参考 1：最小作用の原理の裏付け

理学部　物理科学科　齊藤 国靖

2026 年 4 月 10 日

ラグランジュ方程式を導出するため，天下り的に最小作用の原理を導入した．そこで，最小作用の原理を裏付けるため，仮想仕事の原理からハミルトンの原理までを説明する．

1　仮想仕事の原理

質点が静止した状態とは，質点の速度がゼロで，質点に作用する力が釣り合った状態である [1]．この様な状態のことを（力学的な）**平衡状態**といい，質点が静止しているときの位置を**平衡点**という．ある質点が平衡状態にあれば，質点に働く力の合力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

を満たしている．質点に作用する力が釣り合っているので，合力がゼロになるという訳である．また，質点の平衡点を $\boldsymbol{r}$ とし，$\boldsymbol{r}$ からの任意の変位を $\delta\boldsymbol{r}$ としよう．但し，$\delta\boldsymbol{r}$ は質点の運動によって生じる変位[*1]とは異なり，全く任意に決めることができるため，**仮想変位**と呼ばれる．このとき，式 (1) は

$$\boldsymbol{F} \cdot \delta\boldsymbol{r} = 0 \tag{2}$$

と等価である．なぜなら，合力と仮想変位の成分をそれぞれ $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ および $\delta\boldsymbol{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ とすれば，上式は

$$F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z = 0$$

を意味しており，δx, δy, δz が任意の変数であるから，上式を満たすには

$$F_x = F_y = F_z = 0$$

が必要になるからである．つまり，式 (2) が成り立つためには，式 (1) が成立しなければならず，逆も容易に示すことができる．また，式 (2) の左辺は力に変位を掛けたものなので，質点に働く力の合力がする仕事はゼロということである．そこで，次の原理が成り立つ．

[*1] 質点の速度を $\dot{\boldsymbol{r}}$ とすれば，時間 dt の間の運動によって生じる変位は $d\boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{r}}dt$ である．

仮想仕事の原理

質点が平衡状態にあるとき，質点の任意の仮想変位に対して，
質点に働く力がする仕事の和はゼロである．

1.1　拘束条件が 1 つの場合

仮想変位 $\delta \boldsymbol{r}$ が全く任意であれば，式 (2) や仮想仕事の原理は自明であり，質点の平衡点 $\boldsymbol{r}$ を求めるのに，結局は式 (1) を使うことになる．一方，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ に**拘束条件**が課される場合，仮想仕事の原理によって有用な結果を導くことができる．まず，拘束条件がある関数を用いて

$$f(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

と表されるとする．また，仮想変位を加えた後の質点の位置 $\boldsymbol{r} + \delta \boldsymbol{r}$ も拘束条件を満たすとすれば

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0 \tag{4}$$

が成り立つ．ここで，$\delta \boldsymbol{r}$ は式 (4) を満たす様に選ばれるため，式 (2) の様に任意に決められないことに注意しよう．式 (3), (4) の辺々を引くと

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - f(x, y, z) = 0$$

となるが，上式の左辺は

$$(\text{l.h.s.}) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z$$

と近似できるため，次の関係式が得られる．

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0 \tag{5}$$

拘束条件を満たす $\boldsymbol{r}$ を求めるため，**ラグランジュの未定乗数法**の手順に沿って計算を行う [1]．まず，式 (5) の両辺に関数 $\lambda(x, y, z)$ を掛けて，式 (2) に加えると

$$\left(F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y + \left(F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z = 0 \tag{6}$$

となる．そこで，$\lambda(x, y, z)$ を

$$F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

となる様に定めれば，式 (6) は

$$\left(F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y = 0$$

となる．さらに，δx, δy は任意なので，上式が成り立つためには

$$F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0\ , \qquad F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

でなければならない．従って，式 (3) を満たす $\boldsymbol{r}$ の各成分と $\lambda(x, y, z)$ を求めるには

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0\ , \\ F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} &= 0\ , \\ F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} &= 0\ , \\ F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

を連立して解けばよい．

1.2　拘束条件が 2 つの場合

質点の平衡点に複数の拘束条件が課される場合でも，計算の手順は基本的に同じである．ここでは，式 (3) の代わりに 2 つの拘束条件

$$f(x, y, z) = 0\ , \qquad g(x, y, z) = 0 \tag{7}$$

が課されるとする．仮想変位を加えた後も質点の位置は 2 つの拘束条件を満たすとすれば，

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0\ , \qquad g(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0$$

が成り立つ．従って，式 (5) を導出したときと同様の計算により，次式が得られる．

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0\ , \tag{8}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}\delta x + \frac{\partial g}{\partial y}\delta y + \frac{\partial g}{\partial z}\delta z = 0 \tag{9}$$

2 つの拘束条件を満たす $\boldsymbol{r}$ を求めるため，やはりラグランジュの未定乗数法の手順に従う [1]．式 (8), (9) の両辺にそれぞれ関数 $\lambda(x, y, z)$, $\mu(x, y, z)$ を掛けて，式 (2) に加えると

$$\left(F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\frac{\partial g}{\partial x}\right)\delta x + \left(F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \mu\frac{\partial g}{\partial y}\right)\delta y + \left(F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} + \mu\frac{\partial g}{\partial z}\right)\delta z = 0 \tag{10}$$

となる．そこで，$\lambda(x, y, z)$, $\mu(x, y, z)$ を

$$F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \mu\frac{\partial g}{\partial y} = 0\ , \qquad F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} + \mu\frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

となる様に定めれば，式 (10) は

$$\left(F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\frac{\partial g}{\partial x}\right)\delta x = 0$$

となり，δx は任意であるから

$$F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

でなければばならない．従って，式 (7) を満たす $\boldsymbol{r}$ と $\lambda(x,y,z)$, $\mu(x,y,z)$ を求めるには

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 0\ , \\ g(x,y,z) &= 0\ , \\ F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\frac{\partial g}{\partial x} &= 0\ , \\ F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \mu\frac{\partial g}{\partial y} &= 0\ , \\ F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} + \mu\frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

を連立して解けばよい．

1.3 質点系の場合

N 個の質点から成る**質点系**の場合を考えよう．まず，質点系の平衡状態とは，全ての質点に作用する力が釣り合っている状態である．従って，各々の質点に働く力の合力 $\boldsymbol{F}_i$ は

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0} \qquad (i = 1, \cdots, N) \tag{11}$$

を満たしている．また，各質点に仮想変位 $\delta\boldsymbol{r}_i$ を加えたとすると，式 (2) に対応して

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{12}$$

が成り立つ．この場合も，式 (11) と (12) は等価である．さらに，全質点の平衡点が拘束条件を満たし，拘束条件が全部で n 個あるとする[*2]．式 (3), (7) に対応し，その様な拘束条件を

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N) = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, n) \tag{13}$$

としよう．また，各質点に $\delta\boldsymbol{r}_i$ を加えた後も，全質点の位置が上式の拘束条件を満たすとすれば，式 (5), (8), (9) に対応して次式が得られる．

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, n) \tag{14}$$

[*2] 拘束条件の数 n は質点系の全自由度の数 $3N$ よりも少ないとする $(n < 3N)$.

拘束条件を満たす質点系の平衡点 $\boldsymbol{r}_i$ を求める手順もこれまでと同様である [1, 2]．式 (14) の両辺に関数 $\lambda_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)$ を掛けて，式 (12) に加えると

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\lambda_\alpha\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{r}_i}\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\right)=0$$

$$\therefore\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{F}_i+\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{r}_i}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

となる．そこで，先に n 個の $\lambda_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)$ を定め，残りは $\delta\boldsymbol{r}_i$ が任意であることから条件式を求めると，

$$\boldsymbol{F}_i+\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{r}_i}=\boldsymbol{0}\qquad(i=1,\cdots,N)$$

が得られる．従って，式 (13) を満たす $\boldsymbol{r}_i$ と $\lambda_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)$ を求めるには

$$\begin{aligned}f_\alpha(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)&=0\qquad(\alpha=1,\cdots,n)\\ \boldsymbol{F}_i+\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{r}_i}&=\boldsymbol{0}\qquad(i=1,\cdots,N)\end{aligned}\tag{15}$$

を連立して解けばよい．

2 ダランベールの原理

前節では質点や質点系が静止した平衡状態を考えたが，本節では質点が運動する動力学を考える [1, 2]．まず，N 個の質点から成る質点系において，各質点の運動は運動方程式

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_i$$

に従う．但し，m_i は i 番目の質点の質量である．ここで，上式の左辺にある慣性項を移項すると

$$\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{0}\tag{16}$$

となり，力の釣り合いを表す式 (11) と対応した形になる．もちろん，式 (16) の $\boldsymbol{F}_i$ や $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ は時間変化するため，平衡状態における $\boldsymbol{F}_i$ とは本質的に異なっている．しかし，各瞬間の状態を考えれば，質点に働く力の合力と慣性項にマイナス符号をつけた「力」は釣り合うと考えることができる．これを**ダランベール**（D'Alembert）**の原理**といい，この様に考えると，1.3 節で導いた結果は $\boldsymbol{F}_i$ を $\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ に置き換えることで，全て動力学の結果に変更することができる．因みに，慣性項にマイナス符号をつけた $-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ のことを**慣性抵抗**という．

各瞬間において，質点系の位置 $\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N$ は式 (13) の n 個の拘束条件を満たすとする．このとき，各質点の位置 $\boldsymbol{r}_i$ は式 (15) において $\boldsymbol{F}_i$ を $\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ に置き換えた方程式

$$\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{r}_i}=\boldsymbol{0}$$

を満足する．つまり，

拘束条件付きの運動方程式

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_i} \tag{17}$$

が成立する．もし拘束条件 f_α がなければ，上式は通常の運動方程式に一致する．上式の右辺の第2項は拘束条件を満たすために現れる力であり，**拘束力**を表している．

3 ハミルトンの原理

いよいよ，最小作用の原理を裏付ける**ハミルトンの原理**を導出しよう [2]．ここでも，N 個の質点から成る質点系を考え，全ての質点は式 (13) の拘束条件を満たしながら，式 (17) に従って運動するものとする．各質点の位置 $\boldsymbol{r}_i$ は時間変化するため，時間 t を引数として $\boldsymbol{r}_i(t)$ と書いておく．このとき，質点系の運動エネルギー

$$K(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i(t)^2$$

も時間の関数であり，これを時刻 t_A から t_B の範囲で積分した量

$$I \equiv \int_{t_A}^{t_B} K(t)dt \tag{18}$$

を定義する．$K(t)$ は全質点の軌道 $\boldsymbol{r}_i(t)$ $(i = 1, \cdots, N)$ が与えられて初めて関数形が定まるため，I は積分区間 $t_A \leq t \leq t_B$ における全質点の軌道が与えられる毎にある一定値を返すことになる．そこで，実際に起こる軌道 $\boldsymbol{r}_i(t)$ とは異なる仮想的な軌道 $\bar{\boldsymbol{r}}_i(t)$ を考え，時刻 t における軌道のズレを $\varepsilon\boldsymbol{u}_i(t)$ として，

$$\bar{\boldsymbol{r}}_i(t) = \boldsymbol{r}_i(t) + \varepsilon\boldsymbol{u}_i(t) \tag{19}$$

とする．但し，2 つの軌道は $t = t_A, t_B$ において一致しており，

$$\bar{\boldsymbol{r}}_i(t_A) = \boldsymbol{r}_i(t_A) \ , \quad \bar{\boldsymbol{r}}_i(t_B) = \boldsymbol{r}_i(t_B)$$

が成り立つとする．つまり，

$$\boldsymbol{u}_i(t_A) = \boldsymbol{u}_i(t_B) = \boldsymbol{0} \tag{20}$$

である．式 (19) の両辺を t で微分すると

$$\dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_i(t) = \dot{\boldsymbol{r}}_i(t) + \varepsilon\dot{\boldsymbol{u}}_i(t)$$

であるから，軌道 $\bar{\boldsymbol{r}}_i(t)$ による運動エネルギーは

$$
\begin{aligned}
\bar{K}(t) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\bar{\boldsymbol{r}}}_i(t)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left\{\dot{\boldsymbol{r}}_i(t) + \varepsilon \dot{\boldsymbol{u}}_i(t)\right\}^2 \\
&\simeq K(t) + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i(t)\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_i(t)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

である．但し，$\varepsilon \ll 1$ として，ε の 2 次の項は無視した．また，$\bar{K}(t)$ によって定義される量

$$
\bar{I} \equiv \int_{t_A}^{t_B} \bar{K}(t)dt
$$

を考えると，I と $\bar{I}$ の差は

$$
\begin{aligned}
\delta I &\equiv \bar{I} - I \\
&= \int_{t_A}^{t_B} \left\{\bar{K}(t) - K(t)\right\} dt
\end{aligned}
$$

である．従って，式 (21) を用いると

$$
\delta I = \varepsilon \int_{t_A}^{t_B} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i(t)\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_i(t)dt
$$

となる．上式の右辺を部分積分すると

$$
\begin{aligned}
\delta I &= \varepsilon \left\{\left[\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i(t)\cdot\boldsymbol{u}_i(t)\right]_{t_A}^{t_B} - \int_{t_A}^{t_B}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i(t)\cdot\boldsymbol{u}_i(t)dt\right\} \\
&= -\varepsilon \int_{t_A}^{t_B}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i(t)\cdot\boldsymbol{u}_i(t)dt
\end{aligned}
$$

が得られる．但し，右辺第 1 項に式 (20) を用いた．さらに，運動方程式 (17) を代入すると

$$
\begin{aligned}
\delta I &= -\varepsilon \int_{t_A}^{t_B}\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_i}\right)\cdot\boldsymbol{u}_i(t)dt \\
&= -\int_{t_A}^{t_B}\sum_{i=1}^{N}\left(\boldsymbol{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_i}\right)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i dt
\end{aligned}
\tag{22}
$$

となる．但し，軌道のズレを改めて

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \boldsymbol{u}_i(t) &= \bar{\boldsymbol{r}}_i(t) - \boldsymbol{r}_i(t) \\
&\equiv \delta\boldsymbol{r}_i
\end{aligned}
$$

と書いた．ここで，2 つの軌道 $\boldsymbol{r}_i(t)$, $\bar{\boldsymbol{r}}_i(t)$ は共に式 (13) の拘束条件を満たすとすれば，全ての α に対して

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N) = f_\alpha(\bar{\boldsymbol{r}}_1, \cdots, \bar{\boldsymbol{r}}_N) = 0$$

が成り立つ．つまり，

$$\begin{aligned} f_\alpha(\bar{\boldsymbol{r}}_1, \cdots, \bar{\boldsymbol{r}}_N) - f_\alpha(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

である．従って，式 (22) の右辺の被積分関数の第 2 項は消えて

$$\delta I = -\int_{t_A}^{t_B} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i dt \tag{23}$$

となる．あるいは，定義式 (18) を用いて

$$\delta I = \delta \int_{t_A}^{t_B} K dt$$

と書けば，式 (23) は

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} K dt + \int_{t_A}^{t_B} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i dt = 0 \tag{24}$$

となる．ここで，

$$\delta W \equiv \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$$

は各時刻において質点系の軌道を $\boldsymbol{r}_i(t)$ から $\bar{\boldsymbol{r}}_i(t)$ に移すときにする仕事（仮想仕事）であり，式 (24) より次の結果が得られる．

ハミルトンの原理

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} K dt + \int_{t_A}^{t_B} \delta W dt = 0$$

4　最小作用の原理

ハミルトンの原理の導出において，各質点に働く力 $\boldsymbol{F}_i$ は拘束力を除く合力であり，例えば速度に比例する抵抗力など，エネルギーを散逸する力（**散逸力**）を含んでいても構わない．そこで，ハミルトンの原理から最小作用の原理を導くため，$\boldsymbol{F}_i$ は**保存力**であると仮定しよう．$\boldsymbol{F}_i$ が保存力であれば，ポテンシャルエネルギー $U(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N)$ を用いて

$$\boldsymbol{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i}$$

と表すことができる．このとき，式 (24) は

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} K dt - \int_{t_A}^{t_B} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i dt = 0 \tag{25}$$

となる．上式の左辺第 2 項の被積分関数はポテンシャルエネルギーの変分

$$\begin{aligned}\delta U &= U(\bar{\boldsymbol{r}}_1, \cdots, \bar{\boldsymbol{r}}_N) - U(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i\end{aligned}$$

であるから，式 (25) は

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} K dt - \int_{t_A}^{t_B} \delta U dt = 0$$

$$\therefore \delta \int_{t_A}^{t_B} (K - U) dt = 0$$

となる．従って，**ラグランジアン** $L \equiv K - U$ を導入すれば，次の結果が得られる．

最小作用の原理

$$\delta \int_{t_A}^{t_B} L dt = 0$$

参考文献

[1] 山内恭彦. 一般力学　増訂第 3 版. 岩波オンデマンドブックス. 岩波書店, 1957.

[2] 阿部龍蔵. 力学・解析力学. 岩波基礎物理シリーズ. 岩波書店, 2021.