンスによって信号源から終端部へのエネルギー伝達を最大にすることを「インピーダンスマッチング」という。

6.3 インピーダンス変換の例

反射係数の式(6.2.1)は、反射係数がインピーダンス比と一対一に対応していることがわかる。実際、逆に解けば、

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{1 + (V_r/V_i)}{1 - (V_r/V_i)}$$

となる。

交流回路としての解析では、電圧や電流は複素数になるので、インピーダンスは複素インピーダンスになり、反射係数も複素数になる。上の式などから、反射

係数が実数ならインピーダンス比も実数であるし、インピーダンス比が実数なら反射係数も実数である。

特性インピーダンス Z_1 の伝送線路の右端を抵抗 R で終端し、角周波数 ω の交流信号を流してみよう。反射係数を r とする。 $r = (R - Z_1)/(R + Z_1)$ である。伝送線路の中では右向き進行波が右端で反射して左向き進行波になっている。終端から左へ距離 ℓ のところでの右向き進行波の電圧 (の複素振幅) を V_0 とする。反射波が同じ所に戻ってくるのに距離 2ℓ だけ伝搬するため、位相は $2\omega\ell/v_L$ だけ遅れる。また、終端での反射によって振幅は r 倍になる。したがって、距離 ℓ のところでの反射波は $E_0 r e^{2i\omega\ell/v_L}$ となる。よって、長さ ℓ の伝送線路に抵抗を付けたものの反射係数は $r e^{2i\omega\ell/v_L}$ である。

この反射係数から、伝送線路付き抵抗のインピーダンス Z と特性インピーダンス Z_1 の比 Z/Z_1 がわかる。インピーダンスを実数にするため反射係数が実数になるようにしたい。それには、 $2\omega\ell/v_L = \pi n$ とすればよい。 n が偶数の場合は $r_\ell = r$ だから、 $Z = R$ であるが、 n が奇数の場合は $r_\ell = -r$ となるから、 $Z/Z_1 = Z_1/R$ 、すなわち

$$Z = \frac{Z_1^2}{R}$$

となる。 Z_1 によって Z は任意の値をとり得る。これは、信号源インピーダンスと負荷抵抗が異なるときにインピーダンス・マッチングをおこなう方法のひとつになる。ただし、 $2\omega\ell/v_L = \pi n$ という条件があるので、周波数が変わるとマッチングがとれなくなる。

6.4 インピーダンスチャート

複素インピーダンス Z の負荷に複素振幅 I の交流電流を流すと、複素振幅 ZI の電圧が生じ、電力を計算すると $\text{Re}(Z)|I|^2/2$ となる。 $\text{Re}(Z)$ は Z の実部である。もし $\text{Re}(Z)$ が負であると電力が負になってしまう。負荷は電力を消費するだけだと考えると、 Z は複素平面の右半分に限定されることになる。

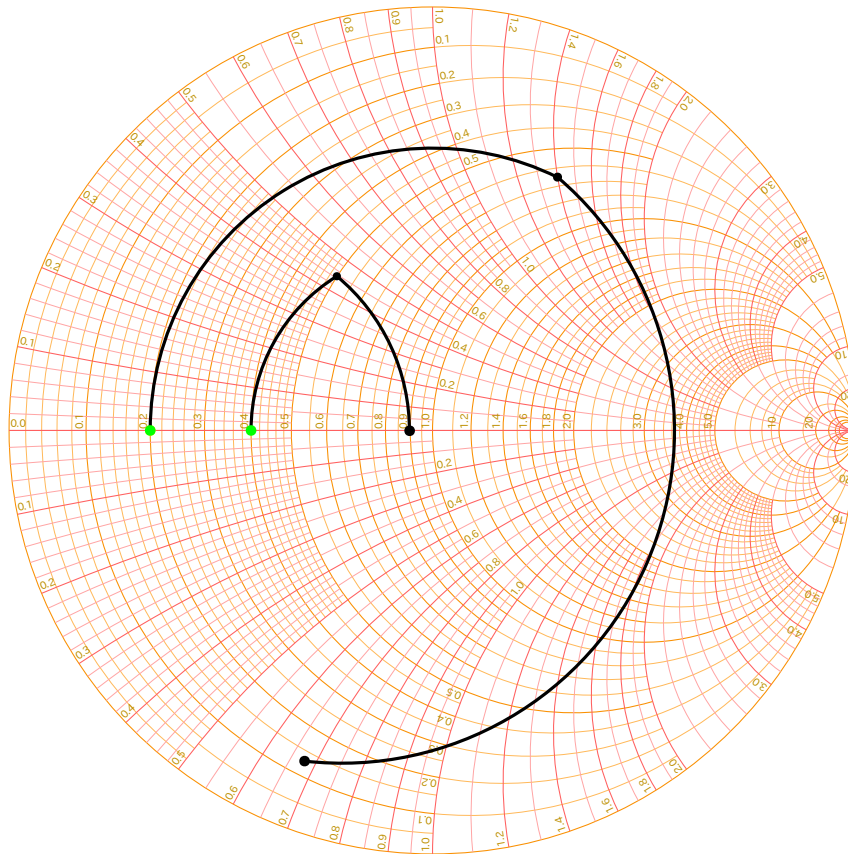
正のインピーダンス Z_0 を持つ信号源に Z をつないだときの複素反射係数 Γ は、 $z = Z/Z_0$ として、

$$\Gamma = \frac{z - 1}{z + 1}$$

となる (特性インピーダンス Z_0 の伝送線路でつないだと考える)。 z は Z_0 を基準にして測ったインピーダンスであり、**正規化インピーダンス**と呼ぶ。基準インピーダンス Z_0 は場合によって適切に決められる。 Z と同様に、 z も複素平面の右半分に制限されるが、 Γ はどんな領域に制限されるだろうか？

$z = a + ib$ とおくと ($a \geq 0, b$ は実数), $\Gamma = \frac{(a-1)+ib}{(a+1)+ib}$. $a \geq 0$ から $|a-1| \leq |a+1|$ が言えるので, $|(a-1)+ib| \leq |(a+1)+ib|$ であり, よって, $|\Gamma| \leq 1$ となる. 等号は $a=0$ でなりたつ. したがって, 半径1の円の周と内部が Γ の領域である.

Γ の領域はコンパクトなので, インピーダンスのかわりに反射係数を使って計算すると便利ことがある. z 平面の虚数軸は Γ 面では単位円周になる. 実数は実数に写されるので, z 平面の実数軸 (ただし正の半分) は Γ 面では -1 から $+1$ までの横向き線分になる. z のすべての向きの無限大は $\Gamma = 1$ に写される. この対応は Γ 面の曲線座標系として z を入れたものと考えることができる. z 面の座標格子の縦線と横線に対応する曲線を Γ 面に描くと「曲線座標格子」になる. このようにして作られたグラフ用紙を「スミス・チャート」あるいは「インピーダンス・チャート」といい, 主に高周波回路の計算に使われる.



複素関数の理論によれば, z 面で直交する線は Γ 面でも直交する. だから, スミスチャートの座標格子線はすべての交点で直交している. このような座標を「**直交曲線座標**」という³. また, これらの格子線が円であることも知られている.

³ 直交曲線座標の有名な例は極座標である.

スミスチャートの横軸に目盛りされた数値は「抵抗成分」(z の実部)であり、抵抗成分が一定の格子線は横軸に直交している円である。外周円に目盛りされた数値は「リアクタンス成分」(z の虚部)であり、リアクタンス成分が一定の格子線は外周円に直交している円弧である。抵抗成分とリアクタンス成分がわかっているならば、それらに対応する目盛り位置から格子線をたどれば、チャート上の位置が決まる。

アドミッタンスはインピーダンスの逆数であるが、 $y = 1/z$ によって正規化アドミッタンス y を定義すれば、

$$\Gamma = -\frac{y-1}{y+1}$$

となる。この変換は z から Γ への変換の符号を変えたものである。だから、 y を曲線座標にして座標格子線を描くなら、 z で描いたものを左右反転するだけでよい。

一般には、 z 面や y 面の円や直線は Γ 面の円や直線に相互に対応している。伝送線路やインダクター、コンデンサーなどからなる回路の複素インピーダンスの計算はチャート上に円や直線を描くことによっておこなうことができる。コンピューターによる計算や測定器による測定でも、結果をチャート上に表示することがある。

第7章 半導体デバイスの基礎

7.1 半導体材料

半導体は導体と絶縁体の中間の電気的特性を持つ物質であり，外部刺激や不純物による変化が起こりやすいという特徴がある．低温では価電子帯が充満し伝導帯が空になるので絶縁体に近いが，温度上昇や光照射によって電子が励起され，自由電子やホールが生じ，電気伝導度が上がる．電子デバイスに最も大量に使われているのはシリコンであるが，他にもさまざまな種類の半導体が利用されている．

IV 族半導体 : ダイヤモンド (C)，シリコン (Si)，ゲルマニウム (Ge)

II-VI 族化合物半導体 : ZnSe, CdS, ZnO など

III-V 族化合物半導体 : GaAs, InP, GaN など

IV 族化合物半導体 : SiC, SiGe など

酸化物半導体 : ZnO, SnO₂, In₂O₃ など

有機半導体 : ペンタセン, Alq₃, ポリアセチレンなど

下は短い周期律表¹．

IA 1 族	IIA 2 族	IIIA 3 族	IVA 14 族	VA 15 族	VIA 16 族	VIIA 17 族	VIIIA 18 族
¹ H							² He
³ Li	⁴ Be	⁵ B	⁶ C	⁷ N	⁸ O	⁹ F	¹⁰ Ne
¹¹ Na	¹² Mg	¹³ Al	¹⁴ Si	¹⁵ P	¹⁶ S	¹⁷ Cl	¹⁸ Ar
¹⁹ K	²⁰ Ca	³¹ Ga	³² Ge	³³ As	³⁴ Se	³⁵ Br	³⁶ Kr
³⁷ Rb	³⁸ Sr	⁴⁹ In	⁵⁰ Sn	⁵¹ Sb	⁵² Te	⁵³ I	⁵⁴ Xe
⁵⁵ Cs	⁵⁶ Ba	⁸¹ Tl	⁸² Pb	⁸³ Bi	⁸⁴ Po	⁸⁵ At	⁸⁶ Rn
⁸⁷ Fr	⁸⁸ Ra						

¹IUPAC(国際純正応用化学連合) で決められている元素の族は 1 から 18 までである．同じ族の元素は最外殻電子の配置が同じで化学的性質が似ている．

IV 族半導体は第 14 族元素 (炭素族) のシリコンとゲルマニウムをさすが、炭素でできているダイヤモンドも半導体の性質を持つのでこれに含まれる²。これらの原子には p^2s^2 の 4 個の荷電子 (最外殻電子) があり、共有結合によって結晶になっている。各原子がまわりの 4 つの原子から 1 つずつの荷電子を共有することで閉殻状態になっている。この荷電子が伝導帯に励起されて動けるようになるには、ある一定のエネルギーが必要で、このエネルギーをバンドギャップ・エネルギーという。たとえば、シリコンのバンドギャップは約 1.11 eV (常温 300 K のとき) である。1 eV は約 11 600 K の温度での熱励起エネルギーであるので、シリコンのバンドギャップは常温の熱励起エネルギーの 43 倍もあり、このため純粋なシリコンの電気抵抗は金属に比べて非常に大きい、ガラスのような絶縁物に比べるとかなり小さい。

化合物半導体は物質によってさまざまな特性を持つ。たとえば、ZnSe (セレン化亜鉛) や GaN (窒化ガリウム)、あるいはある種の有機半導体などは高効率な発光素子に使われる。また、SiGe や III-V 族 3 元化合物 (3 種類の元素をいろいろの割合で混ぜて作る) で HEMT という高速トランジスタが作られる。酸化物半導体は可視光を透過するものが多く、透明電極の材料になる³。

半導体の電気伝導をになうのは 2 種類の「キャリア」、すなわち、伝導帯の電子と価電子帯のホールである。伝導帯の電子は自由電子といい、負電荷を持った自由な粒子である。ホールは価電子帯の電子がなんらかの理由で無くなってできた穴であり、正電荷を持った自由な粒子としてふるまう。

自由電子とホールが出会うと、中和してエネルギーを失い共に消滅するが、両者は熱励起によって作られてもいるため、常にある量が存在して平衡状態が保たれている。この状態は温度、電場、光、応力、不純物の種類と濃度によって変化する。これが半導体の多様な機能を生み出す主なもとになっている。

7.2 n 型半導体と p 型半導体

自由電子とホールが同数ある半導体は真性半導体あるいは i 型半導体という。i は intrinsic の i である。これに対して、自由電子が多数あるものを n 型半導体、ホールが多数あるものを p 型半導体という。真性半導体にリン (P) などの V 価元素を少量混ぜると n 型になり、ホウ素 (B) などの III 価元素を少量混ぜると p 型になる。このように、不純物を混ぜてキャリアを増やした半導体を**不純物半導体**と呼

² ダイヤモンド半導体には、コンピュータの飛躍的な高速化や省エネデバイスの開発などの期待がかけられている。

³ 液晶ディスプレイや有機発光素子の電極として ITO 膜がよく使われている。ITO (Indium Tin Oxide) は酸化インジウムに酸化スズが混ざっている材料で、透明だが金属に近い電気伝導度がある。

ぶ。不純物を混ぜることを**ドーピング**という。リンなどは電子を供給するので**ドナー**と呼ばれ、ホウ素などは電子を捉えるため**アクセプター**と呼ばれる。ドナーとアクセプターはともに**ドーパント**と呼ばれる。

どちらかのキャリアが多いと、多い方のキャリアとの衝突で少ない方のキャリアはさらに減少するが、常に熱励起によって作られているため、無くなってしまうわけではない。平衡状態において多い方を**多数キャリア**といい、少ない方を**少数キャリア**という。どちらかのキャリアが多いといっても、逆極性の動かない電荷があることによって電氣的に中性になっている。nかpかというのは、動くことができる電荷のうち、正のものと負のもののどちらが多いかということに過ぎない。また、一時的に少数キャリアがどこかから供給され、少数キャリアの方が多数キャリアを上回ることもある。

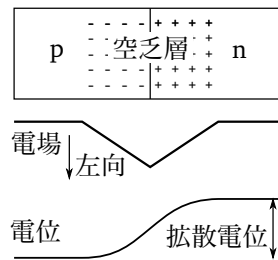
不純物半導体はキャリアがたくさんあるので、真性半導体に比べて電気伝導度が高い。しかし、真性半導体では不純物原子による電子の散乱が起きないので、外から注入された場合も含めて、電子はすばやく移動する(移動度が高い)。この性質は高速なトランジスタである HEMT を作るのに利用される。

磁場の中でキャリアが移動すると、キャリアの進路を曲げようとする力がはたらく。これは**ローレンツ力**である。ローレンツ力の向きは磁場の向きとキャリアによって流れる電流の向きとで決まるが、電極を設けて電位差を測ることによって、キャリアの電荷が正か負かを知ることができる。キャリアの濃度もこれでわかる。このような現象を**ホール効果**という。

7.3 pn 接合

n 型半導体と p 型半導体が密に接触しているのを **pn 接合**といい、電流は p から n へは流れやすいが、その逆へは流れにくい。このような作用を持つ素子を**ダイオード**という。流れやすい方向を順方向といい、流れにくい方向を逆方向という。また、順方向の場合に電流が入っていく側を**アノード**、電流が出てくる側を**カソード**という。カソードを記号で示す場合、C ではなく K を使うことが多い。

p 型領域にたくさんあるホールは、それが少ない n 型領域に熱運動によって広がって行こうとする。逆に、自由電子は n 型領域から p 型領域に熱運動によって広がっていく。これはキャリアの**拡散**である。こうなると、ホールと自由電子が混ざり合って消滅するため、境界面の両側にキャリアが殆ど無い「空乏層」が生じる。



pn 接合付近の電荷分布と電場と電位

空乏層の p 型領域はホールが無くなっているために負に帯電し、n 型領域は自由電子が無くなっているために正に帯電する。すると、拡散によるキャリアの移動が妨げられて平衡状態になる。この帯電の結果、n 型と p 型の間に電位差が生じる。この電位差を**拡散電位**といたり**ビルトイン・ポテンシャル**といたり、**接合電位**といたりする。シリコンの pn 接合ダイオードでは、拡散電位は 0.7 V 前後になっていることが多い⁴。

空乏層の電荷はイオン化した不純物の電荷であるので、不純物濃度が低いと空乏層内の電場が弱くなり、キャリアの拡散を抑えるのに広い空乏層が必要になる。そのため、不純物濃度が低いものほど空乏層は厚い。

順方向と逆方向

pn 接合ダイオードの n 型領域に対して p 型領域に正の電圧をかけると、拡散電位が打ち消されて電流が流れる。この状態を**順方向バイアス**という。しかし、逆方向に電圧をかけると、拡散電位を強める方向になり、空乏層が広がるだけで電流は流れない。この状態は**逆方向バイアス**という。逆方向バイアスでは、少数キャリアによって小さな一定の電流が流れるだけである。

ただし、逆方向電圧が大きくなると、空乏層を突き抜ける**トンネル電流**や、強い電場によって起こる**雪崩 (なだれ) 電流**が生じて、急に大きな電流が流れるようになる。トンネル電流は、波としての電子がエネルギー障壁を通過することによって生じる。雪崩電流は、電子が粒子として加速され原子に衝突してイオン化するために生じる。

トンネル電流による電流増大はツェナー効果、雪崩電流による電流増大はアバランシェ効果という。大きな電圧によって大きな電流が流れるので、最終的にはダイオードの破壊につながるが、ある電圧で急に電流が増大することを積極的に利用することもできる。そのような目的で作られるダイオードは、ツェナー・ダイオードとかアバランシェ・ダイオードといった名前と呼ばれる。

⁴ 拡散電位は、ゲルマニウムのダイオードでは 0.3 V 程度、青色で光る GaN 系発光ダイオードでは 3 V 程度である。

電圧・電流特性

比較的広い電圧の範囲で、電圧 V と電流 I は、次のショックレーの式を満たす⁵。

$$I = I_S \left(\exp\left(\frac{qV}{kT}\right) - 1 \right) \quad (7.3.1)$$

q , k , T は電子の電荷、ボルツマン定数、および温度である。常温では、 kT は約 26 meV であるから、 kT/q は約 26 mV である。 $V \ll -kT/q$ なら $I \cong -I_S$ となる。これは逆方向に流れる電流で、 V が変化してもほとんど変わらない。そこで、 I_S を **逆方向飽和電流** という。 I_S はダイオードの面積、不純物濃度などで決まるが、一般に温度上昇とともに大きくなる。それによって、順方向電流も温度上昇によって流れやすくなる。

順方向で $V \gg kT/q$ の場合は、 $I = I_S e^{qV/kT}$ となるから、 V が 26 mV 大きくなるたびに I は 2.718 倍になる。また、 I の V 微分は

$$\frac{dI}{dV} = \frac{I}{kT/q} \cong \frac{I}{26 \text{ mV}}$$

となる。これを微分コンダクタンスといい、その逆数を微分抵抗という。たとえば、電流が 1 mA だと微分抵抗は 26 Ω になる。微分抵抗と電流は反比例している。

$|V| \ll kT/q$ の場合は、ショックレーの式の中の指数関数は $(qV/kT) + 1$ で近似できるから、 $V/I = (kT/q)/I_S$ となる。つまり、小さい電圧では抵抗値 $(kT/q)/I_S$ の抵抗と同程度である。たとえば、逆方向飽和電流が 1 μA であれば、この抵抗は数十 k Ω であるが、逆方向飽和電流が 1 nA であれば、数十 M Ω になる。

ショットキー接合

金属と半導体の接合によって空乏層ができることがある。これはショットキー接合といい、これによってダイオードを作ることにもできる。これをショットキー・ダイオードという。

自由電子のエネルギーが比較的低い⁶金属と n 型半導体との接合面では、半導体側の自由電子が低エネルギーである金属の方に移り、半導体側に自由電子の無い正に帯電した空乏層ができ、金属側の接合面は負に帯電して、平衡状態になる。

⁵ もう少し一般的には、ショックレーの式の拡張版、 $I/I_S = \exp(qV/nkT) - 1$ が成り立つ。ここで、 n は「理想係数」といい、空乏層で再結合が起こり易い場合に 2 に近くなる。これは素子によっても電圧によっても異なる。

⁶ つまり仕事関数が多い。

この n 型半導体のショットキー・ダイオードでは、金属側がアノードになる。p 型半導体でもショットキー・ダイオードは可能だが、この場合は金属側がカソードになる。

ショットキー・ダイオードの接合電位は pn ダイオードよりも小さいのが普通である。典型的には、シリコンの pn 接合ダイオードでは 0.7 V 程度であるのに対して、ショットキー・ダイオードでは 0.2 V 程度である。ショットキー・ダイオードは接合電位が小さいために順方向電圧降下が小さい。

ダイオードに順方向に電流を流しておき突然逆方向に切り替えると、そのうち電流が流れなくなるが、それに要する時間を「逆回復時間」という。ショットキー・ダイオードの逆回復時間は pn ダイオードに比べて短い。この性質は高周波数や高速の信号を扱うのに適している。また、余計な電圧降下が小さく、余分な逆電流が流れる時間も短いので、エネルギーの損失が少ない。

7.4 バイポーラ・トランジスタ

最初のトランジスタは n 型ゲルマニウム基板に 2 本の金属針の先端をわずかに離して接触させた構造であった。これは点接触トランジスタという。トランジスタの記号や電極の呼び方はこの構造を反映している。点接触トランジスタのゲルマニウム基板を**ベース**といい、2 本の金属針の一方を**エミッタ**、他方を**コレクタ**という。

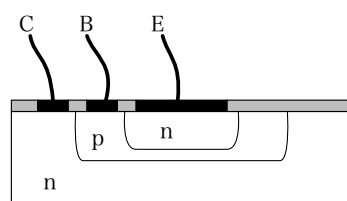
現在のバイポーラトランジスタは p 型と n 型半導体の 3 層構造に 3 つの電極を付けたものであり、ショックレーによって基本理論が作られた。3 層は順にエミッタ、ベース、コレクタと呼ばれる。pnp 型と npn 型がある。

バイポーラトランジスタのエミッタ側の接合に順電圧を加え、コレクタ側の接合に逆電圧を加える。エミッタ層からベース層に注入された少数キャリアがコレクタ層との接合面付近に拡散してくると、空乏層に捕まり、空乏層内の電場によってコレクタ層に吸収され、コレクタ電流になる。エミッタに流れる電流のどれだけの割合がコレクタ電流になるかを電流増幅率 α であらわす。これを 1 に近づけるため、ベース層は薄く作り、しかも不純物濃度を小さくする。こうすると、ベース層に空乏層が広がり、エミッタから注入されたキャリアが捕まえられやすくなる。

このように、 α がほとんど 1 になるように作られるので、コレクタ電流はエミッタ電流で決まり、コレクタ電圧の振幅が大きくてもその影響を受けない。そのため、電圧増幅率を大きくすることができる。これがトランジスタの増幅作用である。

製造技術に関しては、現在はシリコンのプレーナ型トランジスタが主流になっている。この技術の共通基盤は、高温水蒸気でシリコン表面に酸化膜を作ること、光化学反応や電子ビーム照射によって表面にマスクパターンを作ること、マスク

されていない酸化膜を薬品で溶かして取り除くこと(エッチング)である。これらの処理と、不純物の気体を半導体中に熱拡散させたり、気体状の半導体材料を供給して結晶をエピタキシャル成長させることを組み合わせて、1枚の基板に多数のトランジスタを作る。ダイオードや抵抗も同様に作られる。配線は真空蒸着によって半導体や酸化膜の上に金属膜を付けることで行われる。



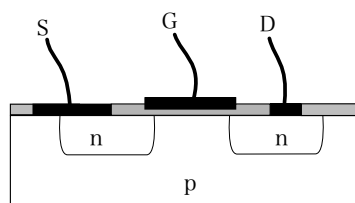
プレーナ型 npn トランジスタ

p 型シリコン基板の上に n 型の島を作り、p 型基板の方に負の十分高い電圧を加えておくと、基板と島とは電氣的に絶縁された状態になる。このようにして、1枚の基板上に作った多数のトランジスタを電氣的に絶縁した状態にすることができ、これらの間を金属で配線すると電子回路ができてしまう。これが現在の集積回路の技術になった。これはプレーナトランジスタの技術の延長である。これらの特許は両方とも 1959 年に申請された。

7.5 MOSFET

プレーナ型バイポーラ・トランジスタは基板表面に対して垂直な方向に電流を流すものであるが、基板表面に沿って横に電流を流すトランジスタもある。p 型基板の 2箇所にドナーを拡散させて n 型領域を作り、この 2つの p 型領域の間に電圧を加える。そのままでは電流は流れないが、n 型領域の間の p 領域表面に酸化膜を作り、さらにその上に金属膜を作っておき、金属の方に正の電圧をかけると、静電誘導によって p 領域表面に自由電子が集まって負に帯電する。この部分を**反転層**という。この反転層を通して電流が流れるのが、MOSFET である。

バイポーラトランジスタはベース電流とコレクタ・エミッタ電流が異なる 2種類のキャリアで担われるが、MOSFET の電流は 1種類のキャリアだけが担う。そのようなトランジスタを**ユニポーラ・トランジスタ**という。



MOSFET は metal-oxide-semiconductor field-effect transistor であり、金属と酸化膜と半導体でできていることと、静電場によって働くことを意味している。

電極の名称は、金属電極が**ゲート**、キャリアを供給する側の n 領域が**ソース**、キャリアを回収する側の n 領域が**ドレイン**である。基板表面は電流の通路という意味で**チャネル**と呼ばれる。p 型領域の表面が反転して n 型チャネルができるので、**nMOS** という。n と p を逆にして作ると、**pMOS** ができる。これはゲートに負の電圧をかけることで、ホールによる反転送ができるものである。

nMOS と pMOS のドレイン同士をつないで直列に接続し、ゲートには同じ電圧を加える。ゲート電圧によって n が ON になって p が OFF になったり、n が OFF になって p が ON になったりするようにできる。このとき、ドレイン電圧はマイナス側またはプラス側に偏るが、どちらの場合にも電流は流れない。この構造を **CMOS** という。C は complementary(相補的)の意味。CMOS は消費電力が非常に小さい。

MOSFET はバイポーラよりも構造が簡単である。また、静電的に動作するので消費電力を小さくできる。そのため高集積度の集積回路を作るのに適している。現在では大規模なデジタル集積回路のほとんどすべてが CMOS でできている。

なお、MOSFET はモスフェットと読むのがよい。

JFET

JFET は接合型 (junction)FET である。これはあらかじめ作られたチャネルの幅を pn 接合の逆バイアスによって制御するものである。n チャネル JFET の場合、p 型基板に n 層を作ってその両端をソース電極とドレイン電極にし、ソース・ドレイン間の n 型チャネルの上に p 型層を作ってゲートにする。ゲートに負電圧を加えると、空乏層が広がってチャネル幅が減少し、電流が流れにくくなる。JFET ではゲートが逆バイアスであるので、ここにはほとんど電流が流れない。JFET も電流を運ぶキャリアは 1 種類であるので、これもユニポーラ・トランジスタである。

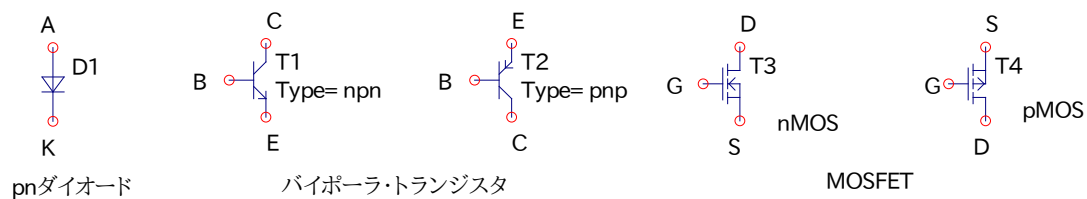
7.6 回路記号

下図は回路記号を上から下へ電流が流れるような向きに配置している。ダイオードは上が p 型 (アノード) で下が n 型 (カソード) である。三角形の記号は順方向の向きをあらわしている。

バイポーラトランジスタでは、B, E, C でベース、エミッタ、コレクタを示す。エミッタに矢印が付いていて、それでエミッタ・ベース間接合の順方向の向きをあらわしている。pnp トランジスタの記号は史上初のトランジスタの構造を反映

していて、現在のトランジスタの構造を反映していないが、歴史的な意味があるので使われ続けている。

MOSFETでは、G, S, Dでゲート、ソース、ドレインを示す。基板とドレインまたはソースの間にあるpn接合は、nMOSでは基板からドレイン・ソースに向けて順方向になっているし、pMOSではちょうどその反対である。MOSFETの記号の矢印はそのような意味だと考えればよい。MOSFETは基板とソースがつながっていることが多いので、シンボルでもそのように表現している。



練習: PN 接合において、電子の波動性と粒子性があらわれる現象にはそれぞれどのようなものがあるか？

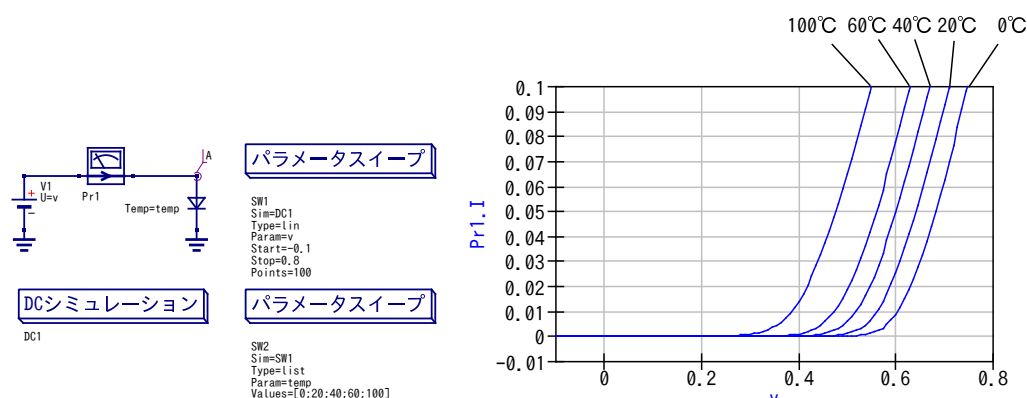
練習: 2つのノーベル物理学賞を獲得した唯一の人物は誰で、それらは何に対する賞であったか？

第8章 電子回路

8.1 pn接合の性質

pn接合を持った素子の種類は多い。これらはすべてよく似た電気的特性を持っている。

下図は pn 接合ダイオードの順方向の電流-電圧特性 (I-V 特性) の温度依存性である。この特徴を理解しよう。



ダイオードの I-V 特性と温度変化

電圧 V 、電流 I 、温度 T は関連しあっているから、これらの小さい変化 $\Delta V, \Delta I, \Delta T$ に対して、一次式 (平面の式) $a\Delta V + b\Delta I + c\Delta T = 0$ が成り立つ¹。 $C_{VT} = -c/(aV)$, $C_{IT} = -c/(bI)$ と置くと、

$$\frac{\Delta V}{C_{VT}V} + \frac{\Delta I}{C_{IT}I} = \Delta T \quad (8.1.1)$$

C_{VT} は I を固定して温度を 1 度変えた場合の V の変化の割合であり、 C_{IT} は V を固定して温度を 1 度変えた場合の I の変化の割合である。

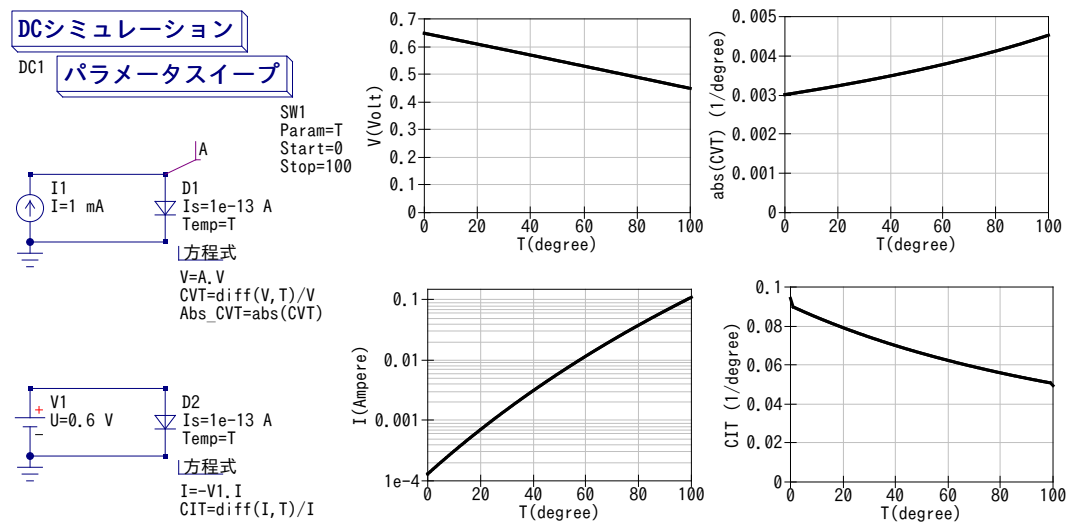
温度を固定して考えると、上のグラフでわかるように、ダイオードに 0.5 V 程度の電圧をかけるまでは電流はほとんど流れないが、電流が流れていれば、電圧が少し

¹ V, I, T の関係は適当な 3 変数関数によって $f(V, I, T) = 0$ と書ける。この式を微分すると、 $\frac{\partial f}{\partial V}dV + \frac{\partial f}{\partial I}dI + \frac{\partial f}{\partial T}dT = 0$ 。偏微分係数を a, b, c と書き、 d を Δ と書く。

変わるだけで電流が大きく変化する．ある点での接線の傾き $\Delta I/\Delta V$ は原点からその点に引いた直線の傾き I/V の数十倍になっている．すなわち， $\Delta I/\Delta V = k \times I/V$ と書くと， k の値は数十である．式 (8.1.1) で $\Delta T = 0$ と置いてみると， C_{IT} と C_{VT} の比と k の関係がわかる．

$$C_{IT} = -k \times C_{VT} \quad (8.1.2)$$

電流を一定とすれば，1度あたりの電圧変化は， -2.5 mV 程度であり，相対変化としては，1度あたり -0.3% 程度である．しかし，電圧を一定とすると，温度変化に対する電流変化ははるかに大きい．詳しく計算してみると，下図のようになる．



順方向の相対電圧温度係数 (右上) と相対電流温度係数 (右下)

温度変化だけではなく，部品の製造条件のばらつきによる個体差についても同じことが言える．したがって，**ダイオードに一定の電圧をかけても電流は定まらない**と考えるのが妥当である．

ダイオードに流れる電流を予測可能にするには，抵抗を介して電源につなげばよい．電圧源 E に直列抵抗 R を介してダイオードにつなぐとしよう．ダイオードの電流と電圧を I ， V とすると，

$$E = RI + V$$

が成り立つ．この式から， V の小さい変化 ΔV に対する I の相対変化を計算すると，

$$\frac{\Delta I}{I} = -\frac{\Delta V}{E - V} = -\frac{\Delta V}{V} \frac{V}{E - V}$$

となる．よって， I の相対変化が(絶対値として) V の相対変化以内に収まるには， $E \geq 2V$ であればよい． V の値は I の値のオーダーでほぼ決まるから， E の条件も判明する． E を決めれば，はじめの式によって R を決めることができる．

8.2 トランジスタ増幅回路

ダイオードの I - V 特性は比例関係ではない．バイポーラ・トランジスタのエミッタ-ベース間電圧 V とエミッタ電流 I の関係もダイオードと同様であり，比例関係ではない．しかし，電流と電圧の小さな変化 ΔI , ΔV ならほとんど比例していると言ってよい．信号をトランジスタの電流と電圧の小さな変化として処理することで，入力信号と出力信号の比例関係が得られる．

8.2.1 動作点

比例係数 $\Delta I/\Delta V$ は変化の基点をどこに置くかで異なる．たとえば， $I = 1\text{mA}$ のところを基点にすると，多くのトランジスタ(やダイオード)の場合，微分抵抗 $\Delta V/\Delta I$ は 26Ω ぐらいであるが， $I = 2\text{mA}$ なら $\Delta V/\Delta I$ は 13Ω ぐらいになる．この動作の基点のことを**バイアス点**，あるいは動作点という．

トランジスタ増幅回路で安定なバイアス点を得るには，前節でダイオードについて検討したのと同じく，余分の電圧を持った電圧源と直列抵抗を使えばよい．ベース電流に対するエミッタ電流の比は電流増幅率 β というが，これは製造技術による個体差が非常に大きいし，温度による変化も大きいので，ベース電流を決めてもエミッタ電流を十分正確に予測することはできない．そこで，直列抵抗はベースではなくエミッタにつなげる．トランジスタのベース-エミッタ間をダイオードとみなし，これがエミッタにつながれた抵抗を介して電圧源につながっているとすれば計算ができる．

コレクタ-ベース間にはいくらかの電圧をかける必要があるが，コレクタ電圧の変化はコレクタ電流にあまり影響しないので，コレクタ回路に比較的大きな抵抗が入っても影響は少ない．また， β が100倍程度あるため，ベース電流はエミッタ電流に比べて非常に小さいので，ベースに比較的大きな抵抗が入っても影響は少ない．

8.2.2 入出力の結合

バイポーラトランジスタによる増幅回路の3つの基本パターンは，ベース接地型，エミッタ接地型，およびコレクタ接地型である．これらは，入力信号をトラ

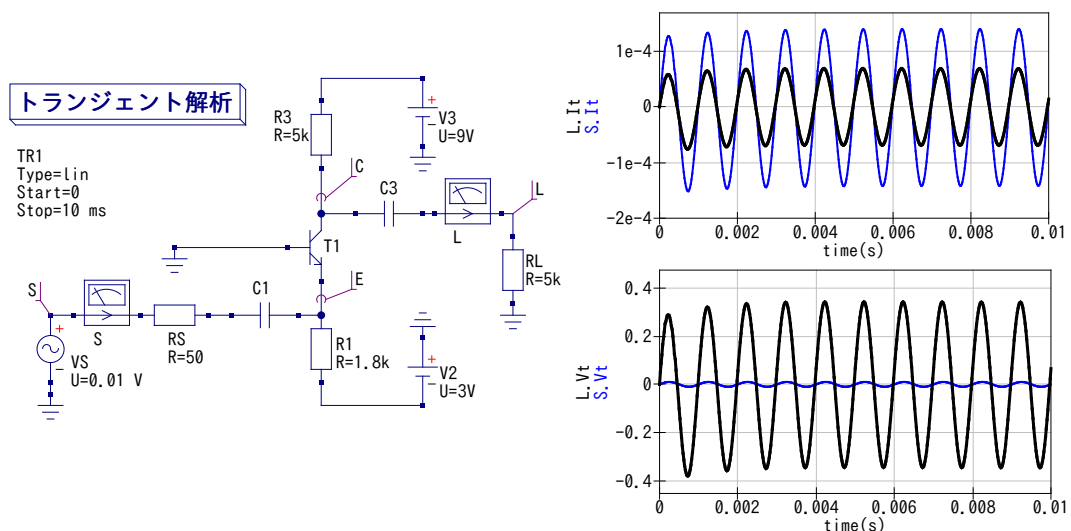
ンジスタのどこに加え、出力信号をトランジスタのどこから取り出すかが違う。

入力信号を伝えたり、出力信号を取り出す方法としては、コンデンサーによる「容量結合」がよく使われる。これらのコンデンサーは「結合コンデンサー」、あるいは「カップリング・コンデンサー」と呼ばれる。コンデンサーは交流電流しか通さないで、容量結合ではトランジスタの電流や電圧の変化だけが通過する。

他に「トランス結合」がある。トランスも交流しか伝えることができないのだが、それに加えて、トランスでは巻き数の比によって電圧、電流の変換ができる。

直流信号の増幅には直流結合が必要であるが、これについては「OP アンプ」の節で説明する。

8.2.3 ベース接地



ベース接地増幅回路，入出力電流 (上) と入出力電圧 (下)

ベース接地ではエミッタ側が入力，コレクタ側が出力になる。上の回路では，入力信号源を開放電圧 V_S と等価抵抗 R_S であらわし，出力負荷を抵抗 R_L であらわしている。

0.7V ぐらいのベース-エミッタ間電圧と，1.8k の抵抗にエミッタ電流が流れることによる電圧降下を 3V の電圧源が供給していると考えれば，エミッタ電流は $(3 - 0.3)V / 1.8k$ で計算できて，1.3mA ぐらいになる。すると，エミッタの微分抵抗は 20 ぐらいである。

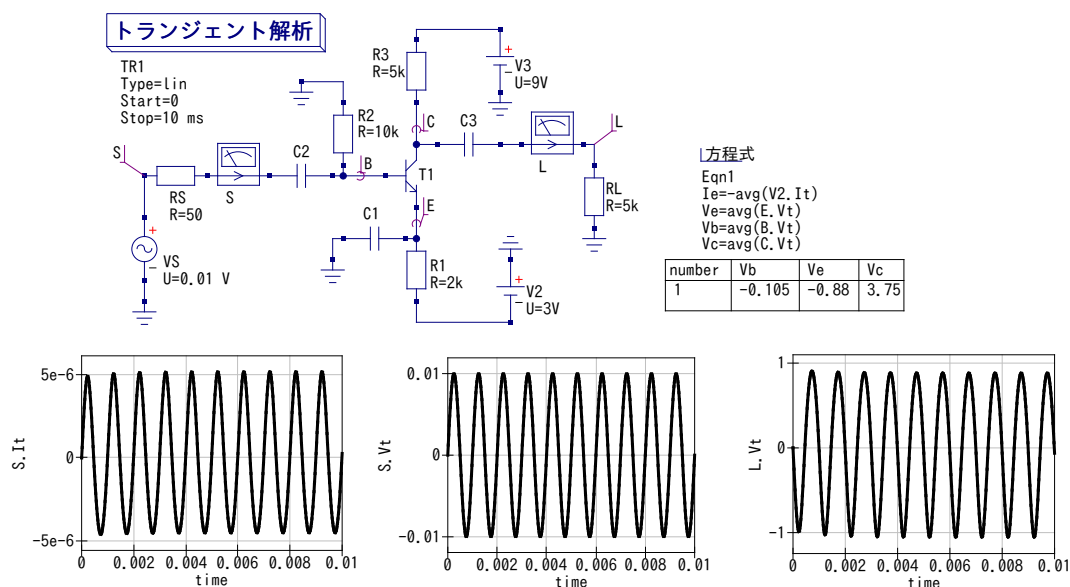
エミッタ微分抵抗に比べて R_1 はひじょうに大きいので，入力信号電流はすべてエミッタへ流れ，トランジスタの α がほとんど 1 なので，この電流はそのままコ

コレクタ電流の振幅になる。この電流振幅はコレクタ回路に挿入された抵抗 R_2 と負荷抵抗 R_L とに分割されるため、電流増幅率は 1 よりも小さくなる。それでも、出力電圧 $L.Vt$ の振幅は V_S の 30 倍以上あるので、電力的には増幅ができています。コレクタ抵抗 R_3 の値は、コレクタ電圧が電源 V_3 の電圧の半分程度になるように決めればよい。

結合コンデンサは交流しか通さないで、ハイパスフィルタになる。カットオフ周波数は、結合コンデンサのキャパシタンスと、同じ信号経路に入っている抵抗の抵抗値とで決まる。この関係は、 $2\pi\nu CR = 1$ である (ν : 周波数, C : キャパシタンス, R : 合成抵抗)。

8.2.4 エミッタ接地

ベースから入力信号を入れる場合は、入力電流が $1/\beta$ 倍になるので、増幅器の入力インピーダンスがベース接地の場合の β 倍になる。 β は 100 程度あるので、大きな電流増幅作用が得られる。また、ベース接地回路では入力と出力は同位相であるが、エミッタ接地では逆位相になる、

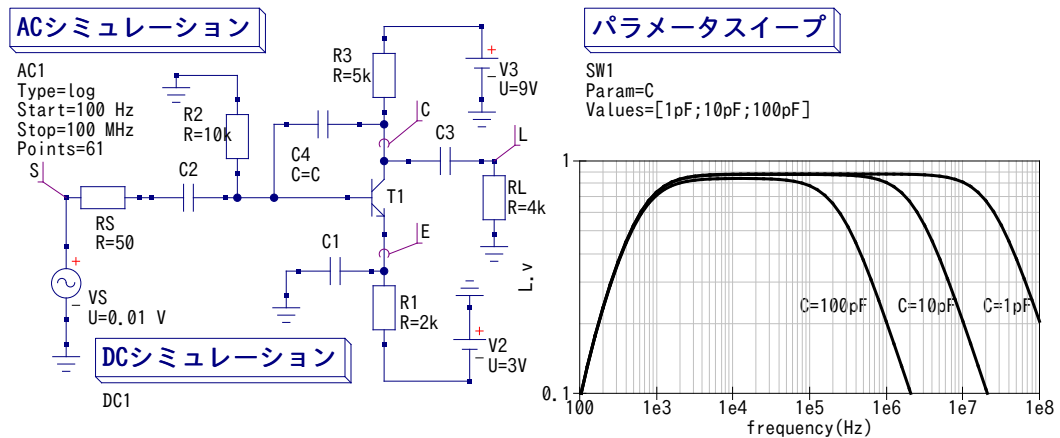


エミッタ接地増幅回路，入力電流，入力電圧，出力電圧

エミッタ接地回路では、ベースから信号を入力するためにベース-グラウンド間に抵抗 (R_2) を入れる。トランジスタのベース電流を供給するルートになるので、この抵抗とベース電流の積によってベース電圧が下がる。この抵抗値をあまり大

きくすると、バイアス電流を維持することができなくなる。しかし、この抵抗はトランジスタの入力と並列に入っているため、抵抗値が小さいと、増幅器の入力インピーダンスが下がり、信号の損失が増える。

エミッタ接地回路では、エミッタの電圧振幅をゼロにするために、エミッタとグラウンドの間にコンデンサを入れる。これは信号電流をグラウンドに向けて通過させるので、**バイパス・コンデンサ**という。このコンデンサはエミッタの微分抵抗とでハイパスフィルタになる。エミッタの微分抵抗は比較的小さいので、エミッタのバイパスコンデンサのキャパシタンスはベースやコレクタの結合コンデンサに比べて大きいのが普通である。



ミラー効果のあるエミッタ接地増幅回路，周波数特性

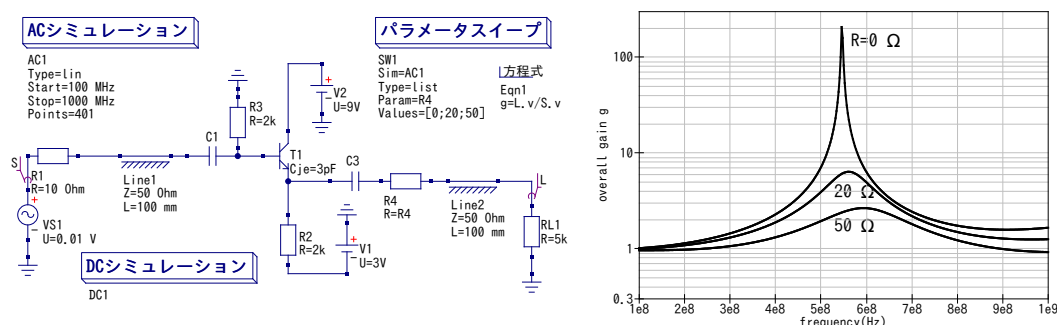
エミッタ接地回路は大きいゲインを持つものの、高い周波数ではゲインが低下しやすい。これは反転増幅器であることと、コレクタとエミッタの間のpn接合がコンデンサとして働くことによって起こる。高い周波数の信号はこのコンデンサを通して出力から入力へフィードバックされるために、ゲインが低下する。上の図は、pn接合のキャパシタンスをコンデンサで表現し、そのキャパシタンスによる周波数特性の違いを見たものである。ゲイン低下のカットオフ周波数は、 $1/(2\pi(1-G)CR)$ である ($G < 0$)。ここで、 G は増幅器の電圧ゲイン、 C はフィードバック・キャパシタンス、 R は入力側の信号源抵抗や入力インピーダンスの合成抵抗の値である。 $|G|$ が大きいとカットオフ周波数が低くなる。このような現象を**ミラー効果** (Miller effect) という。

8.2.5 コレクタ接地

コレクタ接地回路では、ベースへ入力し、エミッタから出力する。電圧増幅率はほとんど1である。そのため、この回路は**エミッタ・フォロワー**とも呼ばれる。

エミッタ電圧がベース電圧にしたがって変化するので「フォロワー」である。コレクタ接地回路には、負荷のインピーダンスの β 倍が入力インピーダンスになるという性質がある。そのため、電流に関しては大きな増幅率が得られる。電圧増幅率はほぼ1である。

コレクタ接地回路は高い周波数領域で不安定になりやすい回路として知られている。入力や出力に長いケーブルを直接つなぐと、数百MHzの周波数で発振が起こり、正常な動作をしなくなることがある。ケーブルでの信号の反射による共振と、ベース-エミッタ間キャパシタンスによるフィードバックのために、意図しない発振が起こるのである。



コレクタ接地増幅回路のケーブルによる不安定化と抵抗による安定化

上の回路では、入力も出力も10cmのケーブルでつながっている。直列抵抗R4がゼロだと、550MHzのところで鋭いピークが現れている。このような場合、実際には発振が起こる。しかし、数十 Ω のR4を入れてやると、ケーブルの共鳴によるゲイン上昇が見られるだけで、発振は抑えられる。このように、コレクタ接地回路では、抵抗によって損失を増やして不安定動作を抑制する。抵抗はエミッタ側に入れることもあるしベース側に入れることもある。フェライトビーズは交流損失が大きい磁性体の中に配線を通したものであり、高周波交流電流に対して抵抗として働くので、これも不安定動作の抑制に使われる。

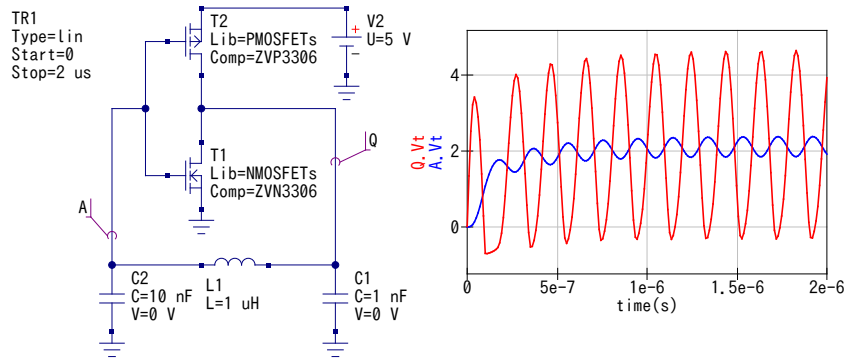
フェライトビーズや抵抗で安定化した場合でも、ケーブルの長さや負荷インピーダンスによってゲイン-周波数特性が変わり、高い周波数までフラットな特性を得ることはできない。そこで、高速信号を扱う回路では、ケーブルの特性インピーダンスと信号源抵抗や負荷抵抗を合わせることによって共振を防ぎ、フラットな周波数特性を得る。

8.3 発振回路

発振回路は一定周波数の交流信号を発生する回路である。周波数を決めるために、インダクターとコンデンサーの時定数や、抵抗とコンデンサーの時定数を利

用する。また、振動を持続させるために増幅器を使う。

トランジェント解析

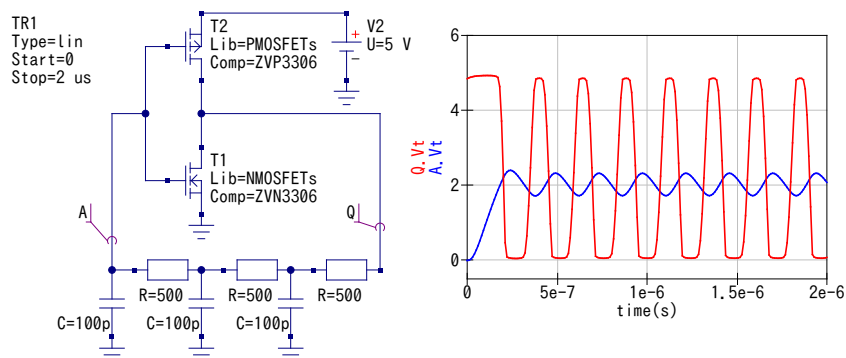


LC 共振回路と反転増幅器による発振回路

上図の発振回路では、CMOS の反転増幅器の出力を LC 共振回路を通して入力にフィードバックしている。LC 共振回路の途中に図のように入り口と出口を設けると、共振周波数に近いところで入り口と出口の位相が反転するので、トータルでポジティブ・フィードバックになって、発振が起こる。発振周波数は共振周波数 $1/(2\pi\sqrt{LC})$ に近い。C は 2 つのコンデンサの直列キャパシタンスである。

なお、この反転増幅器のバイアスは、インダクタを通した直流電圧のネガティブ・フィードバックによって保たれている。バイアス点の電圧は電源電圧のほぼ半分である。

トランジェント解析



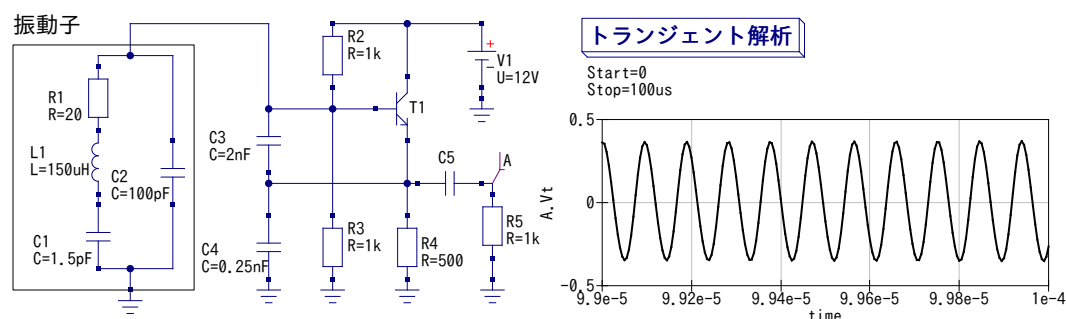
CR 位相シフト回路と反転増幅器による発振回路

上図では、抵抗とコンデンサによるローパスフィルターで位相を遅らせている。位相を 180 度遅らせるため、3 段のローパスフィルターが必要である。発振周波数

の計算は複雑だが、 $1/(2\pi CR)$ で大雑把な見積りができる。この回路では、3本の抵抗を通した直流電圧のネガティブ・フィードバックによってバイアスが保たれている。

音叉のような機械振動子を利用すると、安定した正確な周波数の信号源が得られる。機械振動と電気振動をつなぐには、強誘電性固体の**ピエゾ電気効果** (圧電効果) がよく使われる。電場による誘電分極と圧力による歪みが独立ではなく混ざり合うのがピエゾ電気効果である。よく利用されている物質としては、**石英** (水晶)、**PZT** (チタン酸ジルコン酸鉛)、**PVDF** (ポリフッ化ビニリデン) がある。これらは、さまざまなアクチュエーターやセンサーに利用されている。

ピエゾ電気効果のある固体に電極を付けて瞬間的に電圧を加えると、機械的な減衰振動が起こって振動電流が発生するので、電気的にはLC共振回路と同じである。硬い固体の機械振動の共鳴はLC回路の共鳴に比べて周波数幅が狭い。水晶では、結晶から振動子を切り出す向きと振動のモードによって、共鳴周波数の温度変化を小さくすることができる。水晶振動子は、通常的环境中で 10^{-5} 程度の周波数安定度がある²。下図はピエゾ振動子の電氣的等価回路による発振回路の計算例である。



振動子によるクラップ型発振回路

8.4 論理回路

論理回路は、電圧が何ボルトであるかではなく、電圧が高いか低いかという違いだけに基づいて働く。論理回路には演算をおこなう機能と、電圧レベルの違いを保持する機能が必要である。論理演算はダイオードやトランジスタのスイッチ作用によっておこなうことができる。レベル保持はトランジスタの増幅作用によって実現される。

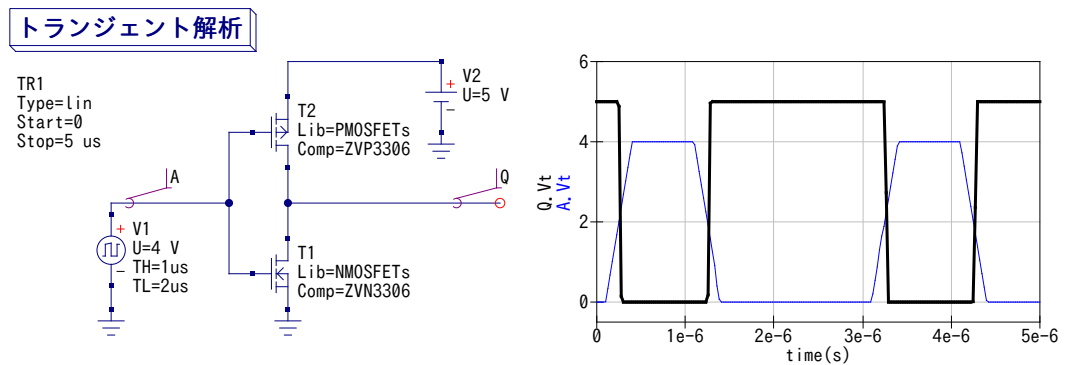
² 温度変化や経年変化による周波数のずれの最大値を周波数で割った値のこと。

電圧が高い状態と低い状態を H と L であらわす.

8.4.1 基本論理回路

インバーター

「インバーター」は論理反転の回路であり，HがLになり，LがHになる．これはNOTゲートともいう．エミッタ接地やソース接地型増幅器は入力反転して出力にあらわれるので，インバーターとして使われる．ただし，直流が通らなければならないので，コンデンサーは使わず直流結合にする．下図はCMOSインバーターである³．振幅が小さく変化も遅い入力信号が，反転され，整形されて出力されている．出力の振幅は電源電圧と同じになり，変化も速くなっている．



CMOS インバーター (NOT ゲート) による反転と整形

インバーターの論理式は次のように書かれる．

$$Q = \overline{A}$$

上にバーを書いて「反転」をあらわす．プログラミング言語では!(エクスクラメーション)を前に付けて $Q = !A$ と書いたり，NOTA のように書いたりする．数学で使われる論理否定記号で $\neg A$ と書いたりしてもよい (!や $\neg$ は「ノット」と読む)．

バッファ

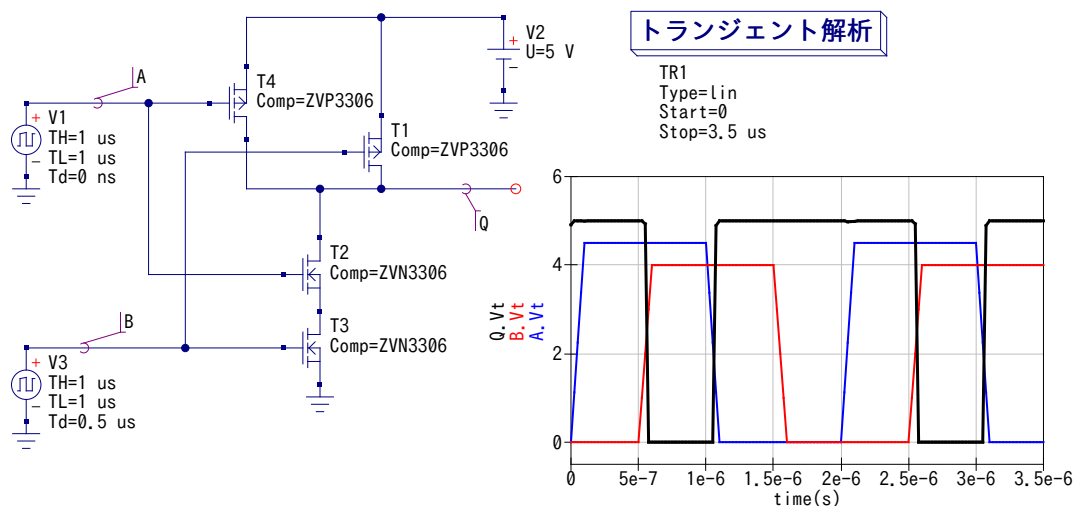
これは入力そのまま出力になる回路であるが，信号の整形をおこなう意味がある．インバーターを2段つなぐとバッファになる．

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad \neg\neg A = A, \quad !!A = A$$

³CMOS が最も多く使われる．CMOS は，NMOS と PMOS が互い違いに ON-OFF をおこなうことと，ゲート電流がほぼ 0 であることから，消費電力が小さい

AND 回路, NAND 回路

AND 回路は複数の入力のすべてが H であるときのみ出力が H になる回路であり，NAND 回路は複数の入力のすべてが H であるときのみ出力が L になる回路である．下図は CMOS の NAND 回路である．入力 A, B の両方が H の時に，直列になった NMOS トランジスタが両方共 ON になり，並列になっている PMOS トランジスタは両方共 OFF になり，その結果，出力 Q がグラウンド電位になる．どちらかの入力が L の場合は，直列 NMOS トランジスタのどちらかで経路が OFF になり，並列 PMOS トランジスタはどちらかが ON になって，出力 Q の電圧は電源電圧と等しくなる．



NAND ゲート，両入力が H のとき出力は L

AND は NAND の出力に NOT をつないで作ることができる．

AND 論理は

$$Q = AB$$

とあらわす．数学では，演算子として $\wedge$ がよく使われる．プログラミング言語では $\&$ や AND も使われる．

NAND は

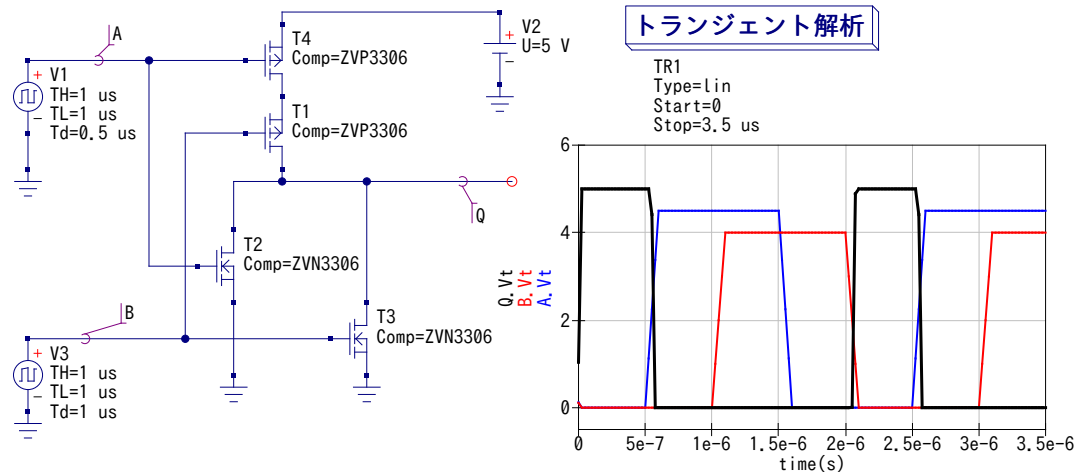
$$Q = \overline{AB}$$

である．! や $\neg$ を使うなら， $!(AB)$ や $\neg(AB)$ のように，括弧が必要になる．

OR 回路, NOR 回路

一つ以上の入力があるときのみ出力が H になるのを OR 回路という⁴。NOR 回路は、一つ以上の入力があるときのみ出力が L になる回路である。

下図は CMOS の NOR 回路である。A, B の両方が L の時に出力 Q は H になる。



NOR ゲート, 両入力が L のとき出力は H

OR 論理は

$$Q = A + B$$

とあらわす。+ のかわりに V や | や OR を使うこともある。

組み合わせ論理

NOT, AND, OR は「基本論理ゲート」である。これらのゲートのルールを組み合わせれば、どんな論理演算でもできる。この仕組みを「ブール代数」という。普通、H と L のかわりに 1 と 0 を使うが、これは「論理値」であって、普通の数とは異なるから、計算の規則も普通の数とは異なる、たとえば、OR ゲートに H と H を入力すると出力は H になるのだから、 $1+1=1$ である⁵。

基本論理ゲートから導かれる演算規則のうち、特徴的なものを並べておこう。A,

⁴ OR 回路は、「すべての入力が L であるときのみ出力が L になる回路」といいかえることもできる。

⁵ $1 \vee 1 = 1$, $1 | 1 = 1$, あるいは $1 \text{ or } 1 = 1$ と書く方が違和感が少ないかもしれない。

B, C を論理値とする.

$$\begin{array}{lll}
 AA = A & A + A = A & \text{冪等則(重複の消去)} \\
 A + (AB) = A & 1 + A = 1 & \text{吸収則(弱い条件への吸収)} \\
 (A + B)C = (AC) + (BC) & (AB) + C = (A + C)(B + C) & \text{分配則} \\
 \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B} & \overline{A + B} = \overline{A}\overline{B} & \text{ド・モルガンの法則}
 \end{array}$$

論理値の組み合わせによって結果が決まるような回路を構成するには、まず**真理値表**を作るとよい。これは入力値のすべての組み合わせに対応する出力値の表である。

1桁の2進法の足し算ができる回路を作ってみよう。これは「半加算器」という。 A と B を1桁の2進数とし、それらの和の1けた目を S , 2けた目を C とする。

A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	1	1	0
1	0	0	1

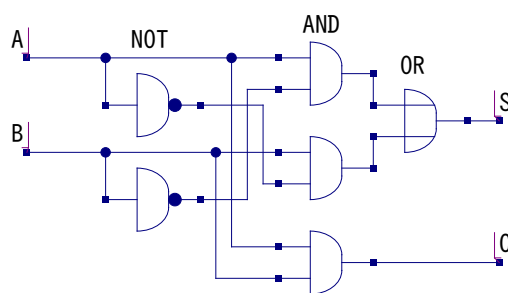
A, B, C, S はそのまま論理値に読み替える。 C が1になる組み合わせを見ると、 $A = B = 1$ だけであるから、

$$C = AB$$

また、 S が1になる組み合わせを見ると、 $A = 0$ かつ $B = 1$ と、 $A = 1$ かつ $B = 0$ があるが、これらは $\overline{A}B = 1$, $A\overline{B} = 1$ と同じであるから、

$$S = \overline{A}B + A\overline{B}$$

以上の結果をそのまま回路図にすると、下図のようになる⁶。



半加算器

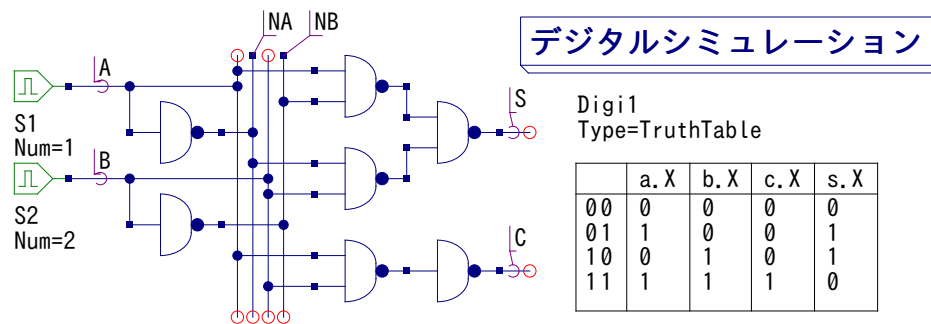
⁶ この図に使っている3種類のゲートのシンボルはドイツ工業規格で決められているものである。これはアメリカのANSI規格のシンボルに似ている。日本のJIS工業規格のシンボルはIEEE国際規格と同じであり、こちらはANSIなどとは全く異なる。教科書や国家試験の問題ではANSIとJISの両方の記号が出てくる。QUCSではドイツのDIN規格とIEEEの記号が使えるが、ANSIの記号は無いようである。

このように、組み合わせ論理は NOT と AND と OR の 3 層で構成することができる。

ド・モルガンの法則は $X + Y = \overline{\overline{X} \overline{Y}}$ のようにも書けるから、

$$S = \overline{AB} + \overline{A}B = \overline{\overline{\overline{AB}} \overline{\overline{A}B}}$$

となり、NOT と NAND だけになる。また、 $C = AB = \overline{\overline{AB}}$ だから、こちらも NOT と NAND だけになる。これを回路にすると下図のようになる。



NOT と NAND による半加算器

NOT は 1 入力の NAND とみなすことができるから、すべて NAND ばかりで回路ができてしまうのである。逆に、NOR ばかりで構成することもできる。NAND と NOR は少ないトランジスタで構成できるので都合が良い。

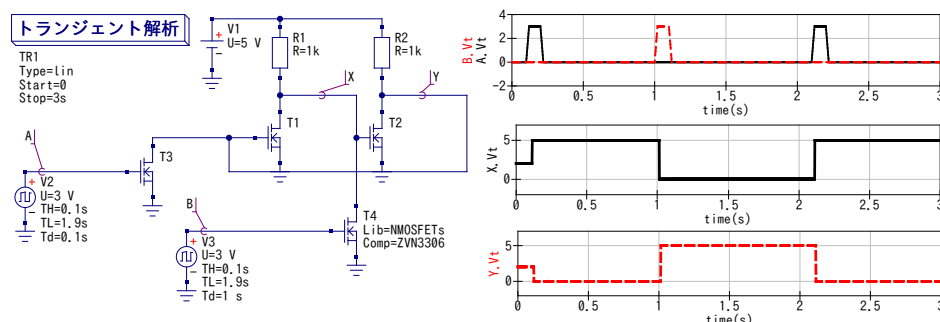
なお、1 桁加算器の S を得る部分は XOR, 「排他的論理和」という。OR との違いは、2 つの入力が 1 の場合に出力が 0 になることである。

練習: 次の式が成り立つことを示し (真理値表を作るか、ド・モルガンで変形する), XOR 回路を 4 つの NAND で構成せよ。1 つのゲートの出力を複数のゲートの入力につなぐのは構わない。

$$\overline{\overline{AB} A} \overline{\overline{AB} B} = \overline{AB} + \overline{A}B \quad (\text{別の書き方: } !(!(AB) A) !(AB) B) = !A B + A !B$$

8.4.2 順序回路

バッファの出力を入力にフィードバックすると、はじめに出力が H なら以後も H を保持するし、L なら L を保持する。この状態を外部信号によって変えることができるようにすると、メモリーになる。このような回路は「内部状態」を持っていて、外部入力によって内部状態が変わる。また、外部入力と同じでも、内部状態によって出力が異なる。このような回路を順序回路、あるいは順序論理回路という。

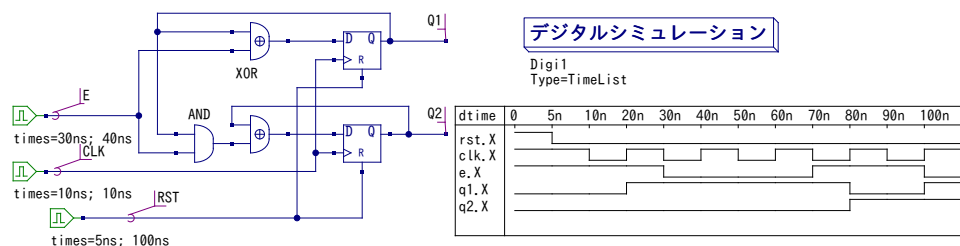


フリップフロップ (RS-FF)

上図では、2つの NMOS インバーター (T1, T2) によるバッファがフィードバックループを構成していて、別のトランジスタ (T3, T4) によって、状態を切り替えることができるようにしてある。入力 A が H になると、T3 が ON になり T1 を OFF にする。その結果、X 点が H、Y 点が L になり、この状態は A が L になっても持続する。入力 B も同様の作用をし、X 点を L、Y 点を H にする。このような回路を**フリップフロップ**という。これは「ぎっこんばったん」という意味。このタイプのフリップフロップは、特に、「セット・リセット・フリップフロップ」、あるいは「RS-FF」などと呼ばれる。

各種のフリップフロップのうち、重要なのは **D-FF** である。D-FF には、最低限、D 入力と CLK 入力と Q 出力があり、CLK 入力が L から H に遷移するたびに D 入力が記憶されて Q に出力される。デジタル回路には「同期式」と「非同期式」があり、同期式では、回路の内部状態が一定周期の「クロック信号」によってのみ変化する。D-FF は同期式回路の内部状態を記憶するために使われる。 n 個の D-FF によって、最大 2^n とおりの内部状態を保持することができる。これらの D-FF の出力と外部入力を組み合わせ論理回路に通して、すべての D-FF の D 入力に戻してやると、同期式論理回路ができる。

下図は2ビットカウンタであり、CLK 入力が L から H へ遷移するたびに、出力 (Q2, Q1) の値が $00 \rightarrow 01 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 00$ のように変化する。ただし、E 入力が 0 の場合は変化しない。



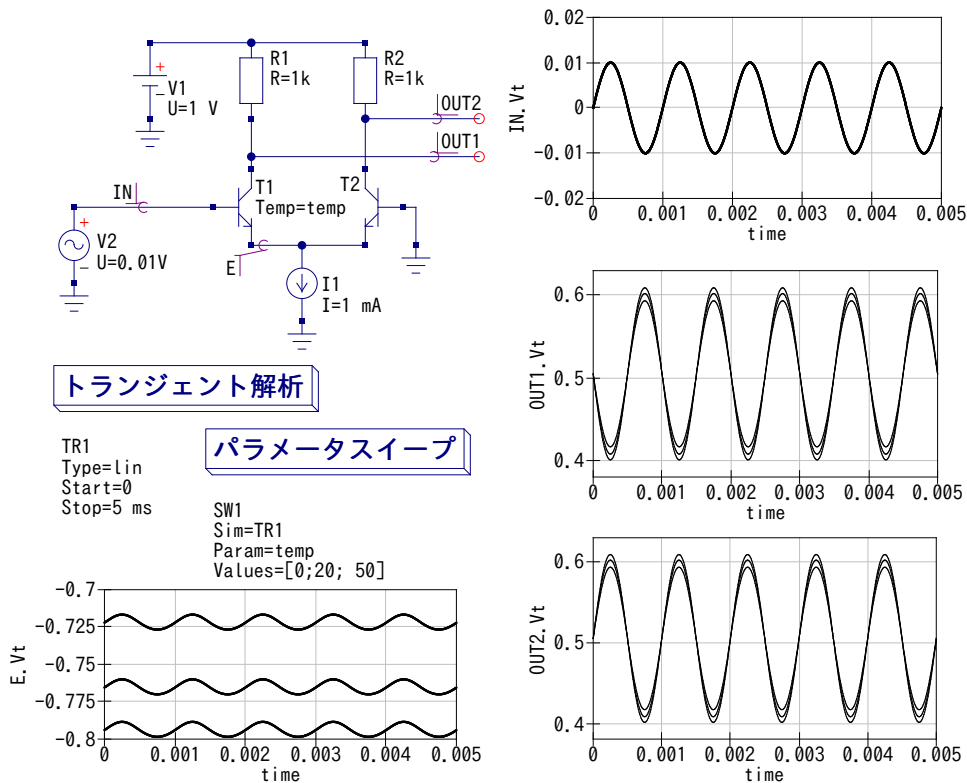
D-FF による 2 ビットカウンタ

D-FF の CLK 入力は、図のように、くさび形であらわされることが多い。D-FF の R 端子はすべての FF にリセットをかけて $Q = 0$ にするために使われる。

8.5 OP アンプ

差動増幅回路

交流増幅回路と違い、直流増幅回路ではゼロ点のずれが問題になる。温度変化によってトランジスタの動作条件が変わっても、ゼロ点のずれが起こらないようにすることができる。よく使われるのは、**差動増幅器**という構成である。これは2つのトランジスタが逆位相で動作するようにしたものであり、電圧や電流の差を信号として扱う。2つのトランジスタの動作点のずれが同じ向きに同じ大きさで生じるなら、差にはずれがあらわれない。



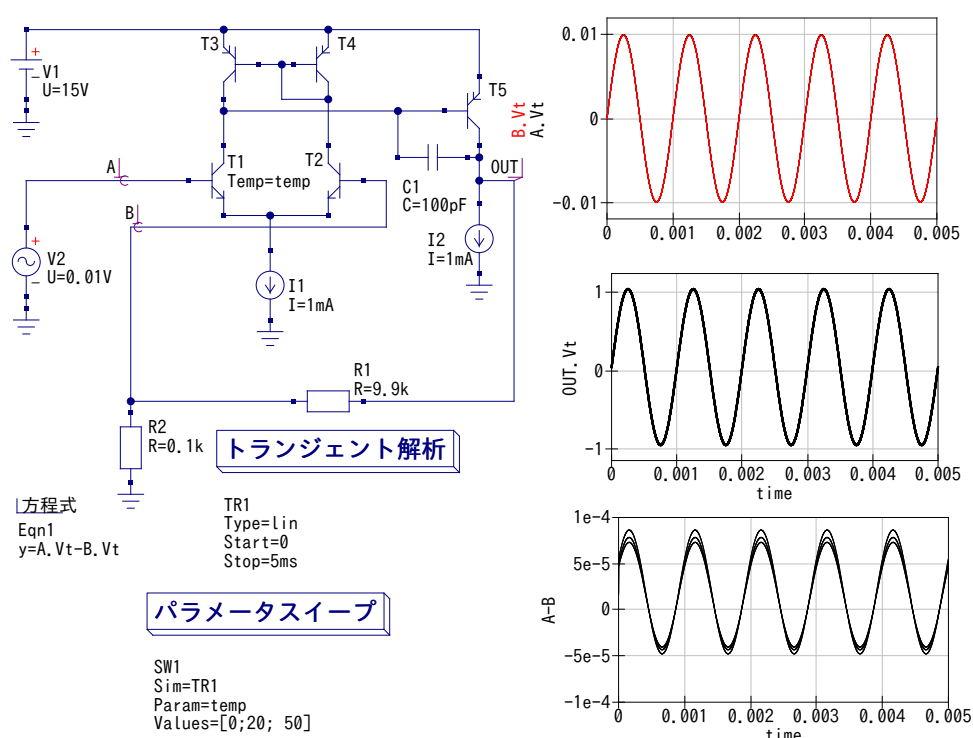
差動増幅回路の温度変化

上の回路では、トランジスタ T1, T2 のエミッタが1つの定電流源につながっているので、T1, T2 の電流はちょうど逆向きに変化する。入力電圧が0のときは、2つのトランジスタの電流は1:1になるので、OUT1 と OUT2 の電圧の差は0になる。ここがゼロ点である。温度が変わると、エミッタ電圧 (E.Vt) がずれるが、ゼロ点はずれない。このような回路では、2つのトランジスタの温度差や特性の違いを最小限にするため、1つのシリコン基板に複数のトランジスタが入っている複合素子が使われる。

温度が 50 度ほど高くなると、差動増幅器のゲインは 10% 程度小さくなっているが、これはネガティブ・フィードバック (負帰還) によって解決できる。

フィードバックによる安定化

下図の回路は、差動増幅器にもう 1 段の増幅器を追加して増幅率を上げ、抵抗ネットワークによるネガティブ・フィードバックを使って、ゲインを 100 倍に安定化したものである。



ネガティブ・フィードバックによるゲイン安定化

A 入力と B 入力の電位差が差動増幅器で増幅され、さらに 2 段階アンプで増幅されて OUT に出てくる⁷。2 段階アンプは出力電圧の範囲をマイナス側に拡大する役割もある。A-B 間の電圧振幅は温度によって異なるが、65μV 前後である。OUT の振幅は 1V であるから、増幅器の生のゲインは 15000 倍前後である。A 入力の振幅は 0.01V だから、A 入力に対するゲインはちょうど 100 倍になっていて、温度変化の影響を見ることはできない。

⁷ トランジスタ T3, T4 は「カレント・ミラー」と呼ばれる回路になっている。これは 2 つの経路の電流の差を取り出すものである。コンデンサー C1 は、高い周波数でのゲインを落とすことによって、不安定な動作や発振を防ぐ。

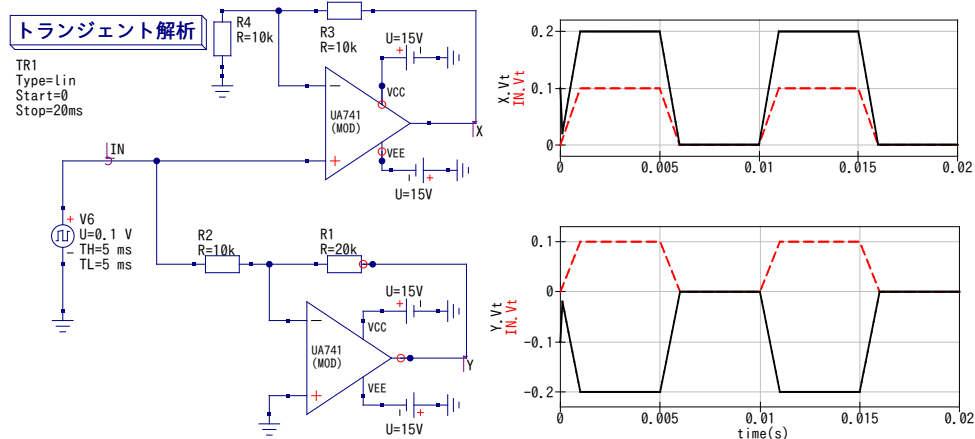
R1 と R2 による抵抗ネットワークは OUT の電圧の 1/100 倍を B 入力へフィードバックしている。ネガティブ・フィードバックはバランスを取る方向に働き、しかも生のゲインが非常に大きいため、A 入力と B 入力との差は非常に小さく保たれる。その結果、総合ゲインが 100 になるのである。

フィードバック回路を除いた生の高ゲイン差動増幅器は **OP アンプ** という。「オペアンプ」と読む。正確には、演算増幅器、あるいは operational amplifire である。これはアナログ演算回路の基本要素であり、外部にいろいろな部品を付けることによって、さまざまな機能を持った回路ができる。上で説明したのは「非反転増幅回路」である。

OP アンプ回路

アンプの回路記号には三角形がよく使われる。1つの底辺に入力端子を設け、対抗する頂点に出力端子を設ける。電源など、その他の端子も必要に応じて付け加えられる。OP アンプには非反転入力と反転入力の2つの入力がある。非反転側には +, 反転側には - を書いて区別する。

非反転増幅器と反転増幅器



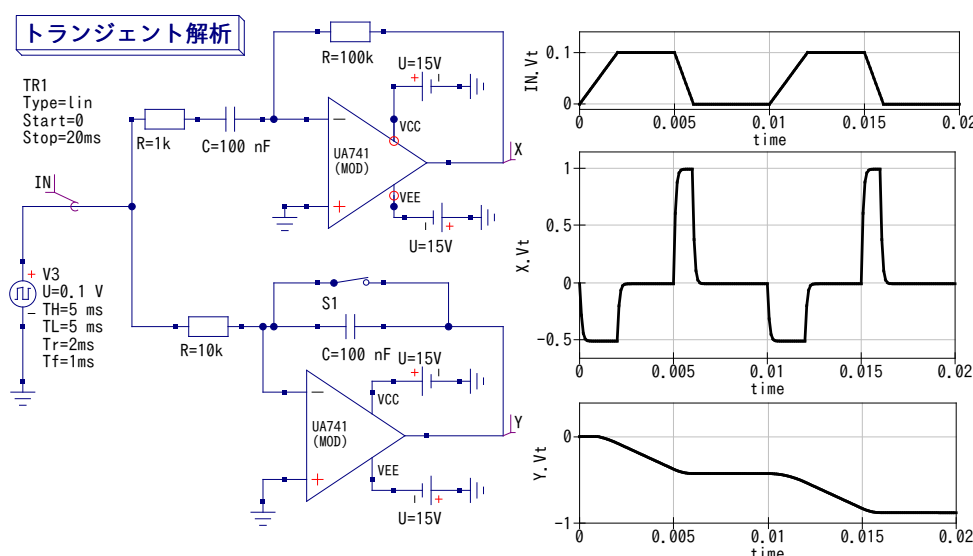
ゲイン 2 の非反転増幅回路 (上) とゲイン -2 の反転増幅回路 (下)

OP アンプにネガティブ・フィードバックがかかっているときは、非反転入力と反転入力の電位差が 0 になるように出力電圧が自動的に調整される。上の反転増幅回路では、入力電圧を x 、出力電圧を y とすると、2つの抵抗に流れる電流は等しいから、 $(x - 0)/R_2 = (0 - y)/R_1$ 。よって、 $y = (-R_1/R_2)x$ となる。

y への寄与は x 以外にもあって誤差になる．反転入力へ流れこむ電流 I_- による寄与は $R_1 I_-$ となる．また，ゼロ点のずれ V_- による寄与は $(1 + R_1/R_2)V_-$ となる． I_- は「入力バイアス電流」， $-V_-$ は「入力オフセット電圧」という．

微分回路と積分回路

下図は，微分回路と積分回路に台形の電圧波形を入力した場合の出力電圧波形を示している．



ゲイン $-10ms$ の微分回路 (上) とゲイン $-1ms^{-1}$ の積分回路 (下)

OP アンプの $-$ 入力の電圧と電流を 0 として計算すれば，これらの回路の入力電圧と出力電圧の関係がわかる．微分回路の入力 V_1 と出力 V_2 の関係は，($1k$ の抵抗を無視して計算すると) 次の式であらわされる．

$$V_2 = -CR \frac{dV_1}{dt} = -\frac{dV_1}{d\tau}, \quad \left(\tau = \frac{t}{CR} \right)$$

ここで， R はフィードバック抵抗の抵抗値， C は入力コンデンサのキャパシタンスである． CR を単位として測った時間 τ を使うとわかりやすい．図の微分回路の場合は， $CR = 10ms$ だから，入力電圧の $10ms$ あたりの変化が逆符号で出力される．

周波数が高くなれば時間微分はいくらでも大きくなるから，微分回路は不安定になりやすい．そこで，微分回路の入力に小さめの値の抵抗を直列に入れ，高い周波数でのゲインを有限に抑える．これによって波形のエッジがなまるが，それはしかたない．

積分回路では、入力電圧 V_1 と出力電圧 V_2 の間に、

$$V_2 = -\frac{1}{CR} \int V_1 dt = - \int V_1 d\tau \quad \left(\tau = \frac{t}{CR} \right)$$

が成り立つ。C はフィードバック・コンデンサのキャパシタンス、R は入力抵抗の抵抗値である。図の積分回路では、 $CR = 1 \text{ ms}$ であるから、 0.1 V の入力電圧があるとき、出力は 1 ms あたり 0.1 V 減少する。

積分回路では、入力の平均が厳密に 0 でなければ、出力はどちらかの方向に変化し続けて飽和状態になってしまう。これは OP アンプの誤差によっても起こる。それを防ぐには、フィードバック・コンデンサをスイッチで時々放電して出力電圧を 0 にリセットする。フィードバック・コンデンサに並列抵抗を付けて、直流に対するゲインを有限にする方法もあるが、ある周波数以下でゲインが頭打ちになるため、長時間に渡って正確に積分することができなくなる。

OP アンプ回路のバイアス電流による誤差は抵抗値に比例するから、抵抗値が大きすぎると必要な精度が得られない。OP アンプ出力はフィードバック抵抗に電流を供給しなければならないが、これは出力電圧に比例し抵抗に反比例するので、抵抗値が小さすぎると電流供給の余裕が無くなる。電力消費による温度上昇によって誤差が生じることも考慮すべきである。

8.6 電源回路

電子回路を動かすには直流電源が必要である。これは増幅器のバイアスを設定するのに必要であったり、出力信号にエネルギーを供給するために必要だったりする。直流電源の機能を提供する各種のモジュール部品が作られているので、そういうもので済むことが多い。「AC アダプター」は外付けの電源装置であり、コネクタで接続するだけで使える。「スイッチング電源」は、電力線から 1 つまたは複数の直流電源へ変換するもので、エネルギー効率が高い。「DC-DC コンバーター」は直流電源の電圧を変換するもので、AC アダプターやスイッチング電源から複数の電圧源を作ったり、電池の電圧を変換して安定化するのに使用する。

電源回路の基本技術について整理しておこう。

交流変圧器，ノイズフィルター

交流変圧器 (トランス) は 100 V や 200 V などの交流電力を別の電圧の交流電力に変換するのに使われる。強磁性体でできた磁気閉回路 (コアという) に 2 つ以上

のコイルが巻いてあり、電力線につながるのを「1次コイル」といい、それ以外を「2次コイル」という。巻き数の比が電圧の比になり、その逆が電流の比になる。

トランスのコアは鉄を含んだ磁性材料、コイルは銅である。電流によって磁性材料が磁化すると「鉄損」が生じ、コイルに電流が流れると「銅損」が生じる。トランスはこれらの損失が最小になることと、温度上昇が安全限界を超えないことを条件として設計される。大きな電力を伝えるトランスは大きく重い。

トランスには、電力線と電子回路とを電氣的に分離するという役割もある。トランスのコイルどうしは絶縁されているので、2次側の電位を1次側の電位とは独立にとることができるのである。しかし、1次コイルと2次コイルは導体であるから、その間にはキャパシタンスがあって、交流電流が少しは通る。特に、高い周波数のノイズは通りやすい。感電防止やノイズ抑制のため「アース」をおこなう。複数の機器のアース端子をつないで基準電位を揃えることもアースの役割である。

電力線の電圧波形を観察すると、正弦波形の上に細かいノイズが乗っていることが多い。2本の導線の間のノイズ電圧を**ノーマルモード・ノイズ**といい、導線とアースとの間のノイズ電圧を**コモンモード・ノイズ**という。これらはいろいろな機器から発生するが、**ノイズフィルター**を使うと減らすことができる。これは高い周波数の電流を阻止するインダクターと高い周波数の電圧を減少させるコンデンサーによって作られている。これは、ノイズ発生源の側にもノイズで影響を受ける側にも必要である。

「クランプフィルター」はフェライト製の円筒状コアを縦に2分割したもので、これでケーブルをはさむと、高周波のコモンモードノイズが減少する。電力線ケーブルだけではなく、さまざまな信号ケーブルにもコモンモード・ノイズが乗るので、クランプフィルターは多用されている。ケーブルを伝わる信号はノーマルモードであるので、クランプフィルターを通過する。

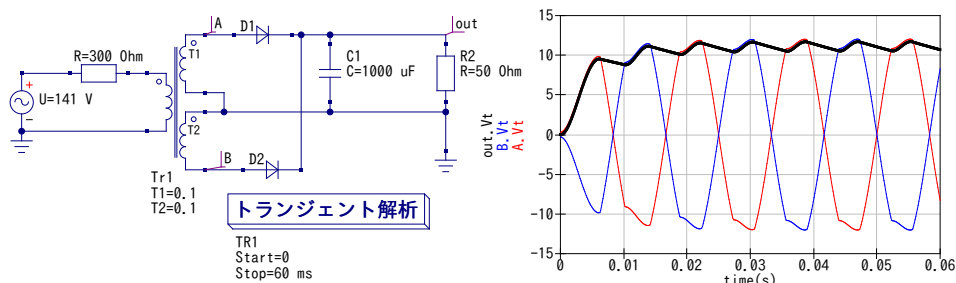
ノイズを抑制する簡単で効果的な方法は、電池とシリーズ・レギュレーター(後述)の使用である。電力線からのノイズはもとより、トランスから漏洩する磁場によるノイズも発生しない。

整流回路

交流を直流に変換する回路には、半波整流回路と全波整流回路がある。半波整流回路は交流の半サイクル分しか利用しないので効率が低い。全波整流回路は交流の全サイクルを使う。

下図は、同じ巻き数の2つの2次コイルがあるトランスと2つのダイオードを使った全波整流回路である。A点とB点の電圧は逆位相になっていて、ダイオー

ドを介して交互に負荷につながる。トランスの1次側から見れば、正の半サイクルと負の半サイクルの両方で負荷につながっている。



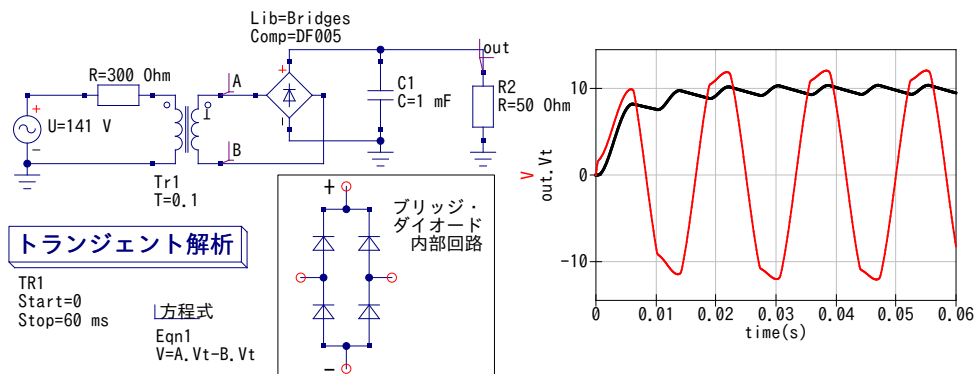
2 ダイオードによる全波整流回路

負荷に並列に入っているコンデンサは、交流電圧のピークで電荷を蓄え、ピークとピークの間で負荷に放電しながら電圧を(なるべく)保持する。これを**平滑コンデンサ**という。電圧の変化を「リップル」(さざなみ)という。リップル幅の平均電圧に対する比は、 $1/(2fCR)$ よりも少し小さい。ただし、 f は交流の周波数、 C は平滑コンデンサのキャパシタンス、 R は負荷抵抗の値。

回路図ではトランスの1次側に抵抗が入っているが、これはトランスの巻線抵抗などをシミュレートするものである。 $T_1 = 0.1$ と $T_2 = 0.1$ はトランスの巻き数比を示すものである。1次側の電圧振幅が141 V なら、2次側では0.1 倍の14.1 V になるはずだが、巻線抵抗によって少し低下する。また、ダイオードの順方向電圧降下によっても負荷電圧は下がる。

ダイオードには、最大でトランスの2次電圧ピーク値の2 倍の逆電圧がかかる。この電圧で逆方向ブレークダウンが起こらないものを選ぶ必要がある。順方向には、負荷電流の数倍の電流が断続的に流れるし、電源が入った瞬間には、更に大きな電流で平滑コンデンサが充電されるので、負荷電流の10 倍程度の順方向電流に耐えることも必要である。

次の回路も全波整流回路である。こちらは「ブリッジ・ダイオード」を使っている。ブリッジ・ダイオードの中には4つのダイオードが入っている。



ブリッジ・ダイオードによる全波整流回路

ブリッジを使う場合はトランスの2次巻線は1つでよいが、ダイオード2つ分の順方向電圧降下による負荷電圧の減少がある。

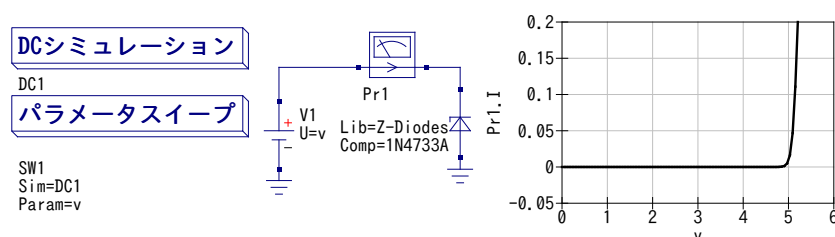
定電圧回路，レギュレーター

定電圧回路は入力電圧や出力電流が変動しても出力電圧を一定に保つ回路である。トランジスタなどの個別素子で構成する必要はほとんど無く，安価で高性能な集積回路を利用すれば済む。

定電圧回路には，シャント・レギュレーター，シリーズ・レギュレーター，スイッチング・レギュレーターがある。

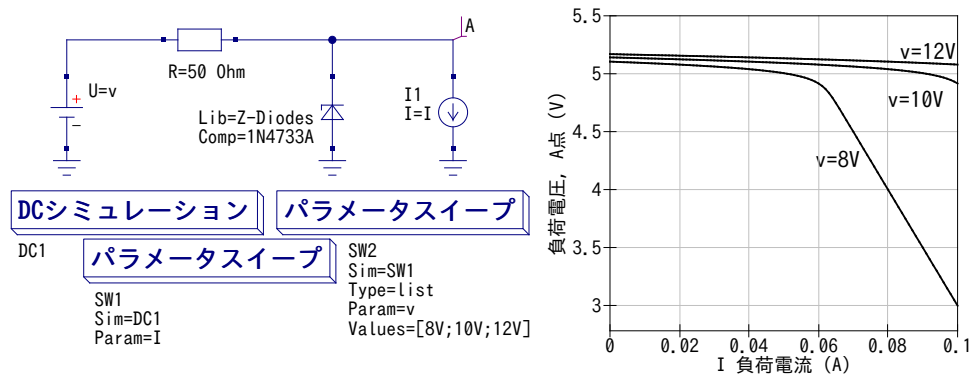
シャント・レギュレーター

定電圧電源回路には基準電圧源が必要である。これには，ツェナーダイオードがよく使われていた。これはpn接合のツェナー効果やアバランシェ効果を利用するものである。逆方向に電圧をかけてブレイクダウンを起こすと，下図のように，電圧がわずかに増えるだけで電流は大きく増加する。いろいろなブレイクダウン電圧を持ったツェナーダイオードが作られている。



ツェナーダイオードの逆方向特性

ツェナーダイオードと抵抗の直列回路に電圧源をつなぎ，逆方向に電圧をかけてブレイクダウンを起こすと，ツェナーダイオードの電圧はブレイクダウン電圧付近で安定する。下図のように，このダイオードの両端から電流を分岐して負荷に供給すると，ダイオードの電流は減少するが，電圧はあまり変わらない。また，電圧源の電圧が変動してもダイオードの電圧はあまり変動しない。このような回路を「シャント・レギュレーター」という。「シャント」(shunt)は日本語では「分路」であり，電源からの電流がブレイクダウンによって分岐していることを意味している。



ツェナーダイオードによるシャント・レギュレーター

ツェナーダイオードと同様の特性を持った集積回路が作られていて、精密な基準電圧源として使われている。これらは「ボルテージ・リファレンス」と呼ばれたりする。このような集積回路の素子は、ブレイクダウン電流の変化に対する電圧の変化がきわめて小さい。温度による変化や経年変化も小さく抑えられている。

集積回路でできた基準電圧源は直流安定性はきわめて高いが、過渡応答には問題がある。たとえば、電流が急に变化すると電圧が瞬間的に変化し、元に戻るのに一定の時間がかかる。また、不安定性がある振動を起こしてしまうこともある。この過渡応答の改善のために、適切なキャパシタンスのコンデンサーを並列に接続するよう推奨されている場合が多い。

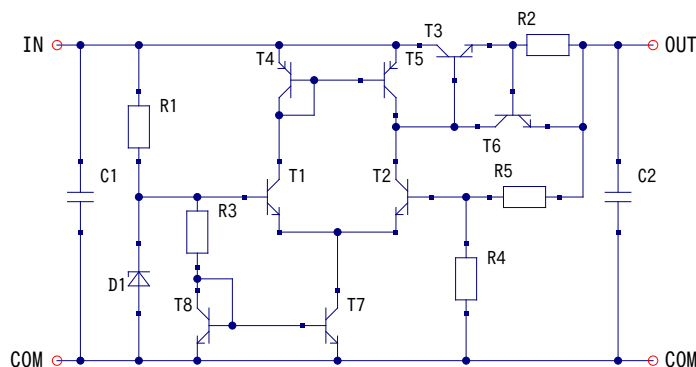
シャント・レギュレーターでは、抵抗とツェナーダイオードの両方で電力を消費し温度が上昇するので、これらの放熱を考える必要がある。

シリーズ・レギュレーター

シャント・レギュレーターでは、電源からの電流は負荷電流にかかわらず流れ続ける。エネルギー効率の観点からは、電源からの電流が負荷電流に追従するのが望ましい。シャントレギュレーターなどで作った基準電圧源の電圧と出力電圧を比較してトランジスタで電流を自動的に調整する回路があり、「シリーズ・レギュレーター」と呼ばれている。「シリーズ」とは、制御トランジスタが負荷に直列につながっていることを意味している。これは、基準電圧源を入力とする電圧ゲイン1の増幅器と考えればよい(電圧ゲインは1でなくてもよい)。この増幅器は出力電流を必要なだけ流すことができないといけない。

下図はシリーズ・レギュレーターの回路例である。ツェナーダイオード $D1$ は基準電圧源、トランジスタ $T1, T2$ は差動増幅器、 $T3$ は制御トランジスタである。出力電圧の $R4/(R4 + R5)$ 倍と基準電圧を差動増幅器で比較し、制御トランジスタ

を通してバランスをとっている。R2 と T6 は出力電流を制限する安全回路である。R2 に電流が流れ過ぎると、T3 のベース電圧を下げるように働く。



ツェナーダイオードとトランジスタによって構成したシリーズ・レギュレーター

シリーズ・レギュレーターも高性能な集積回路になったものが多用されている。そのうちで、**3端子レギュレーター**を使用することが多い。これは文字通り3つの端子しか無い素子であって、きわめて簡単に回路に組み込むことができる。出力電圧、出力電流の範囲、および入力電圧の範囲で選択する。抵抗によって出力電圧の微調整ができるタイプの3端子レギュレーターもある。

シリーズ・レギュレーターでもエネルギー損失は生じる。シリーズ・レギュレーターの制御トランジスタが消費する電力は、出力電流と入出力電圧差との積である。これによって温度が上昇するので、放熱を考える必要がある。

スイッチング・レギュレーター

「スイッチング・レギュレーター」はトランジスタ・スイッチによって電源からの経路を断続することで出力電圧の制御をおこなう方式である。トランジスタ・スイッチでは、ON のときには電圧が0に近く、OFF のときには電流が0に近いので、電力のロス小さくすることができる。トランジスタ・スイッチには「パワー MOSFET」がよく使われる。これはON のときの抵抗が小さく、ON-OFF の切り替え時間が短いので、電力ロスが小さくできる。

ON-OFF での制御なので、トランジスタ・スイッチのところでは電圧や電流は当然激しく変化する。そこから直流をロス無く得るために、インダクターとコンデンサーによるフィルターが使われる。ON-OFF 周波数が高いほどフィルターの効果が高くなり、インダクターやコンデンサーのサイズを小さくすることができるが、パワー MOSFET の ON-OFF 切り替えにともなうロスも周波数に比例する。そのため、最適な周波数というものがあり、数百キロ・ヘルツで動作しているものが多いが、トランジスタの改良によって高周波化しつつある。

スイッチング・レギュレーターは複雑なシステムであるが、エネルギー効率が重要であったり温度上昇を避ける必要がある場合に使われる。スイッチング・レギュレーターの制御部は集積回路になっているし、インダクターやコンデンサーも改良によって小型化されている。電力線に直に接続するタイプのスイッチング・レギュレーターでは、電源トランスは使わない。これはスイッチングによって高周波になった電力を小さいトランスに通しているのである。発熱も少ないことから、スイッチング・レギュレーターは小さくできる。

スイッチング・レギュレーターの問題は広帯域な高周波ノイズである。スイッチの ON-OFF で急激に変化する電流には、高い周波数のスペクトル成分がたくさん含まれていて、一部はフィルターをすり抜けて来る。そのため、小さい信号を扱う装置には、スイッチング・レギュレーターは使いにくい。また、高周波ノイズは電力線に漏れていたり、電磁波として放射されたりするため、いろいろなところに影響を与える。街なかや建物の中で AM ラジオ放送への妨害電波が多いのは、デジタル信号が流れているケーブルやスイッチング電源などがいたるところに置かれるようになったことと関係がある。

付 録 A 抵抗, キャパシタンスの表示

部品の抵抗値やキャパシタンスは決まった桁数の整数に1桁の10のべきを付けた形で表示される。たとえば, 1234 なら, 123×10^4 と読む。抵抗の単位は Ω (オーム), キャパシタンスの単位は pF (ピコ・ファラド= 10^{-12} ファラド) である。

許容差(相対誤差の許容範囲)が1%だと3桁の有効数字が使われる。許容差が2%以上のものでは有効数字は2桁になる。この数値はJIS規格の「公称抵抗値の標準数列」によって決められていて, その中から選んで設計をおこなうようにする。

表示例

抵抗値 Ω	数値表示	3 桁カラーコード	容量値 (F)	2 桁コード
6.8	680(-2)	青灰黒銀	0.1 μ	104
68	680(-1)	青灰黒金	1 μ	105
680	6800	青灰黒黒	2 μ	205
6.8 k	6801	青灰黒茶	5 μ	505
10	100(-1)	茶黒黒金	4.7 μ	475
100	1000	茶黒黒黒	10 μ	106
1 k	1001	茶黒黒茶	100 p	101
100 k	1003	茶黒黒橙	1000 p	102
1 M	1004	茶黒黒黄		

数値の表示の右側に, 許容差(相対誤差の許容範囲)の表示が付いていることが多い。

カラーコードと許容差表示

色	数字	倍数	許容差	
■ 黒	0	1		
■ 茶	1	10	F	$\pm 1\%$
■ 赤	2	100	G	$\pm 2\%$
■ 橙	3	1000		
■ 黄	4	10000		
■ 緑	5	100000	D	$\pm 0.5\%$
■ 青	6	1000000	C	$\pm 0.25\%$
■ 紫	7	10000000	B	$\pm 0.1\%$
■ 灰	8	100000000		
■ 白	9	1000000000		
■ 金	—	0.1	J	$\pm 5\%$
■ 銀	—	0.01	K	$\pm 10\%$
——	—	——	M	$\pm 20\%$
——	—	——	P	+100%, -0%
——	—	——	Z	+80%, -20%

付 録 B よく使う数学公式

B.1 三角関数と指数関数

$$\begin{aligned}
 e^{\pm i\pi/2} &= \pm i, & e^{\pm i\pi} &= -1, & e^{\pm ix} &= \cos x \pm i \sin x \\
 e^{i(x \pm \pi/2)} &= \pm i e^{ix}, & \sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \pm \cos x, & \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \mp \sin x, \\
 \frac{d}{dx} e^{ix} &= e^{i(x+\pi/2)}, & \frac{d}{dx} \cos x &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & \frac{d}{dx} \sin x &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\
 \frac{d}{dx} e^{ax} &= a e^{ax}, & a^{b+c} &= a^b b^c, & a^{bc} &= (a^b)^c
 \end{aligned}$$

B.2 合成関数の微積分

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) g'(x)$$

例：

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (g(x)^2) &= 2g(x)g'(x), & \therefore \int g(x) \frac{dg(x)}{dx} dx &= \frac{1}{2} g(x)^2 \\
 \frac{d}{dx} f(ax+b) &= af'(ax+b)
 \end{aligned}$$

B.3 積の微積分

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (f(x)g(x)) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \\
 \therefore \int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \\
 \frac{d^2}{dx^2} (f(x)g(x)) &= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)
 \end{aligned}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(f(x)g(x)) = f'''(x)g(x) + 3f''(x)g'(x) + 3f'(x)g''(x) + f(x)g'''(x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{kx}f(x)) = e^{kx}\left(\frac{d}{dx} + k\right)f(x)$$

B.4 2×2 行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \operatorname{Tr} A = a + d, \det A = ad - bc, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とすると,}$$

$$A^2 - (\operatorname{Tr} A)A + (\det A)I = 0$$

B.5 コンボリューションとデルタ関数

2つの1変数関数 $f(t)$ と $g(t)$ のコンボリューション $f(t) * g(t)$ を次のように定義する.

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(t-u)du = g(t) * f(t) \quad (\text{B.5.1})$$

これは t の関数である. コンボリューションには普通の積と同様に交換法則と結合法則が成り立つ.

〔例〕 a をパラメータとする t の関数 $F_a(t)$ を

$$F_a(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a} \exp\left(-\left(\frac{t}{a}\right)^2\right)$$

と定義すると,

$$F_a(t) * F_b(t) = F_{\sqrt{a^2+b^2}}(t)$$

となる. これは「正規分布関数」の重要な性質である. 特に, 同じ幅のガウス型関数のコンボリューションは $\sqrt{2}$ 倍の幅のガウス型関数になる.

(B.5.1) を t 微分すると, $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g'(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f'(t-u)du$ となるから,

$$\frac{d}{dt}(f(t) * g(t)) = f(t) * g'(t) = f'(t) * g(t) \quad (\text{B.5.2})$$

単位ステップ関数とは次のようなものである.

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (\text{B.5.3})$$

$Y(t)$ の導関数を $\delta(t)$ と書きデルタ関数と呼ぶ¹.

$$\delta(t) = Y'(t) \quad (\text{B.5.4})$$

任意の滑らかな関数 $f(t)$ に対して, 部分積分を使って計算すると, 次のように, $t = 0$ での関数値などが出てくる. 符号が交互に変わっていることに注意.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dx = f(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)f(t)dx = -f'(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta''(t)f(t)dx = f''(0), \quad \dots \quad (\text{B.5.5})$$

コンボリユーションも同様に計算できる. この場合は符号は変わらない.

$$\delta(t) * f(t) = f(t), \quad \delta'(t) * f(t) = f'(t), \quad \delta''(t) * f(t) = f''(t), \quad \dots \quad (\text{B.5.6})$$

単位ステップ関数とのコンボリユーションは原始関数になる.

$$Y(t) * f(t) = \int_{-\infty}^t f(u)du \quad (\text{B.5.7})$$

B.6 ラプラス変換

B.6.1 定義

実数 t の関数 $f(t)$ の「裏関数」 $\mathcal{L}f(s)$ を次の積分で定義する.

$$\mathcal{L}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (\text{B.6.1})$$

この計算を**ラプラス変換**という. 裏関数は変数 s の関数である. この変数は複素数であるとする. $f(t)$ は, ある値 b に対して $t < b$ で $f(t) = 0$ となるようなものとする².

¹単位ステップを $t = 0$ を中心とする非常に狭い区間でなめらかに変化するものとする. するとちゃんと微分ができる.

² $f(t)$ が左側で必ずしも 0 にならない場合でも, $t < b$ の部分を無いものとみなして変換する. これは $f(t)Y(t-b)$ のラプラス変換である. 特に, $t < 0$ の部分を消去する場合が多い. これは $f(t)Y(t)$ のラプラス変換である.

s の値によっては積分は収束しないかもしれない．ある s に対して積分が収束するなら，実部がより大きい s に対しても積分は収束する． s の実部の下限の値を収束座標という，この収束性を確保するため， $t < b$ で $f(t) = 0$ としたのである．

裏関数 $\mathcal{L}f(s)$ に対して，元の関数 $f(t)$ を表関数という．像関数，原関数という言い方もある．

$f(t) = e^{at} Y(t)$ のラプラス変換を計算してみよう． a は実数とする．

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{at} Y(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{1}{a-s}$$

であるが， s の実部が a を超えれば， $t \rightarrow \infty$ で $(a-s)t$ の実部は $-\infty$ に行くので第1項は 0 に収束する．よって，

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s-a} \quad (\text{収束座標 } a)$$

$\mathcal{L}f(s)$ を $\mathcal{L}[f(t)](s)$ のように書いてもよいことにする．すると，上の例は次のように書くこともできる．

$$\mathcal{L}[e^{at} Y(t)](s) = \frac{1}{s-a}$$

わかりきっているので， (s) を省略してもよい．

$$\mathcal{L}f = \mathcal{L}[e^{at} Y(t)] = \frac{1}{s-a}$$

B.6.2 フーリエ変換との関係 – 逆変換

フーリエ変換

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

には逆変換

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

がある． $f(t)$ が有限な領域で積分可能で $t \rightarrow \pm\infty$ であまり急に増加しないなら，積分は収束する．フーリエ逆変換は時間の関数の調和振動成分による表現である．

ラプラス変換の定義式の s に $a + i\omega$ を代入すると，

$$\mathcal{L}f(a + i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) e^{-at}) e^{-i\omega t} dt$$

となる．このように，ラプラス変換は実はフーリエ変換と同じである．だから逆変換も存在する．

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}f(a + i\omega) e^{(a+i\omega)t} d\omega$$

B.6.3 簡単な例

上で計算したとおり, $e^{at} Y(t)$ の裏関数は,

$$\mathcal{L}[e^{at} Y(t)] = \frac{1}{s-a} \quad (\text{B.6.2})$$

であった. $a=0$ とすれば,

$$\mathcal{L}[Y(t)] = \frac{1}{s} \quad (\text{B.6.3})$$

デルタ関数については, (B.5.5) を使って,

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1, \quad \mathcal{L}[\delta'(t)] = s, \quad \mathcal{L}[\delta''(t)] = s^2, \quad \dots \quad (\text{B.6.4})$$

(B.6.2) を a で微分すれば ($Y(t)$ を Y と略記する),

$$\mathcal{L}[t e^{at} Y] = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad \mathcal{L}[t^2 e^{at} Y] = \frac{2}{(s-a)^3}, \quad \mathcal{L}[t^3 e^{at} Y] = \frac{3!}{(s-a)^4}, \quad \dots \quad (\text{B.6.5})$$

三角関数については, $\cos \omega t = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$, $\sin \omega t = (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/(2i)$ と (B.6.2) を使って計算すれば,

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t) Y(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}[\sin(\omega t) Y(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad (\text{B.6.6})$$

B.6.4 ラプラス変換の性質

線形性と相似性

a, b を定数, f, g を関数として,

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)], \quad \text{あるいは} \quad \mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g$$

これは線形性である.

$a > 0$ として, 関数 $f(t/a)$ のラプラス変換を計算する. $t/a = t'$ によって置換積分をすれば,

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right](s) = a\mathcal{L}f(as)$$

これは $f(t)$ の横幅を a 倍にすると, 裏関数は横に $1/a$ 倍, 縦に a 倍になることを示していて, これを相似性の法則という.

平行移動

表関数 $f(t)$ を横にずらして $f(t-a)$ とすると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-s(t'+a)} dt' = e^{-sa} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-st'} dt'$$

となり, 裏関数に e^{-as} がかかる.

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as} \mathcal{L}[f] \quad (\text{B.6.7})$$

横にずらすと, 0 になる左端の位置も一緒にずれることに注意しなければならない. $f(t)Y(t-b)$ をずらすと, $f(t-a)Y(t-(b+a))$ になる.

表関数に指数関数 e^{at} をかけてラプラス変換すると, 元の関数のラプラス変換の平行移動になる.

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \mathcal{L}[f](s-a) \quad (\text{B.6.8})$$

コンボリューション

2つの t の関数 $f(t), g(t)$ のコンボリューション $(g*f)(t)$ とは, 次の式で計算される t の関数である.

$$(g*f)(t) = (f*t)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t') f(t-t') dt'$$

これの裏関数を計算してみる.

$$\mathcal{L}(g*f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t') f(t-t') e^{-st} dt' dt = ※$$

先に t 積分をおこなうことにする. (B.6.7) を使うと.

$$※ = \int_{-\infty}^{\infty} dt' g(t') e^{-t's} \mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}g(s) \mathcal{L}f(s)$$

よって, コンボリューションのラプラス変換は, ラプラス変換の積になる.

$$\mathcal{L}(g*f) = \mathcal{L}g(s) \mathcal{L}f(s) \quad (\text{B.6.9})$$

導関数

左端がある関数 $g(t)$ の導関数 $g'(t)$ のラプラス変換をやってみる．部分積分をおこなえば，

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(t) e^{-st} dt = g(t) e^{-st} \Big|_{-\infty}^{\infty} + s \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-st} dt$$

端があるので， $g(t) e^{-st}$ は $t = \infty$ だけでなく $t = -\infty$ でも 0 であるから，第 1 項は消える．したがって，導関数の計算はラプラス変換によって s 倍の計算に変換されることになった．何度微分しても同様である．

$$\mathcal{L}[g'] = s\mathcal{L}[g], \quad \mathcal{L}[g''] = s^2\mathcal{L}[g], \quad \mathcal{L}[g'''] = s^3\mathcal{L}[g], \quad \dots \quad (\text{B.6.10})$$

必ずしも左端を持たない関数の場合は，強制的に左端を作るため，単位ステップ関数 $Y(x-b)$ をかけてからラプラス変換をおこなう．左端を原点にするため， $b=0$ としよう．

積 $f(t)Y(t)$ を微分すると，

$$(f(t)Y(t))' = f'(t)Y(t) + f(t)\delta(t) = f'(t)Y(t) + f(0)\delta(t)$$

となる． $f(t)\delta(t)$ という積は $t=0$ 以外の $f(t)$ の値とは関係がないから， $f(0)\delta(t)$ になる．同様に繰り返せば，

$$\begin{aligned} (f(t)Y(t))'' &= f''(t)Y(t) + f'(0)\delta(t) + f(0)\delta'(t) \\ (f(t)Y(t))''' &= f'''(t)Y(t) + f''(0)\delta(t) + f'(0)\delta'(t) + f(0)\delta''(t) \\ &\dots \end{aligned}$$

これらの式に (B.6.10) と (B.6.4) を適用すれば，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)Y(t)] &= s\mathcal{L}[f(t)Y(t)] - f(0) \\ \mathcal{L}[f''(t)Y(t)] &= s^2\mathcal{L}[f(t)Y(t)] - sf(0) - f'(0) \\ \mathcal{L}[f'''(t)Y(t)] &= s^3\mathcal{L}[f(t)Y(t)] - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0) \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{B.6.11})$$

$f(0)$ や $f'(0)$ のような余分の項は， $f(t)Y(t)$ や $f'(t)Y(t)$ などの $t=0$ における「飛び」によるものである．これらは $f(t)$ や $f'(t)$ などの「初期値」でもある．このことを使って，微分方程式の初期値問題を解くことができる．

さまざまな関数とその裏関数の対応表があるので，ラプラス変換と逆変換の計算をおこなう必要はほとんど無い．必要な公式を見つけて代数計算をおこなうだけでよいのである．