1　不連続面での反射と屈折

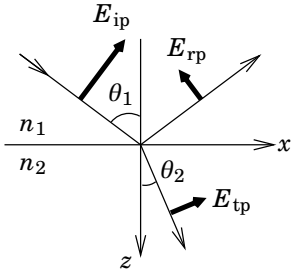
Fresnel の公式

2 種類の透明な媒質の境界面での反射について考える。境界面の法線方向と入射光の向きの両方に平行な平面を入射面という。透過光の向きと反射光の向きも入射面に平行。入射角 θ_1 と屈折角 θ_2 を境界面の法線の向きから測る。屈折率は n_1, n_2 とする。電場ベクトルが入射面に平行な光と垂直な光に分けて考え、前者を p 偏光 (p=parallel)、後者を s 偏光 (s=senkrecht) という。p 偏光と s 偏光は反射と屈折の過程を通じて独立である。

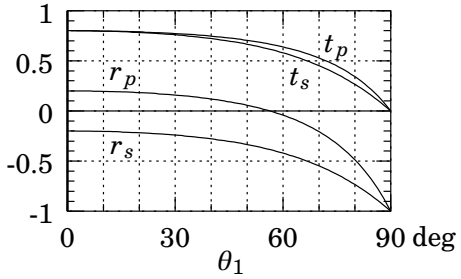
可視光に対する透明媒質では $\mu = \mu_0$ が成り立つ。この場合の振幅反射率と振幅透過率の式を Fresnel の公式という。$\boldsymbol{E}_{\rm rp}$ などで境界面上の一点における反射光電場などの複素振幅をあらわす。p 偏光の電場の正の向きを下の図のように決める。s 偏光の電場の正の向きは紙面に垂直な向きに統一する。

$$\left.\begin{aligned} r_{\rm p} \equiv \frac{E_{\rm rp}}{E_{\rm ip}} &= \frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}, \quad & t_{\rm p} \equiv \frac{E_{\rm tp}}{E_{\rm ip}} &= \frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)} \\ r_{\rm s} \equiv \frac{E_{\rm rs}}{E_{\rm is}} &= -\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}, \quad & t_{\rm s} \equiv \frac{E_{\rm ts}}{E_{\rm is}} &= \frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

これは、$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ と $\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \partial\boldsymbol{D}/\partial t$ が有限であることから導かれる境界面上下の場に関する連続性の条件 $E_{1x} = E_{2x}$, $H_{1x} = H_{2x}$, $E_{1y} = E_{2y}$, $H_{1y} = H_{2y}$ と、$\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon}\boldsymbol{H}$($\boldsymbol{s}$は波の進行方向の単位ベクトル)、$n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$、および、Snell の法則 $n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 =$ から得られる (付録 A 参照)。



p 偏光の電場の向きの決め方



振幅反射率と振幅透過率 ($n_2/n_1 = 1.5$)

垂直入射 $\theta_2 = \theta_1 = 0$ の場合は、境界面上下での $\boldsymbol{E}_y$ と $\boldsymbol{H}_x$ が連続であることと $\boldsymbol{E}_y$ と $\boldsymbol{H}_x$ の比が屈折率で決まることから振幅反射率と振幅透過率が簡単に出せる。s 偏光の場合は

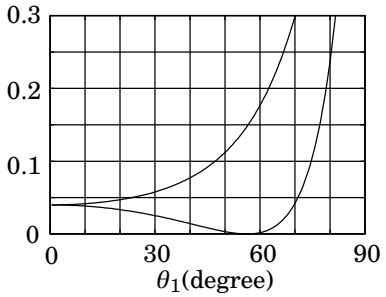
$$r_{\rm s} = (n_1-n_2)/(n_1+n_2), \qquad t_{\rm s} = 2n_1/(n_1+n_2) \tag{2}$$

p 偏光の場合は反射波の符号が逆になるだけ (正の向きをそう決めたから)。

光強度はポインティングベクトルの大きさであり，たとえば p 偏光の入射光なら $\frac{1}{2}|\boldsymbol{E}_{\rm ip}|^2\Re(1/\eta_1)$ である。ここで，$\Re$ は実部を採ることを意味する。他の成分も同様に書き表すことができる。入射光と反射光の媒質は同じなのでそれらに対する波動インピーダンスは等しいから，強度反射率は振幅反射率の絶対値を 2 乗するだけで求められる。また，入射光ビームの面積と反射光ビームの面積は等しいので，ビーム全体のパワーの比としてのビーム反射率は強度反射率に等しい。

強度透過率を得るには、波動インピーダンスの違いを考慮する必要がある。波動インピーダンス η と屈折率 n の関係は $n = c\mu_0/\eta$ であるので，強度透過率を得るには振幅透過率の絶対値の 2 乗に $\Re n_2/\Re n_1$ を掛ければよい。さらにビーム断面積の比 $\cos\theta_2/\cos\theta_1$ を掛ければ，ビーム透過率が得られる。こうして、反射光ビーム

強度と透過光ビーム強度の和が入射光ビーム強度に等しいことが確かめられる。(垂直入射の場合にこれを確かめてみよ。)



S 偏光 (上) と P 偏光 (下) の強度反射率 ($n_2/n_1 = 1.5$)

グラフでもわかるように、入射角がゼロではないとき、s 偏光は p 偏光よりも反射しやすいので、反射によって偏光状態が変わる。たとえば、虹は水滴や「虹ビーズ」による光の反射であるため、虹は虹のアーチに沿った方向に偏光していて、偏光サングラスなどで見ればそれを容易に確かめることができる。

Brewster の法則

p 偏光については $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$、あるいは同じことだが、$\tan\theta_1 = n_2/n_1$ のときに反射率はゼロになる。この角度を **Brewster 角**という。s 偏光では反射率がゼロになることはない。これを偏光の向きの絶対的基準として利用することができる。

光をガラス窓から容器中に入れるとき、直線偏光なら窓を傾けるだけで 100% 透過させることができる (Brewster 窓)。透明な固体試料やレーザー媒質の端面を削って Brewster 角にすることもある。

平行光をガラス板に Brewster 角で通すと s 偏光成分のみが反射するので偏光器として使うことができる。ただし反射率が小さいという問題がある (Nörrenberg の反射型偏光器)。Brewster 角での透過率は s 偏光に対しては 100% より小さいので、平板をたくさん並べると透過光から s 偏光成分をいくらでも減らすことができる。p 偏光に対する透過率は 100% なので、このタイプの偏光器は効率が良い。

全反射

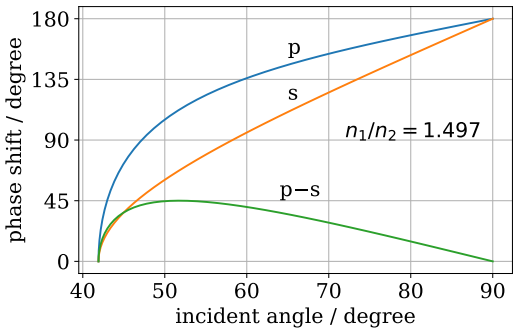
$n_2 < n_1$ の場合,

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \tag{3}$$

とすると，$\theta_1 > \theta_c$ で全反射が起こる。θ_c は**臨界角**である。Snell の法則から θ_2 と $\cos\theta_2$ を求めると次のように虚数になる。

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\cosh^{-1}\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2}\right), \quad \cos\theta_2 = -\mathrm{i}\sqrt{\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2}\right)^2 - 1} \tag{4}$$

これとフレネルの公式を使って反射の位相を計算することができる。これはゼロと 180 度の中間の値になり，入射角によって変化し，偏光によって異なる。下図はこの様子をあらわすグラフである。p 偏光の位相遅れの方が s 偏光よりも大きい。相対屈折率が $n_1/n_2 = 1.497$ の場合，この差の最大値は約 45 度である。

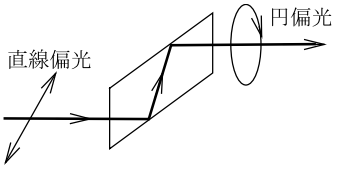


入射角に対する p 偏光と s 偏光の位相シフト，p-s 間位相差 (相対屈折率 = 1.497)

$r_p/r_s = e^{i\delta}$ で決まる位相差 δ とその最大値 δ_{max} は次のようになる。

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1 - (n_2/n_1)^2}}{\sin^2\theta_1}, \qquad \delta_{max} = 2\arctan\left(\frac{{n_1}^2 - {n_2}^2}{2n_1n_2}\right) \tag{5}$$

全反射での位相のずれは位相器として利用される。一度で位相差 $\delta = \pi/2$ を得るには、$n_1/n_2 \geqq 1+\sqrt{2} \cong 2.41$ が必要であり、通常のガラスでは位相差はもっと小さい。Fresnel rhomb は菱形のガラスプリズムであり、中で光を二度全反射させることにより 1/4 波長 (= $\pi/2$ ラジアン) の位相差が得られるようにしてある。位相差は入射角で変わるが，屈折率の値を適切に選べばその依存性を小さくすることができる。これは直線偏光と円偏光の間の変換に使われる。



Fresnel rhomb による直線偏光の円偏光への変換

全反射が起こる場合、境界面近くに近接場 (エバネッセント光) が生じる。近接場の波数ベクトル $\boldsymbol{k}_2$ の境界面に平行な成分と垂直な成分を真空中の波長 λ を使って書くと、

$$k_{2x} = (2\pi n_2/\lambda)\sin\theta_2 = (2\pi n_1/\lambda)\sin\theta_1 \tag{6}$$

$$k_{2z} = (2\pi/\lambda)\cos\theta_2 = -i(2\pi/\lambda)\sqrt{(n_1\sin\theta_1)^2 - {n_2}^2} \tag{7}$$

k_{2x} の方は入射波の波数ベクトルの平行成分に等しく実数であるから、近接場は境界面に沿っては通常の波として伝わっている。垂直方向には、距離 $1/|k_{2z}|$ で振幅が 1/e 倍に減る。

近接場は波長よりも短い距離で減衰して遠くには伝わらない。しかし、光ファイバーなどでできたプローブを近付けることによって検出することはできるので、これを利用して光の波長よりもかなり小さいものを光で見る顕微鏡が作られている (PSTM)。

付録 A　電磁気学による Fresnel の公式と Snell の法則の導出

単色平面波の電磁波では，電場ベクトルと磁場ベクトルは次のかたちである。

$$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}\exp\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}\exp\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{8}$$

ここで，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ は時間にも位置にも依存しない複素振幅ベクトルであり，ω と $\boldsymbol{k}$ は角周波数と波数ベクトルである。等方性媒質中での電磁波の波動方程式が成り立つため，誘電率 ε, 透磁率 μ と波数 k および波数ベクトルの成分は次の式を満たす。

$$k_x{}^2 + k_x{}^2 + k_x{}^2 = k^2, \qquad k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{9}$$

自由空間では，振幅が発散するような波は許されないので波数ベクトルの成分はすべて実数でなければならないが，適当な境界が存在するなら，(波数 k ではなく) 波数ベクトルの成分が虚数であることも許される。$\boldsymbol{k}$ の方向ベクトル $\hat{\boldsymbol{k}}$ と方向余弦は次のようなものである。

$$\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{k}}{k}, \quad \cos\alpha = \hat{k}_x = \frac{k_x}{k}, \quad \cos\beta = \hat{k}_y = \frac{k_y}{k}, \quad \cos\gamma = \hat{k}_z = \frac{k_z}{k}, \quad \hat{k}_x{}^2 + \hat{k}_y{}^2 + \hat{k}_z{}^2 = 1 \tag{10}$$

$\boldsymbol{k}$ の成分が虚数である場合は角の範囲を複素数に拡張して計算する。たとえば次の式は有用である。

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\zeta\right) = -\mathrm{i}\sinh\zeta, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\zeta\right) = \cosh\zeta, \qquad \cosh^2\zeta - \sinh^2\zeta = 1 \tag{11}$$

媒質中の波動インピーダンスを η，屈折率を n，真空中の光速度を c とすると次の関係が成り立つ。

$$n = c\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{c\mu}{n}, \tag{12}$$

マクスウェル方程式からは，電場ベクトルと磁場ベクトルの関係が得られ，

$$\eta\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E} = \eta\boldsymbol{H}\times\hat{\boldsymbol{k}} \tag{13}$$

２種の透明媒質が接している境界面付近の電磁場を考える。境界面に振動電荷や振動電流が生じることはないため，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ の境界面に平行な成分は境界面を跨いで連続的に変化する。座標軸を決めて境界面が $z=0$ になるようにし，入射面が $y=0$ になるようにする。$k_{1y} = k_{2y} = k_{3y} = 0$ である。入射波は $z<0$ から入射することにする。$z<0$ の領域には反射波も発生し，$z>0$ の領域には透過波が発生する。入射波の量に添字 $_1$, 反射波の量に添字 $_3$, 透過派の量に添字 $_2$ を付けて区別する。$z=0$ での電場の x 成分の連続性と y 成分の連続性は，

$$\left.\begin{aligned} E_{1x}\exp\mathrm{i}(\omega_1 t - k_{1x}x) + E_{3x}\exp\mathrm{i}(\omega_3 t - k_{3x}x) &= E_{2x}\exp\mathrm{i}(\omega_2 t - k_{2x}x) \\ E_{1y}\exp\mathrm{i}(\omega_1 t - k_{1x}x) + E_{3y}\exp\mathrm{i}(\omega_3 t - k_{3x}x) &= E_{2y}\exp\mathrm{i}(\omega_2 t - k_{2x}x) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

磁場の成分についても同様である。これらが任意の t, x に対して成り立つので，$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$, $k_{1x} = k_{2x} = k_{3x}$. そこで，$\omega = \omega_1 = \omega_2$ とする。各波の z 軸からの角 γ を入射角 θ_1 と屈折角 θ_2, 反射角 θ_3 とすると，$k_{1x} = (\omega n_1/c)\sin\theta_1$, $k_{3x} = (\omega n_1/c)\sin\theta_3$, $k_{2x} = (\omega n_2/c)\sin\theta_2$ と書けるので，

$$\theta_1 = \theta_3, \quad n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 \tag{15}$$

これは反射の法則とスネルの法則である。複素振幅の x, y 成分に対しては次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} E_{1x} + E_{3x} = E_{2x}, \quad H_{1y} + H_{3y} = H_{2y} \\ E_{1y} + E_{3y} = E_{2y}, \quad H_{1x} + H_{3x} = H_{2x} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

電場と磁場は進行方向に垂直なので，y 成分と入射面に平行な成分に分解することができる。後者を「p 成分」と呼ぼう。y 方向と波の進行方向と p 方向が右手系をなすようにする。(13)から，

$$\left.\begin{array}{lll} H_{1y}=(1/\eta_1)E_{1\mathrm{p}}, & H_{2y}=(1/\eta_2)E_{2\mathrm{p}}, & H_{3y}=(1/\eta_1)E_{3\mathrm{p}} \\ H_{1\mathrm{p}}=-(1/\eta_1)E_{1y}, & H_{2\mathrm{p}}=-(1/\eta_2)E_{2y}, & H_{3\mathrm{p}}=-(1/\eta_1)E_{3y} \end{array}\right\} \tag{17}$$

x 成分は p 成分から，

$$\left.\begin{array}{lll} E_{1x}=E_{1\mathrm{p}}\cos\theta_1, & E_{2x}=E_{2\mathrm{p}}\cos\theta_2, & E_{3x}=-E_{3\mathrm{p}}\cos\theta_1 \\ H_{1x}=H_{1\mathrm{p}}\cos\theta_1, & H_{2x}=H_{2\mathrm{p}}\cos\theta_2, & H_{3x}=-H_{3\mathrm{p}}\cos\theta_1 \end{array}\right\} \tag{18}$$

これらを使って (12) を $\boldsymbol{E}$ の p 成分と y 成分であらわすと次のようになる。

$$\left.\begin{array}{ll} E_{1\mathrm{p}}\cos\theta_1-E_{3\mathrm{p}}\cos\theta_1=E_{2\mathrm{p}}\cos\theta_2, & (1/\eta_1)E_{1\mathrm{p}}+(1/\eta_1)E_{3\mathrm{p}}=(1/\eta_2)E_{2\mathrm{p}} \\ E_{1y}+E_{3y}=E_{2y}, & -(1/\eta_1)E_{1y}\cos\theta_1+(1/\eta_1)E_{3y}\cos\theta_1=-(1/\eta_2)E_{2y}\cos\theta_2 \end{array}\right\} \tag{19}$$

これから，p 偏光に対する反射係数 $r_\mathrm{p}=E_{3\mathrm{p}}/E_{1\mathrm{p}}$ と透過係数 $t_\mathrm{p}=E_{2\mathrm{p}}/E_{1\mathrm{p}}$, および s 偏光に対する反射係数 $r_y=E_{3y}/E_{1y}$ と透過係数 $t_\mathrm{p}=E_{2y}/E_{1y}$ を計算すると，

$$\left.\begin{array}{ll} r_\mathrm{p}=\dfrac{\eta_1\cos\theta_1-\eta_2\cos\theta_2}{\eta_1\cos\theta_1+\eta_2\cos\theta_2}, & t_\mathrm{p}=\dfrac{2\eta_2\cos\theta_1}{\eta_1\cos\theta_1+\eta_2\cos\theta_2} \\ r_\mathrm{s}=\dfrac{\eta_2\cos\theta_1-\eta_1\cos\theta_2}{\eta_2\cos\theta_1+\eta_1\cos\theta_2}, & t_\mathrm{s}=\dfrac{2\eta_2\cos\theta_1}{\eta_2\cos\theta_1+\eta_1\cos\theta_2} \end{array}\right\} \tag{20}$$

以下では透磁率が等しい ($\mu_1=\mu_2$) としよう。この場合，(12) より $\eta_1:\eta_2=n_2:n_1$ であるから，(20) は次のようになる。

$$\left.\begin{array}{ll} r_\mathrm{p}=\dfrac{n_2\cos\theta_1-n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1+n_1\cos\theta_2}, & t_\mathrm{p}=\dfrac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1+n_1\cos\theta_2} \\ r_\mathrm{s}=\dfrac{n_1\cos\theta_1-n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}, & t_\mathrm{s}=\dfrac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2} \end{array}\right\} \tag{21}$$

スネルの法則より $n_2:n_1=\sin\theta_1:\sin\theta_2$ が成り立つので，入射角が 0 でない場合，上式の n_2 と n_1 は $\sin\theta_1$ と $\sin\theta_2$ に置き換えることができ，始めに出てきた公式になる。入射角が 0 の場合は $\theta_1=\theta_2=0$ とし，η_1，η_2 を n_2, n_1 に置き換えればよい。

$\sin\theta_1>n_2/n_1$ である場合，$\sin\theta_2>1$ となるので，$\theta_2=\pi/2+\mathrm{i}\zeta$ とすると (11) より，

$$\cosh\zeta=\sin\theta_2=\frac{n_1\sin\theta_1}{n_2}, \qquad \hat{k}_{2z}=\cos\theta_2=-\mathrm{i}\sinh\zeta, \qquad \sinh\zeta=\sqrt{\left(\frac{n_1\sin\theta_1}{n_2}\right)^2-1} \tag{22}$$

ζ の符号は正である。さもなければ，z を $+\infty$ にすると (8) が発散する。

$\cos\theta_2$ は純虚数であるから，(21) にこれを代入すると，$|r_\mathrm{p}|=|r_\mathrm{s}|=1$ となり，反射率は 1 である。また，全反射による位相シフトである r_p の偏角 δ_p と r_s の偏角 δ_s もわかる。

$$\tan\left(\frac{\delta_\mathrm{p}}{2}\right)=\frac{n_1\sinh\zeta}{n_2\cos\theta_1}, \qquad \tan\left(\frac{\delta_\mathrm{s}}{2}\right)=\frac{n_2\sinh\zeta}{n_1\cos\theta_1} \tag{23}$$