

修士論文

平成 26 年度

研究題目

圧縮センシングを用いた CT 画像再構成

-制限 X 線投影における再構成-

学生証番号 358149

氏名 垣内 友希

提出日 平成 27 年 1 月 15 日

指導教員 蚊野 浩

京都産業大学  
先端情報学研究科



## 要約

コンピュータ断層撮影(CT)は、X線を利用して物体を走査し、得た情報をコンピュータで処理することで、物体の内部構造を画像として再構成するものである。CTは人体内部を断層像として観察することができるため、内臓の異常発見に役立つ。しかし、装置が大規模であること、被曝量が他のX線を用いた診断と比べると多いことが問題とされている。近年、従来に比べて非常に少ない投影像から画像の再構成が可能な手法として圧縮センシングが注目されている。本論文では、X線投影像の枚数・X線の投影角度範囲・X線検出器のサイズという3つの撮影条件について、それぞれ制限を設けて投影データを作成し、圧縮センシングによる画像再構成を行った。このような制限下で十分な画像再構成が可能であることを示すことができれば、装置の小型化による省スペース化や、被曝量の低減につながる。また、圧縮センシングと従来手法を比較し、圧縮センシングの効果を検証した。従来手法として、FBP法、逐次近似法、線型方程式を解く方法の3手法を用いて画像再構成を行った。

撮影条件制限下での圧縮センシングの効果を検証するためには、様々な撮影条件を変えた投影データを用意する必要がある。本研究では、被写体の減衰係数を表す2次元画像から投影データを取得するシミュレーションプログラムを用いて投影データを生成した。減衰係数を表す2次元画像として、ランダムドット画像・文字画像・Shepp-Loganファントム画像（いずれも64×64画素）を使用した。

シミュレーションプログラムを用いて得た投影データを使用して実験を行った結果、投影領域・投影角度範囲に制限を設けない場合、圧縮センシングは従来手法よりも少ない投影回数で十分な再構成画像が得られた。また、投影領域に制限を設けた場合、FBP法と逐次近似法では十分な再構成画像が得られなかったが、線形方程式を解く方法と圧縮センシングでは投影回数を増加させることにより十分な再構成画像が得られた。投影角度範囲に制限を設けた場合、FBP法と逐次近似法では十分な再構成画像が得られなかったが、線型方程式を解く方法と圧縮センシングでは投影回数を増加させることにより十分な再構成画像が得られた。線型方程式を解く方法と圧縮センシングの比較では、投影領域制限・投影角度範囲制限のどちらにおいても、圧縮センシングの方が十分な再構成画像を得るために必要な投影回数が少なかった。以上の結果から、圧縮センシングは投影回数・投影領域・投影角度範囲といった撮影条件が制限される状況においても十分な再構成画像が得られることを示した。

## 目次

|                             |          |
|-----------------------------|----------|
| 1. 序論                       | ・ ・ ・ 1  |
| 2. X線コンピュータ断層撮影(X線CT)       | ・ ・ ・ 3  |
| 2.1 X線投影データの取得              |          |
| 2.2 CTにおける画像再構成の原理と投影データの取得 |          |
| 2.3 従来の画像再構成アルゴリズム          |          |
| 2.3.1 フィルタ補正逆投影法(FBP法)      |          |
| 2.3.2 逐次近似法                 |          |
| 2.3.3 線型方程式を解く方法            |          |
| 3. 圧縮センシング                  | ・ ・ ・ 10 |
| 3.1 圧縮センシングの原理              |          |
| 3.2 L1 ノルム最小化アルゴリズム         |          |
| 4. 圧縮センシングによる投影からの画像再構成     | ・ ・ ・ 13 |
| 4.1 シミュレーションプログラム           |          |
| 4.2 ノイズを考慮した画像再構成           |          |
| 4.3 投影領域・投影角度範囲に制限がない画像再構成  |          |
| 4.4 投影領域・投影角度範囲に制限を設けた画像再構成 |          |
| 5. 実験と考察                    | ・ ・ ・ 19 |
| 5.1 圧縮センシングによる疎画像の再構成       |          |
| 5.1.1 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合   |          |
| 5.1.2 投影範囲に制限を設けた場合         |          |
| 5.1.3 投影角度範囲に制限を設けた場合       |          |
| 5.2 圧縮センシングによるファントム画像の再構成   |          |
| 5.2.1 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合   |          |
| 5.2.2 投影領域に制限を設けた場合         |          |
| 5.2.3 投影角度範囲に制限を設けた場合       |          |
| 5.3 従来手法によるファントム画像の再構成      |          |
| 5.4 実験結果の考察                 |          |
| 6. 結論                       | ・ ・ ・ 40 |
| 参考文献                        | ・ ・ ・ 42 |
| 謝辞                          | ・ ・ ・ 43 |
| 付録1 X線CTにおける観測行列の生成         | ・ ・ ・ 44 |
| 付録2 圧縮センシング理論の概要            | ・ ・ ・ 47 |
| 付録3 圧縮センシングによるCR画像再構成       | ・ ・ ・ 54 |
| -ノイズを考慮した再構成の一例-            |          |





## 1. 序論

医療において、医者は患者に関する情報を収集し、それを元に診断を行う。情報の収集手段としては、問診や触診のほかに、医療機器を用いるものがある。医療機器を使用して得た患者の情報は、数値や画像として表現される。患者の情報を定量的に表現できることは、診断において曖昧さをなくすことができ、大きな利点となる。そのなかでも、X線を用いた撮影は、医者が直接知ることのできない人体内部の情報を画像として得ることができるものとして、積極的に利用されている。

コンピュータ断層撮影(CT)は、X線を利用して物体を走査し、得た情報をコンピュータで処理することで、物体の内部構造を画像として再構成するものである。CTでは、物体の断面画像を得ることができるため、内臓の異常発見に役立つ。しかし、CTにはいくつかの問題がある。第一に装置が非常に大掛かりである。全身撮影用のX線CTは $360^\circ$ の全周囲方向から1000回以上の撮影を繰り返す。人体の周りを機器が回転して撮影を行うため、装置は撮影する人体よりもかなり大きくなる。このようなCT撮影装置は設置に必要なスペースも大きなものとなり、大病院でなければ設置が難しい。第二に被曝量の問題がある。一般的な胸部CT撮影における放射線の被曝量は $6.9\text{mSv}$ であり、他のX線診断装置と比較して被曝量が多い[1]。

これらの問題を解決するには、 $360^\circ$ の全周囲方向から撮影する必要をなくすであるとか、1000回以上も必要な撮影回数を100回以下にするなどの、画期的な技術開発が必要である。2005年頃まで、少ない方向数で撮影した画像から十分に高精度な断面画像を得ることは困難であると考えられていた。2006年に、標本化定理の仮定のもとでは不十分なサンプル数の測定データから原信号を完全に復元することができる圧縮センシングという手法が発見された[2]。圧縮センシングの手法をCT再構成に応用することで、従来よりもはるかに少ない投影角度数の投影データからでも断面画像の構成が可能であることが多数報告されている[3][4]。また、被写体の関心領域にのみX線を照射し、画像再構成を行うinterior CTにおいても、圧縮センシングの原理を用いることで、十分な断面画像の構成が可能であるという研究報告がある[6][7]。

本研究の目的は、従来よりも小型で低被曝量のX線CT装置が実現可能であることを明らかにすることである。そのために、投影枚数・投影角度範囲・投影領域に制限を設けて撮影データを取得し、制限の強い生データに圧縮センシングを用いた再構成を適用することで、断面画像を復元することを試みる。具体的には、

- (i) 従来研究で明らかであるが、CT再構成に圧縮センシングを用いることで、従来よりも少ない投影枚数から断面画像を再構成可能であることを追試する。
- (ii) 通常のCTでは対象物全体の投影像が得られるように検出器を設計するが、検出器のサイズを制限し、対象物の一部の投影像しか得られない条件で、圧縮センシングによる再構成の性能を検証する。

(iii)測定部の回転角度が制限されており、一定の角度範囲からしかX線が照射できない条件で、圧縮センシングによる再構成の性能を検証する。

以上の状況を想定し、検出器サイズや角度を制限した投影を行う。これらの条件で十分な再構成画像を得ることができれば、装置の小型化による省スペース化や、被曝量の低減につながる。

また、従来手法との比較のため、代表的な画像再構成手法であるフィルタ補正逆投影法(FBP法)、逐次近似法、線型方程式を解く方法を利用した手法においても同様に画像再構成を行う。

本論文の構成は、次の通りである。2章では、まずX線コンピュータ断層撮影の原理について述べ、次に、従来の画像再構成手法としてフィルタ補正逆投影法、逐次近似法、線型方程式を解く方法について、原理とアルゴリズムを記述する。3章では、圧縮センシングについて、原理とそのアルゴリズムを記述する。4章では、圧縮センシングによる画像再構成の実験を行うにあたって、設定した条件や実験環境を記述する。5章において圧縮センシングによる画像再構成の結果を、従来手法の画像再構成の結果とともに記述する。これにより、X線の投影条件が制限された状況における、圧縮センシングの効果を検証する。

## 2. X線コンピュータ断層撮影 (X線 CT)

### 2.1 X線投影データの取得

図 2.1 に被写体の X 線投影データを取得する様子を示す. X 線源と X 線検出器を, 被写体を挟んで対向配置し, 被写体を通過した X 線の強度を検出器で測定する. X 線源から照射された X 線の強度は, 被写体を通過するときに, 被写体の X 線減衰係数に応じて指数関数的に減衰する. 照射する X 線の強度を  $I_0$ , 被写体のある  $x$ - $y$  断面における X 線減衰係数分布を  $f(x,y)$ , X 線の照射方向を  $t$  とすると, 検出器で測定される X 線の強度  $I$  は以下の式で表される.

$$I = I_0 \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dt \right\} \quad \cdot \cdot \cdot (2.1)$$

式(2.1)において両辺の対数をとると, X 線減衰率分布の  $t$  軸に沿った線積分  $g$  は以下の式になる.

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dt = \ln \frac{I}{I_0} \quad \cdot \cdot \cdot (2.2)$$

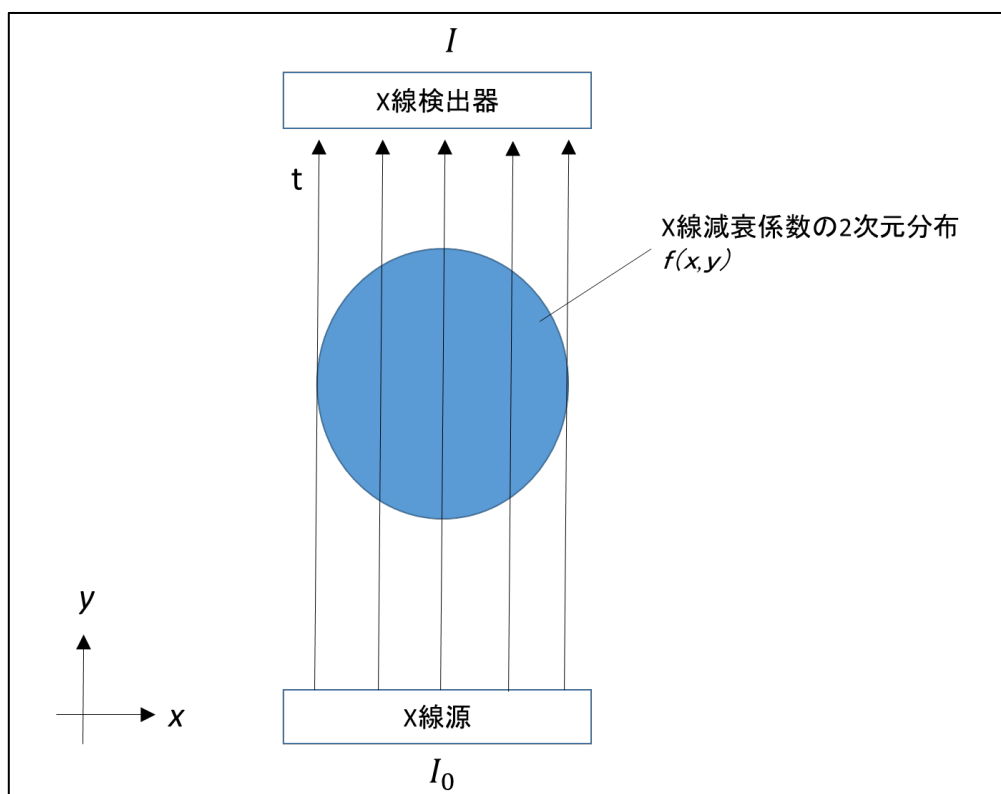


図 2.1 X 線投影データの取得

### 2.2 CT における画像再構成の原理と投影データの取得

CT における画像再構成の基本原理は, オーストリアの数学者 J. Radon によって証明

された、「二次元あるいは三次元の物体はその投影データの無限集合から一意に再構成できる」という Radon の定理に基づく。

CT 撮影では、X 線源と X 線検出器のペア (測定部) が被写体の周囲を回転するとともに、各回転角度において、回転軸の垂直方向に平行移動することにより、投影データを全周方向から多数取得する。CT における投影データの取得について、図 2.2 に示す。回転角度を  $\theta$ 、平行移動方向の位置を  $r$  とする。さまざまな回転角  $\theta$  に対して測定部を平行移動させながら測定をすることで、被写体を透過する X 線強度 (透過 X 線強度) の 2 次元分布を得る。透過 X 線強度に対し、式 (2.2) を用いることで X 線減衰量の線積分値の 2 次元分布  $g(r, \theta)$  が得られる。この  $g(r, \theta)$  を 2 次元分布  $f(x, y)$  に対する投影と呼ぶ。また、 $f(x, y)$  から  $g(r, \theta)$  への変換をラドン変換、 $g(r, \theta)$  から  $f(x, y)$  への変換を逆ラドン変換、 $g(r, \theta)$  を画像として表現したものをサイノグラムと呼ぶ。サイノグラムの一例を図 2.3 に示す。投影  $g(r, \theta)$  から、線減衰係数の 2 次元分布  $f(x, y)$  を求めることを再構成と呼ぶ。

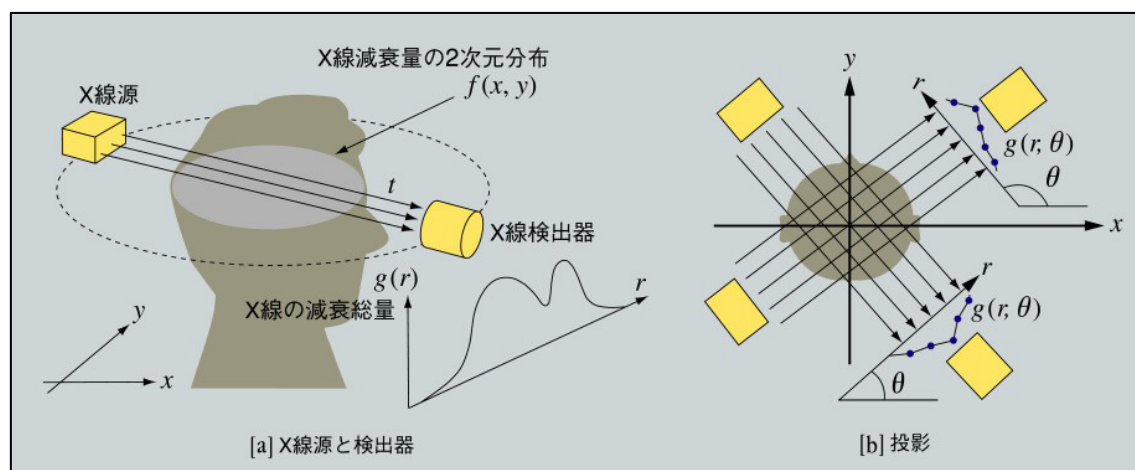


図 2.2 CT における投影の測定

(CG-ARTS 協会, 「デジタル画像処理」, p. 150, 図 8.5 を利用)

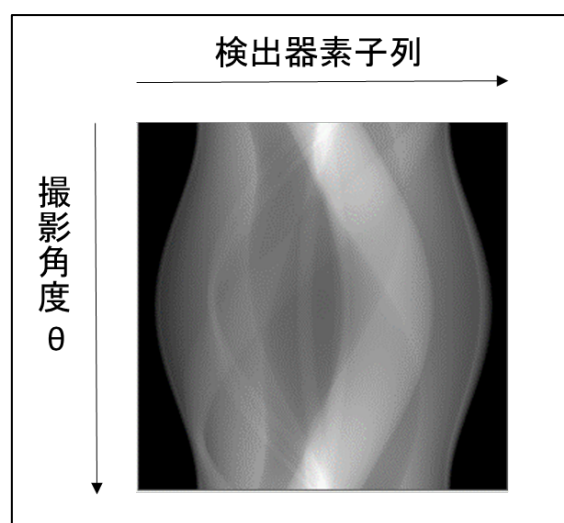


図 2.3 サイノグラムの例

## 2.3 従来の画像再構成アルゴリズム

コンピュータで行われる実際の画像再構成法は、解析的手法と代数的手法に大きく分けられる。本論文では、代表的な解析的手法としてフィルタ補正逆投影法 (FBP 法)、代表的な代数的手法として逐次近似法と線型方程式を解く方法について説明する。

### 2.3.1 フィルタ補正逆投影法 (FBP 法)

画像再構成において最も単純な方法は、投影 $g(r;\theta)$ を空間領域に逆投影することである。これを単純逆投影法と呼ぶ。逆投影とは、投影方向に沿って投影の値を均等に与えた 2 次元分布を得ることである。この逆投影を全ての方向について行い加算することで得られる 2 次元分布を単純逆投影分布という。しかし、この単純逆投影分布は再構成しようとしている元の分布とは一致しない。

図 2.4 に示す例を用いて、単純逆投影分布が元の分布と一致しないことについて説明する。図における投影サンプル 1~4 は投影 $g(r;\theta)$ の例である。この例ようになるのは、被写体の X 線減衰係数の 2 次元分布 $f(x,y)$ が、中心で 100 の数値をとり、それ以外の位置で 0 となる場合である (図 2.4(a))。投影の値を単純に逆投影すると、単純逆投影分布は図 2.4(b) に示す値になる。これは図 2.4(a) に示す、元の分布とは一致しない。

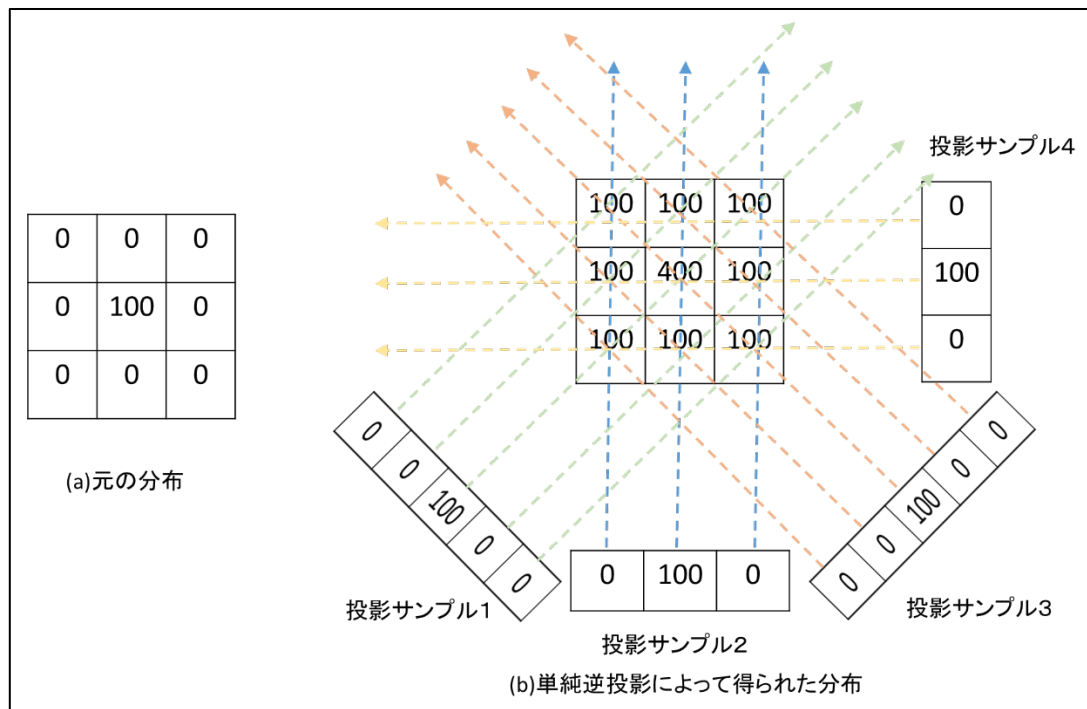


図 2.4 単純逆投影

図 2.4(b)を観察すると、単純逆投影分布は、元の 2 次元分布よりも広がりをもった値になっている。単純逆投影分布 $b(x,y)$ と X 線減衰係数の 2 次元分布 $f(x,y)$ は、次式のよう

に点拡がり関数 $h(x,y)$ によって関連付けられる．ここで\*は畳み込み演算である．

$$b(x,y) = f(x,y) * h(x,y) \quad \dots (2.3)$$

さらに， $h(x,y)$ は次式で与えられる．

$$h(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \dots (2.4)$$

したがって，単純逆投影分布 $b(x,y)$ に対して $h(x,y)$ をキャンセルするようなフィルタリングを行うことで，X線減衰係数の2次元分布 $f(x,y)$ を求めることができる．

実際には，計算処理の負担の観点から，このような2次元フィルタリング処理を行うのではなく， $h(x,y)$ をキャンセルするフィルタリングと同等の処理を，投影 $g(r,\theta)$ の $r$ に関する1次元フィルタリングとして行う．このようにして再構成を行う方法を，フィルタ補正逆投影法(FBP)法と呼ぶ．

### 2.3.2 逐次近似法

逐次近似法は，繰り返しを利用して仮定画像を徐々に真の画像に近づけていく方法である．以下の説明は，文献[5]の内容をまとめたものである．

逐次近似法の手順を図2.5に示す．まず初めに適当な仮定画像を作成しておき，各方向に投影を行う．仮定画像の投影データと真の画像の投影データの値が一致した場合，この断面画像の仮定は正しいといえる．一方，仮定画像の投影データと真の画像の投影データが異なる場合には，真の画像の投影データに値が近くなるように，仮定画像に修正を加える．そして，再度，仮定画像の投影を行い，真の投影データと比較することを繰り返す．

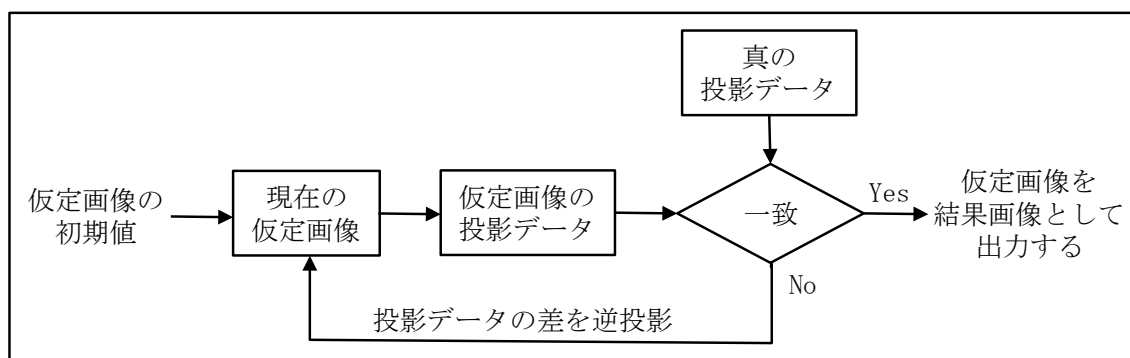


図 2.5 逐次近似法の手順

仮定画像を修正する方法はさまざまなものが研究されてきたが，近年，ML-EM (maximum likelihood expectation maximization) 法や，それを収束速度に関して改善した OS-EM (Ordered Subset Expectation Maximization) 法が開発された．これらの方法は，測定されたデータがポアソン分布に従っていることを仮定したうえで，もっともらしい断層像を推定するものである．

ML-EM 法の繰り返しの式(逐次式)は、以下のように表される.

$$\lambda_j^{k+1} = \frac{\lambda_j^k}{\sum_{i=1}^I C_{ij}} \sum_{i=1}^I \frac{y_i C_{ij}}{\sum_{m=1}^J C_{im} \lambda_m^k} \quad \dots (2.5)$$

ここで,  $k$  は繰り返し回数,  $j$  は画像の画素番号, すべての画素数は  $J$  である. また,  $i$  は投影データの検出器番号を表し, 全ての検出器の数は  $I$  である.  $\lambda^k$  と  $\lambda^{(k+1)}$  は, それぞれ  $k$  回目と  $k+1$  回目の仮定画像,  $y$  は真の画像の投影データである.  $C_{ij}$  は画素番号  $j$ , 検出器番号  $i$  における, 画像と投影の関係を表す. この式を, 計算の手順に沿って分解して考えると以下のようなになる.

①  $k$  回目の仮定画像から投影データを作成する

$$y_i^k = \sum_{m=1}^J C_{im} \lambda_m^k \quad \dots (2.6)$$

②  $k$  回目の仮定画像の投影データと真の画像の投影データの比を求める

$$y_i' = \frac{y_i}{y_i^k} \quad \dots (2.7)$$

③ ②で求めた比を逆投影する

$$\lambda_j' = \frac{1}{\sum_{i=1}^I C_{ij}} \sum_{i=1}^I y_i' C_{ij} \quad \dots (2.8)$$

④  $k$  回目の仮定画像に③の逆投影画像を掛けて  $k+1$  回目に仮定画像を更新する

$$\lambda_j^{k+1} = \lambda_j^k \cdot \lambda_j' \quad \dots (2.9)$$

以上の計算手順を繰り返すことによって, 仮定画像  $\lambda$  は真の画像に近づいていく. 仮定画像  $\lambda$  の投影データが真の画像の投影データとほぼ一致したところで繰り返しを打ち切り, その仮定画像を再構成画像とすることが理想的である. しかし, 現状では繰り返しの打ち切り条件は, 経験的に決めている.

OS-EM 法は, 投影データをいくつかの組(サブセット)に分割し, このサブセットに属するデータのみで上記の ML-EM 法と同様の処理を行い, それをサブセットごとに繰り返す方法である. サブセット数を 1 としたときに, OS-EM 法は ML-EM 法と等価になる.

OS-EM 法では, 仮定画像の更新回数=(サブセット数)×(繰り返し回数)が成り立つ. 投影データをサブセットに分けることによって繰り返し 1 回あたりの仮定画像の更新回数が増加し, その結果, ML-EM 法よりも速く真の画像に近づく.

### 2.3.3 線型方程式を解く方法

画像と投影の関係を行列とベクトルの計算式に置き換えて, 線形方程式を解くことで再構成画像を得る. なお, X 線 CT の画像再構成が大規模な線型方程式を解く問題に帰



着されることは、付録1を参照のこと。大規模な線型方程式を最小二乗法で解くことは、CT技術の最も初期に検討された方法であるが、一次方程式が大規模になり、当時のコンピュータでは実用的な規模の画像を再構成することが不可能であった。そのため、FBP法などの実用化が進んだ。現在では、コンピュータの性能が向上したため、再検討の余地がある。また、この方法は本論文の主題である圧縮センシングによる画像再構成と類似の方法でもある。

求めるべき画像を表すベクトルを  $\mathbf{x}$ 、投影データを表すベクトルを  $\mathbf{b}$ 、投影を表す行列を  $A$  とすると、投影の式を以下のように表すことができる。

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \dots (2.10)$$

単純に式(2.10)から画像ベクトル  $\mathbf{x}$  を求めることを考えると、 $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を計算することが可能であれば、両辺の左に  $A^{-1}$  をかけることで、以下のように解を求めることができる。

$$\begin{aligned} A^{-1}A\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \end{aligned} \quad \dots (2.11)$$

$A$  から逆行列を求めるには、行列  $A$  が正則(正方行列で行列式が 0 でない)でなければならない。 $A$  の行数と階数(ランク)、未知数の数が等しい場合は解を一意に求めることができる。一方、投影の回数を十分に多くとった場合には、 $A$  の行数が未知数の数より大きくなり、投影回数が不十分な場合には、 $A$  の行数と階数が未知数の数より小さくなる。このようなときには通常の逆行列を求めることができない。そのような場合の、一般的な解法を以下に記述する。

$A$  の階数が未知数の数と等しく、行数が未知数の数より大きい場合、 $A\mathbf{x}$  と  $\mathbf{b}$  の二乗誤差が最小になるような解を求めることが一般的である。これは、

$$e^2 = \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 \quad \dots (2.12)$$

において、 $e$  が最小になるような  $\mathbf{x}$  を最小二乗法で求めることに相当する。

最小二乗問題は、基本的には正規方程式

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b} \quad \dots (2.13)$$

を解くことに帰着される。これを解くために、特異値分解を利用する。特異値分解によって、階数  $m$  の  $n \times m (n > m)$  行列  $A$  は、以下の式のように分解される。

$$A = UWV^T \quad \dots (2.14)$$

ここで、 $U$  は  $n$  次直交行列、 $V$  は  $m$  次直交行列、 $W$  は以下の式で表される対角行列である。

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} D \\ O_{n-m,m} \end{bmatrix} \\ D &= \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \\ \sigma_1 &\geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m > 0 \end{aligned} \quad \dots (2.15)$$

式(2.14)を特異値分解の式(2.15)を用いて書き換えると、

$$WV^T \mathbf{x} = U^T \mathbf{b} \quad \cdot \cdot \cdot (2.16)$$

となる.  $\mathbf{c} = U^T \mathbf{b}$ とおくと, 式(2.16)の解全体は,

$$\{\mathbf{x} = V\mathbf{y} \mid y_i = \frac{c_i}{\sigma_i} (1 \leq i \leq m)\} \quad \cdot \cdot \cdot (2.17)$$

と表される. ここで,  $W$ の擬似的な逆行列として,

$$W^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \frac{1}{\sigma_m} \end{bmatrix} \quad \cdot \cdot \cdot (2.18)$$

を定義すると, 式(2.16)は以下のように書くことができる.

$$\mathbf{x} = VW^+U^T \mathbf{b} \quad \cdot \cdot \cdot (2.19)$$

これは式(2.13)から導くことができる

$$\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} \quad \cdot \cdot \cdot (2.20)$$

と同じ結果になる.

$A$ の階数が未知数の数より小さい場合, 解のL2 ノルムが最小になるような解を求めることが一般的である. これは, 以下のような条件付最小化問題を解くことである.

$$\mathbf{x} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}\|_2 \quad \text{subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \cdot \cdot \cdot (2.21)$$

本研究では,  $n \times m$ の行列  $A$ の階数と行数に応じて, 以下の表2.1のように解を求めることとする.

表 2.1 行列  $A$ の階数・行数と解の求め方

|         | $A$ のランク |              |
|---------|----------|--------------|
|         | $m$      | $m$ 未満       |
| $n > m$ | 二乗誤差の最小化 | 解の L2 ノルム最小化 |
| $n = m$ |          | 解の L2 ノルム最小化 |
| $n < m$ | 二乗誤差の最小化 | 解の L2 ノルム最小化 |

### 3. 圧縮センシング

#### 3.1 圧縮センシングの原理

圧縮センシングは信号のスパース性に注目することで、極めて少数のサンプリングデータから元信号を復元可能とする技術である。2006 年頃に、Donoho らや Candes らによって提唱された。ここで、信号がスパース性をもつとは、適切に基底変換を施すことにより、信号の成分の大半が 0 になることを指す。なお、圧縮センシング理論について付録 2 で説明し、本文中では、本研究に関係することだけを記述する。

圧縮センシングの基本的な問題設定は、未知ベクトルを線形観測に基づいて推定することである。X 線 CT における断面画像と投影の関係を行列とベクトルの計算式に置き換えると式 (3. 1) の形で表すことができ、これも未知ベクトルを線形観測に基づいて推定する問題である（式 (2. 10) を式 (3. 1) として再掲する）。

$$Ax = b \quad \dots (3. 1)$$

式 (3. 1) における行列  $A$  を既知としたとき、観測結果  $b$  からベクトル  $x$  を推定する問題を考える。これは  $x$  を変数とする連立方程式を解くことと等価である。2. 3. 3 でも述べたとおり、この連立方程式を通常の方法で解くためには、行列  $A$  の行数とランク、未知数  $x$  の数が等しい必要がある。また、行数が未知数の個数よりも多い場合には、最小二乗解を求めることができる。一方、行列  $A$  のランクが未知数  $x$  の数より少ない場合、解を一意に求めることができない。

このような場合の手法として、解が真に近いほど値が小さくなるような評価関数  $F(x)$  を構成し、それを最小化することが一般的である。従来手法では、評価関数  $F(x)$  として解の L2 ノルムを用いることが多い。一方、圧縮センシングにおいては、信号がスパース性を持つという仮定から、解の L1 ノルムを用いる。

元信号がスパース性を持っているとき、L1 ノルムの利用が L2 ノルムの利用より優れていることを説明する。まず、例として  $z = (z_1, z_2)$  という 2 次元ベクトルを考える。L2

ノルムを最小化する評価関数を  $F(z) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ 、L1 ノルムを最小化する評価関数を

$F(z) = |z_1| + |z_2|$  とする。このとき  $F(z)$  が  $z$  の関数としてどのような等値線をとるかを、図 3. 1 に示す。このベクトルの要素である  $z_1$  もしくは  $z_2$  の値が 0 であるとき、このベクトルは疎であるといえる。つまり、図 3. 1 中では、 $z_1$  軸上または  $z_2$  軸上の点において、ベクトルは疎である。ここで、図 3. 1 中に赤い点で示したある疎な点  $P(z_1=1, z_2=0)$  に注目する。このとき、評価関数  $F(z)$  の値は、L2 ノルム、L1 ノルム共に 1 であり、等価であることが確認できる。次に、L1 ノルムにおいて評価関数  $F(z)$  の値がこの疎な点  $P$  と等しくなるような疎でない点  $Q(z_1=0.5, z_2=0.5)$  を青い点で示す。同じ点を L2 ノルムで注目すると、点  $P$  は点  $Q$  の等値線の内側に入っており、評価関数  $F(z)$  の値は 0.7071 となっている。

以上のことから、L1 ノルムは L2 ノルムよりも疎でないベクトルの評価関数の値が

大きくなる傾向にある．したがって，L1 ノルムはL2 ノルムよりも疎な解を選びやすくなり，スパース性を持つ信号の再構成に優れていることがわかる．

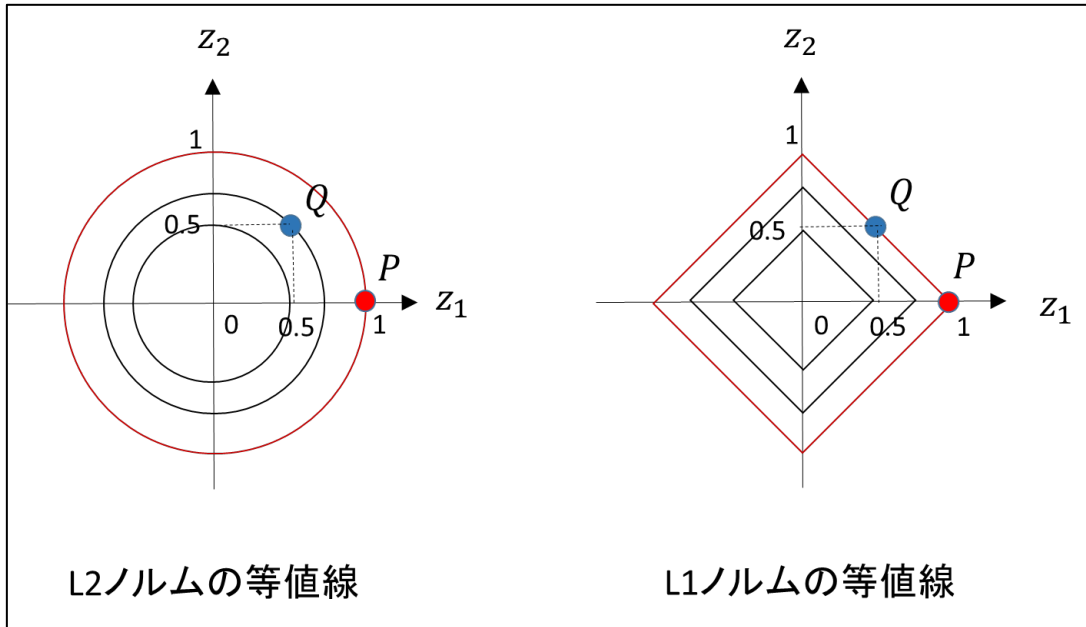


図 3.1 L1 ノルムと L2 ノルムにおけるスパース性と評価値の関係

### 3.2 L1 ノルム最小化アルゴリズム

解候補の中で L1 ノルムが最小の解を求めることが主要な圧縮センシングの問題である．そこで，以下のような条件付最小化問題を考える．

$$\mathbf{x} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \text{ subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \dots (3.2)$$

式(3.2)は，このままでは非線形最適化問題である．この問題は補助変数を導入して絶対値を外すことで，線形計画問題に帰着させることができる． $x_i$ が0以上の場合 $x_i$ に等しく， $x_i$ が0以下の場合0になる変数を $z_i^+$ ， $x_i$ が0以下の場合 $-x_i$ に等しく， $x_i$ が0以上の場合0になる変数を $z_i^-$ とする．すると，以下の式が成り立つ．

$$\begin{aligned} |x_i| &= z_i^+ + z_i^- \\ x_i &= z_i^+ - z_i^- \end{aligned} \quad \dots (3.3)$$

$$\begin{aligned} z_i^+ &\geq 0 \\ z_i^- &\geq 0 \end{aligned} \quad \dots (3.4)$$

以上の式を用いると，式(3.2)は以下のように書き換えることができる．

$$\mathbf{x} = \arg \min_{\mathbf{x}} \sum [z_i^+ + z_i^-] \text{ subject to } A(z_i^+ - z_i^-) = \mathbf{b} \quad \dots (3.5)$$

線形計画問題とは、いくつかの一次不等式および一次等式を満たす変数の値の間で、ある一次式を最大化または最小化する値を求める問題である。式(3.5)は、補助変数に関する一次式を最小化する問題である。したがって、線形計画問題である。線形計画問題は、MATLAB の関数 `linprog` を用いて解くことができる。

絶対値を含む項が複数になった場合にも、絶対値を含む項の数だけ補助変数を導入することによって、上記同様に線形計画問題に帰着させることができる。

## 4. 圧縮センシングによる投影からの画像再構成

### 4.1 シミュレーションプログラム

CT 装置には、X 線源と検出器が被写体を挟んで対向配置されている（この X 線源と検出器のペアのことを測定部と呼ぶ）。測定部は被写体の周囲を回転しながら、被写体の内部情報を取得していく。このときに、再構成画像の画質に関与する投影条件として、X 線の照射回数（投影回数）、測定部の回転角度（投影角度範囲）、検出器のサイズ（投影領域）が挙げられる。

本論文では、これらの投影条件を制限して画像再構成を行うが、投影条件を変更する度に CT 装置を用いて被写体の投影データを収集するのは、現実的でない。そこで、被写体の減衰係数を表す 2 次元画像から平行ビームを用いて投影データを取得するシミュレーションプログラムを用いて画像再構成を行う。

減衰係数を表す 2 次元画像から投影データを取得するには、ある投影角度から X 線が照射されたときに、2 次元画像の各画素が検出器の各ビンにどれだけ寄与するかを計算する必要がある。この寄与の割合を行列で表したものを観測行列とよぶ。各画素の観測行列と減衰係数を掛けることにより、検出器の各ビンにおける X 線減衰量を得ることができる。観測行列の詳細な計算式については、付録 1 に記載する。

被写体の減衰係数を表す 2 次元画像として、 $64 \times 64$  画素（4096 画素）の以下のものを使用した。

#### （I）疎画像

（i）ランダムドット画像（図 4.1）

（ii）文字画像（図 4.2）

#### （II）ファントム画像（図 4.3）

（I）の疎画像は、画像の信号がスパースな 2 値画像である。これらは、圧縮センシングにおけるスパース度（画像中の画素値が 0 でない画素の個数）による画像再構成への影響を検証するために用いる。（i）のランダムドット画像は、極力非零画素が構造を持たないよう、ランダムに画像中に 1-画素を配置したものである。これにより、画像中の構造による画像再構成への影響を無くし、スパース度の画像再構成への影響のみを調査することができる。ここでは、100-スパース（図 4.1(a)）、200-スパース（図 4.1(b)）、400-スパース（図 4.1(c)）、800-スパース（図 4.1(d)）、1600-スパース（図 4.1(e)）の 4 種類のランダムドット画像を生成し、使用する。（ii）の文字画像は、画像中の 1-画素が文字の形に配置された、構造を持つ 2 値画像である。「京」（100-スパース、図 4.2(a)）「産」（200-スパース、図 4.2(b)）「京産大」（400-スパース、図 4.2(c)）という文字の構造を持つ画像を生成し、使用する。（II）のファントム画像は、人体組織の断面を再現した濃淡画像であり、人体の代用として用いられる。ここでは、X 線画像の研究で広く用いられ

る, Shepp-Logan ファントムというデジタル 3 次元モデルから生成したファントム画像を使用する. Shepp-Logan ファントムは, 頭蓋骨を想定したひとつの大きな楕円球の中に, 脳内の特徴を表す複数の楕円球が配置されたモデルである. Shepp-Logan ファントムのある水平平面における断面画像を, ファントム画像(図 4. 3)として使用する. なお  $64 \times 64$  画素という画像サイズは実用的な観点からは不十分な大きさであるが, 画像サイズを大きくすると観測行列のメモリが大規模になり実行時間も長く要する. より大きな画像を用いた検証は今後の課題である.

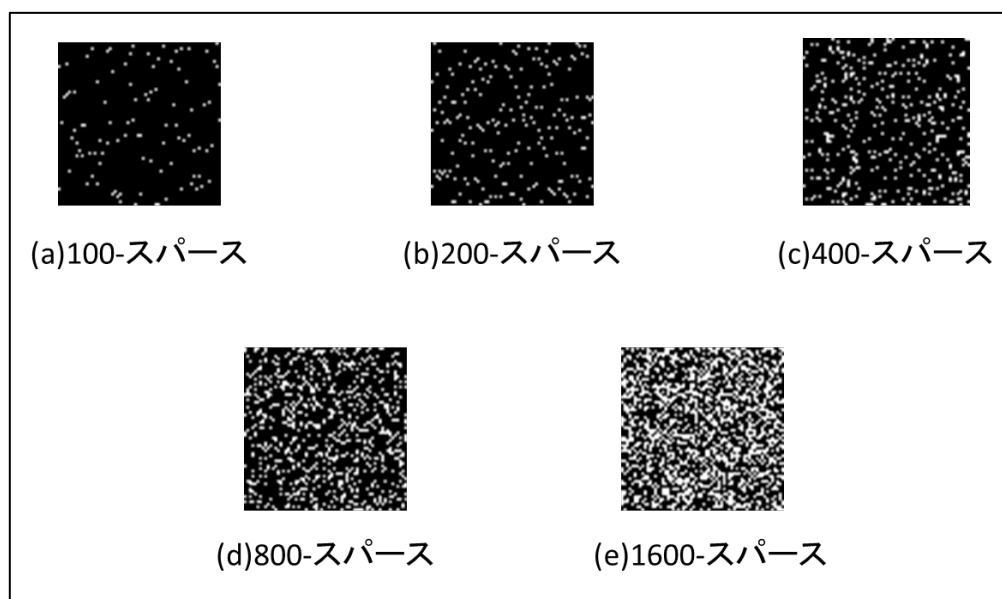


図 4. 1 ランダムドット画像

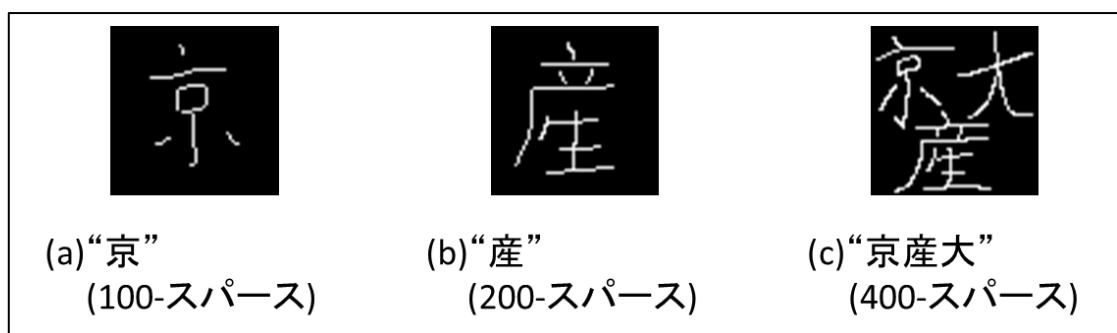


図 4. 2 文字画像



図 4. 3 ファントム画像

圧縮センシング問題は、未知のベクトル  $\mathbf{x}$  に対して、それを線形観測する行列  $A$  と観測値ベクトル  $\mathbf{b}$  が既知であるとき、 $\mathbf{x}$  がスパースであるという条件のもとで  $\mathbf{x}$  を推定することである。本論文では、スパースであるという条件を  $\mathbf{x}$  の L1 ノルムを最小にする解を求めることに帰着する。これをそのまま X 線 CT の画像再構成に応用すると、未知ベクトル  $\mathbf{x}$  は、X 線減衰率を表す画像を一次元化したベクトルになり、線形観測行列  $A$  は投影を表す行列になり、観測値ベクトル  $\mathbf{b}$  は全投影データを一次元化したベクトルになる。

再構成画像の画素値を並べたものを  $\mathbf{x}$ 、画素の行番号を  $i$ 、列番号を  $j$ 、再構成画像の一辺のピクセル数を  $p$ 、観測行列を  $A$ 、投影データを  $\mathbf{b}$  とする。上記のランダムドット画像や文字画像のように原画像そのものがスパースである場合には、最小化する評価関数  $F(\mathbf{x})$  は、以下のように解の L1 ノルムになる。

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p |x_{ij}| \quad \dots (4.1)$$

この評価関数を最小化する問題を解くことにより、再構成画像を得る。

$$\mathbf{x} = \arg \min_{\mathbf{x}} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p |x_{ij}| \quad \text{subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \dots (4.2)$$

実際の断面画像において画素値はスパースでない。全ての画素値が 0 以外の画素値を持つことが普通である。そこで、断面画像において、同一の組織内の画素値は一定であり、組織の境界上でのみ画素値が変化すると仮定すると、CT 画像の勾配画像がスパースになる。よって、評価関数は以下ようになる。

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{p-1} \{|x_{ij} - x_{i+1,j}| + |x_{ij} - x_{i,j+1}|\} \quad \dots (4.3)$$

この評価関数を最小化する問題を解くことにより、再構成画像が得られる。

$$\mathbf{x} = \arg \min_{\mathbf{x}} \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{p-1} \{|x_{ij} - x_{i+1,j}| + |x_{ij} - x_{i,j+1}|\} \quad \text{subject to } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \dots (4.4)$$

この式は補助変数を 2 つ導入することで線形計画問題に帰着させることができる。本論文では、線形計画問題を解くために、MATLAB の linprog 関数を使用した。

## 4.2 ノイズを考慮した画像再構成

シミュレーションプログラムによる投影とは異なり、実際の投影ではさまざまな誤差が生じる。実際の CT の投影データに含まれる誤差として、被写体の動きによるもの、フォトン数の揺らぎによるフォトンノイズ、計測回路で生ずる回路ノイズがある。これ



らのノイズにより、圧縮センシングにおける線形最小化問題の制約条件である等式が成立しなくなる。その結果、正しい解を導くことが困難になる。

そこで、投影データの誤差を  $\epsilon$  という非常に小さな値まで許容するように式を変形し、その条件のもとで L1 ノルムの最小化を行う。このとき、式は非線形最小化問題となる。式の詳細と解の一例については付録 3 に記述する。5 章における実験においては、ノイズについて考慮しないものとする。

### 4.3 投影領域・投影角度範囲に制限を設けない画像再構成

一般的な CT 装置において投影回数・投影領域・投影角度範囲がどのように設定されているかについて述べる。第一に、再構成画像一枚あたりの投影回数は、数百から数千である。第二に、投影領域は一回の投影で被写体全体がカバーできるような大きさである。第三に、投影角度は  $180^\circ$  または  $360^\circ$  である。投影角度を  $180^\circ$  としたときの撮影をハーフスキャン、 $360^\circ$  としたときの撮影をフルスキャンと呼ぶ。フルスキャンの方がハーフスキャンよりも画質において優れているが、被曝量の増大や被写体の動きによるアーチファクトの発生という理由から、ハーフスキャンを採用している装置が多く存在する。

上記の一般的な CT 装置の投影条件を考慮し、投影条件に制限を設けない画像再構成においては、投影領域を断面画像の一边の長さの  $\sqrt{2}$  倍、投影角度範囲を  $180^\circ$  とした。これらの条件のもとで投影回数を変更し、どの程度の投影回数があれば十分な再構成画像が得られるかを検証した。投影回数の変更について図 4.4 に示す。これは、投影角度を  $180^\circ$  に設定したときに、投影回数を 4 回から 2 回に減少させた例である。このように、投影は投影角度範囲を投影回数で割った角度刻みで行った。再構成画像の画質評価には、ピーク信号対雑音比 (PSNR) を使用し、PSNR が 40dB 以上であれば、十分な再構成画像が得られたと判断した。

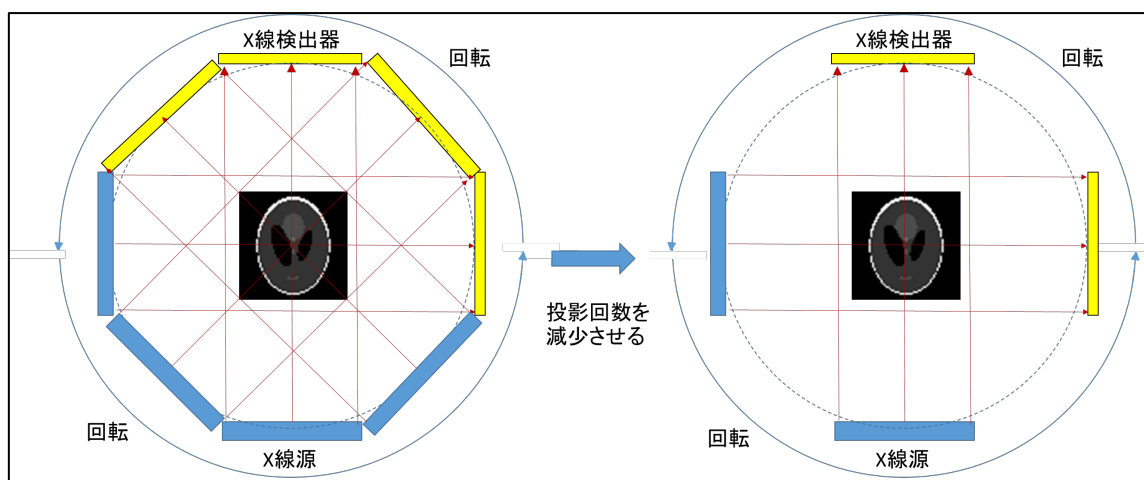


図 4.4 投影回数の変更

#### 4.4 投影領域・投影角度範囲に制限を設けた画像再構成

投影領域・投影角度範囲をそれぞれ制限した投影を行い、そのデータを用いて圧縮センシングによる画像再構成を行った。投影領域制限について図 4.5 に、投影角度範囲制限について図 4.6 に示す。投影回数は、4.3 において十分な再構成画像を得られる最低限の投影回数と、その回数の 2 倍の投影回数を設定した。投影角度は、 $10^{\circ}$  から  $180^{\circ}$  まで、 $10^{\circ}$  刻みで増加させていき、それぞれ画像再構成を行った。投影領域は、制限を設けない場合の 10% から 100% まで、10% 刻みで増加させていき、それぞれ画像再構成を行った。これにより、投影領域、投影角度範囲がそれぞれ制限された状況において、十分な画像再構成が可能であるか検証した。再構成画像の画質評価には、投影領域・投影角度範囲に制限を設けない画像再構成と同様にピーク信号対雑音比 (PSNR) を使用し、PSNR が 40dB 以上であれば、十分な再構成画像が得られたと判断した。

また、この実験において、ランダムドット画像については 400-スパースの画像を用いて実験を行った。これは、ファントム画像の勾配画像が 502-スパースであり、実験に用いたランダムドット画像の中では 400-スパースのランダムドット画像が最もスパース度が近いためである。

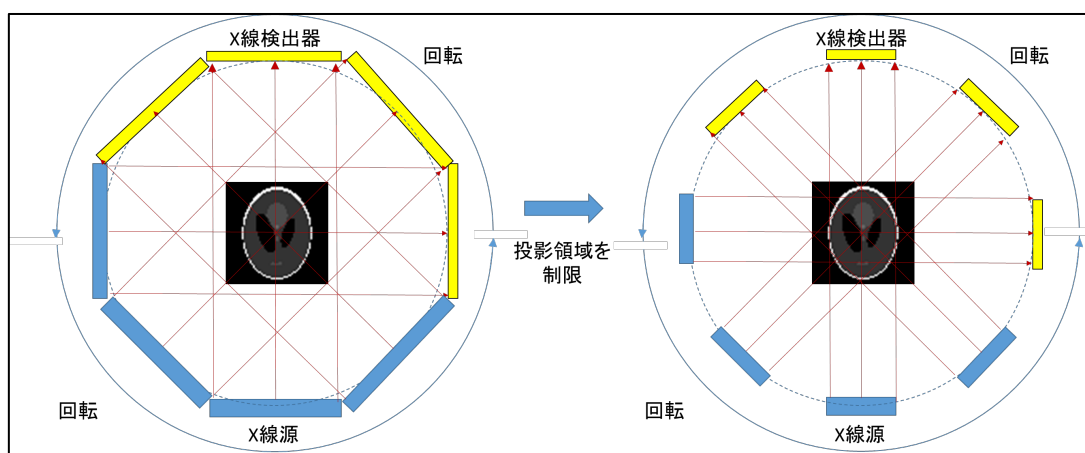


図 4.5 投影領域制限の概要

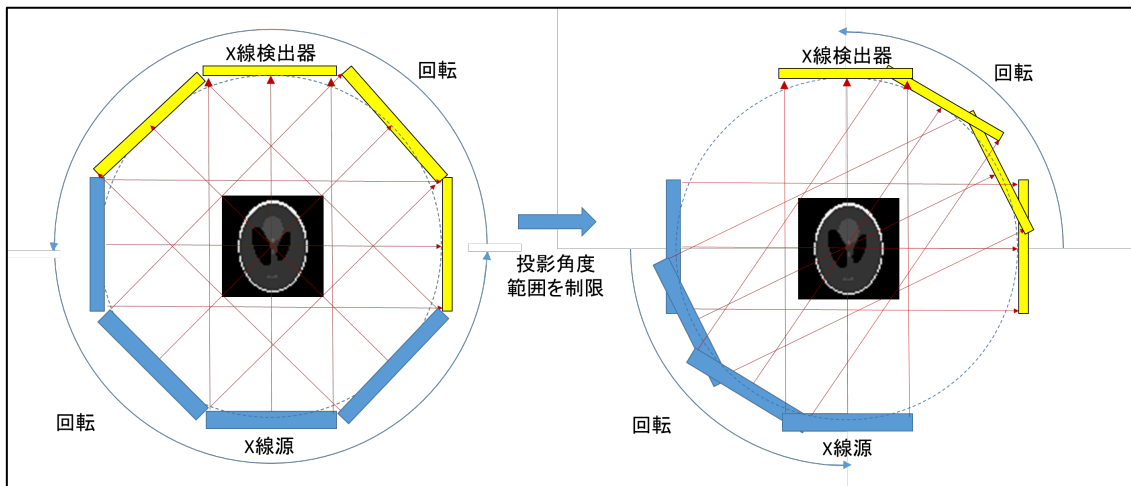


図 4.6 投影角度範囲制限の概要

## 5. 実験と考察

### 5.1 疎画像の再構成

#### 5.1.1 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合

投影領域と投影角度範囲に制限がない場合の, 各投影回数におけるランダムドット画像の再構成画像を図 5.1～図 5.5 に, PSNR を図 5.6 に示す. 100-スパースのランダムドット画像は投影回数が 6 回以上, 200-スパースでは投影回数が 9 回以上, 400-スパースでは投影回数が 17 回以上, 800-スパースでは投影回数が 32 回以上, 1600-スパースでは投影回数が 65 回以上のときに PSNR が 40dB 以上となり, 十分な再構成画像が得られた.

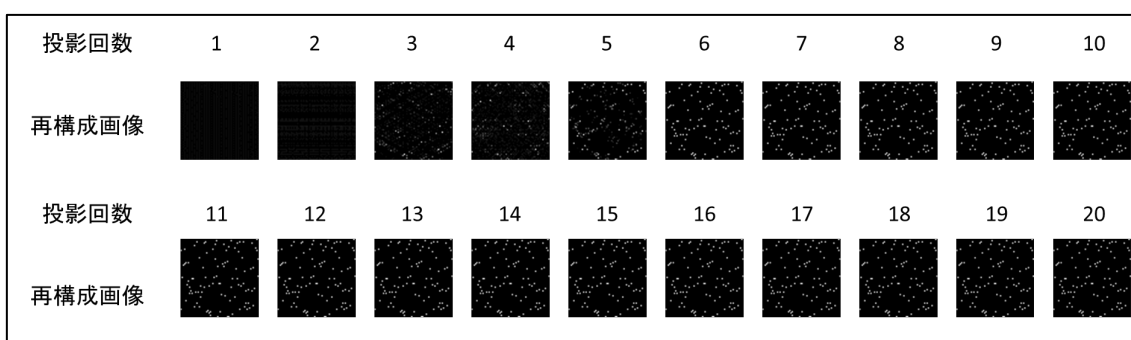


図 5.1 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合の再構成画像  
(ランダムドット画像, 100-スパース)

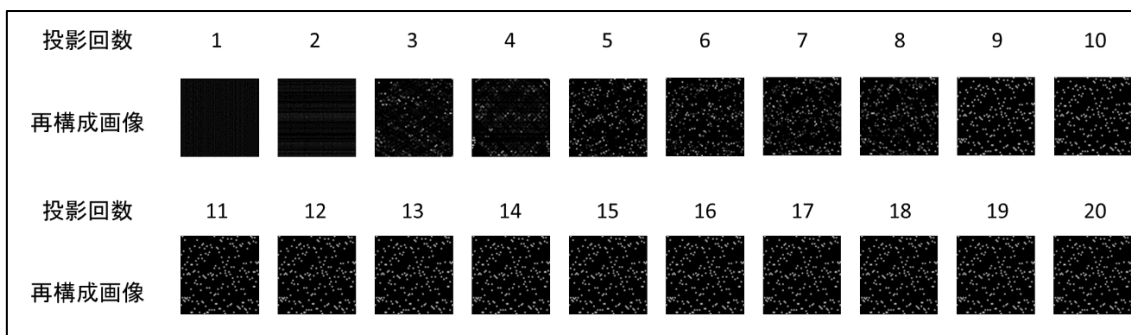


図 5.2 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合の再構成画像  
(ランダムドット画像, 200-スパース)

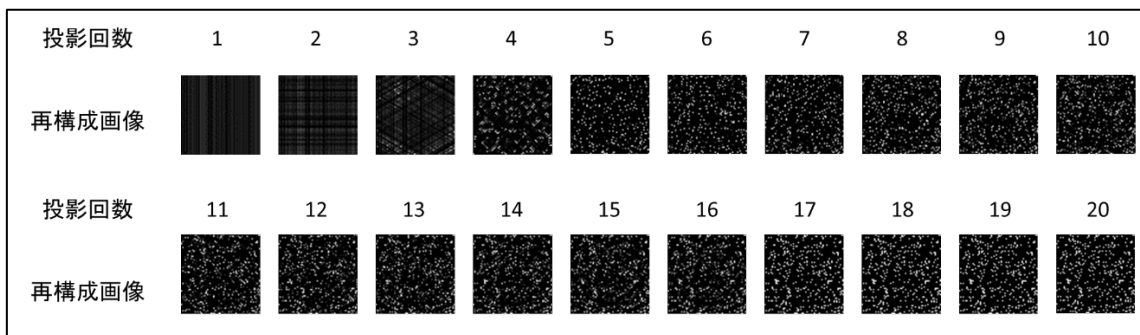


図 5.3 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合の再構成画像  
(ランダムドット画像, 400-スパース)

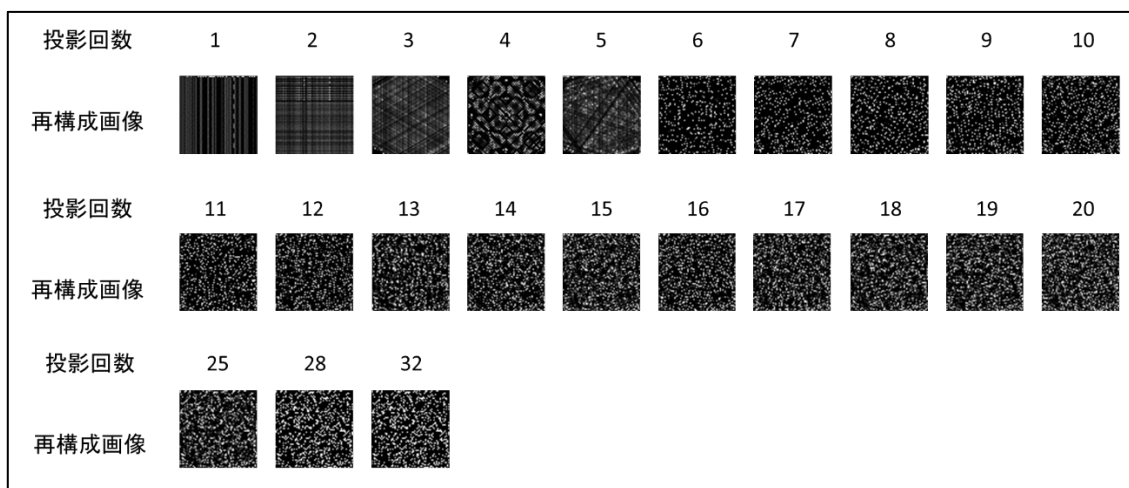


図 5.4 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合の再構成画像  
(ランダムドット画像, 800-スパース)

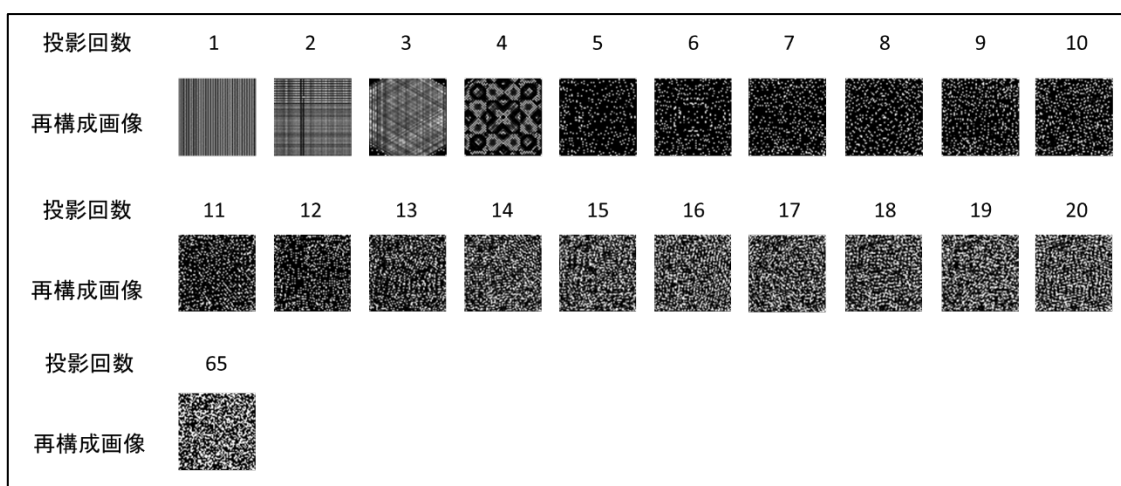


図 5.5 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合の再構成画像  
(ランダムドット画像, 1600-スパース)

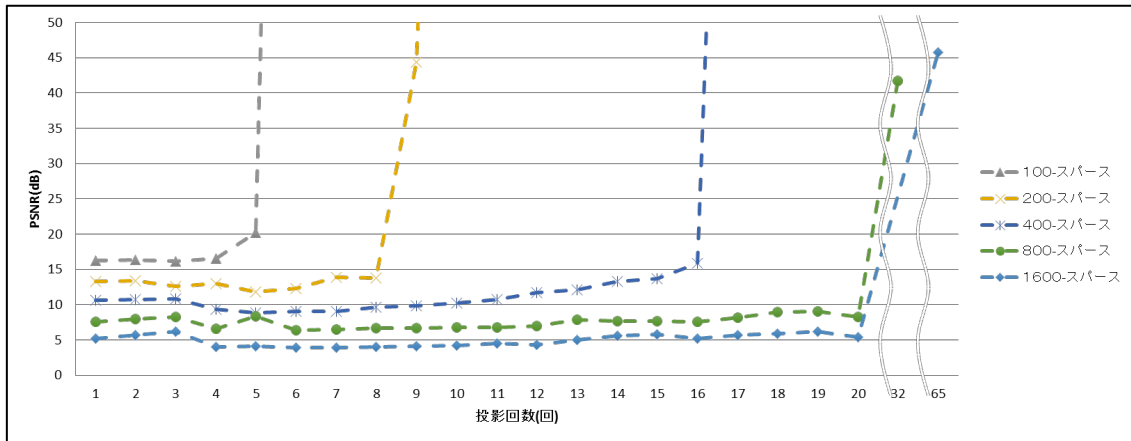


図 5.6 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合の再構成画像の PSNR  
(ランダムドット画像)

投影領域と投影角度範囲に制限がない場合の、各投影回数における文字画像の再構成画像を図 5.7～図 5.9 に、PSNR を図 5.10 に示す。100-スパースの文字画像“京”は投影回数が 6 回以上、200-スパースの文字画像“産”では投影回数が 8 回以上、400-スパースの文字画像“京産大”では投影回数が 12 回以上のときに十分な再構成画像が得られた。

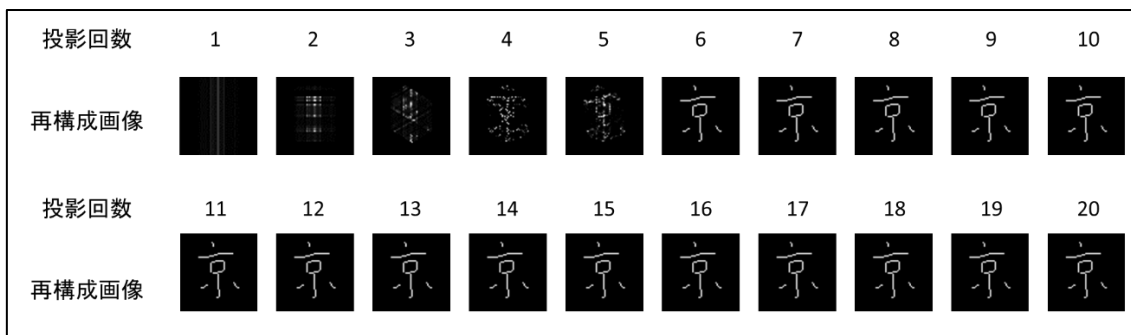


図 5.7 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合の再構成画像  
(文字画像“京”, 100-スパース)

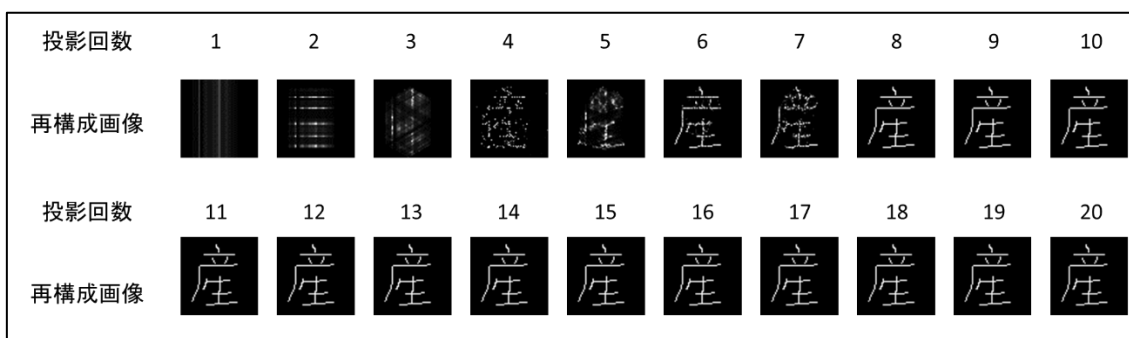


図 5.8 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合の再構成画像  
(文字画像“産”, 200-スパース)

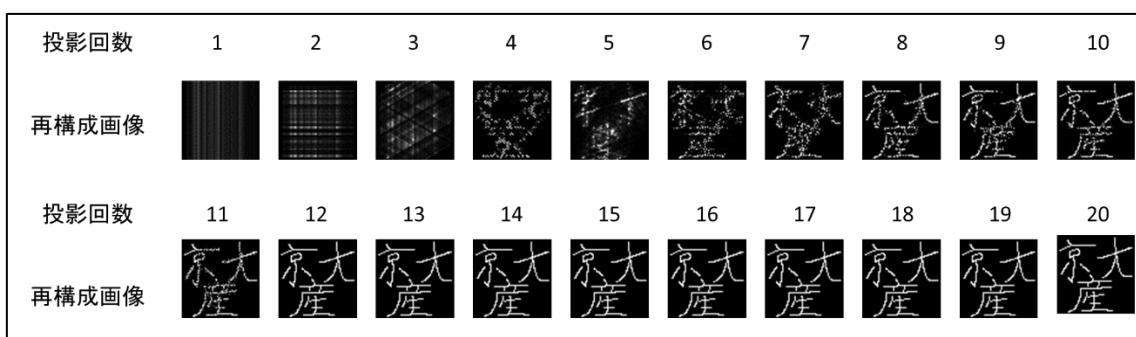


図 5.9 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合の再構成画像  
(文字画像“京産大”, 400-スパース)

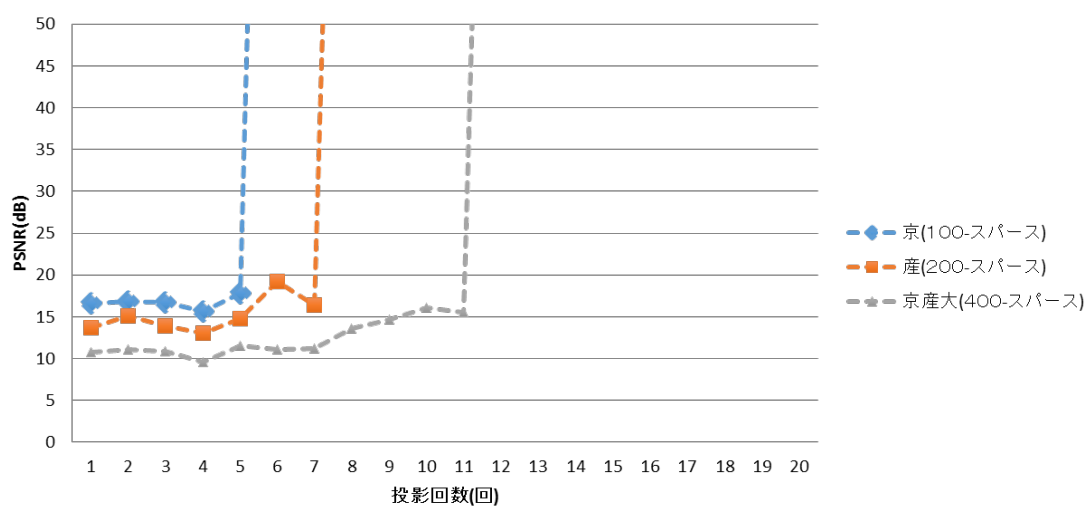


図 5.10 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合の再構成画像の PSNR(文字画像)

### 5.1.2 投影領域に制限を設けた場合

400-スパースのランダムドット画像に対し、投影領域に制限を設けて投影を行い、画

像再構成を行った．投影回数を最低投影回数に設定したときの再構成画像を図 5.11 に，投影回数を最低投影回数の 2 倍に設定したときの再構成画像を図 5.12 に示す．また，再構成画像の PSNR を図 5.13 に示す．投影回数を最低投影回数に設定したときには投影領域が 70%以上のときに，投影回数を最低投影回数の 2 倍に設定したときには投影領域が 40%以上のときに，十分な再構成画像が得られた．

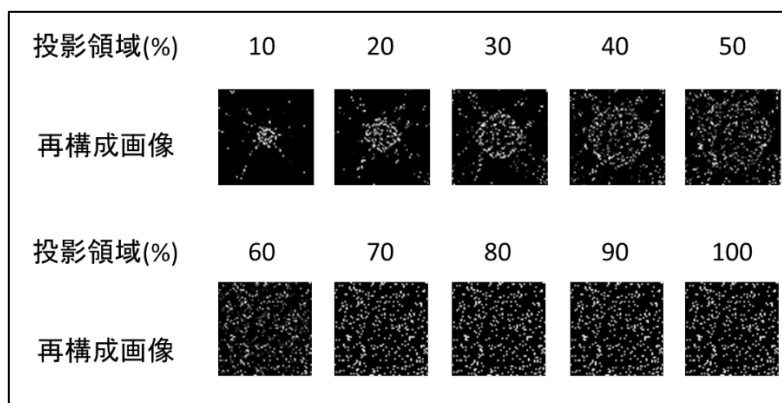


図 5.11 投影領域に制限を設けた場合の再構成画像  
(ランダムドット画像, 400-スパース, 投影回数=最低投影回数)

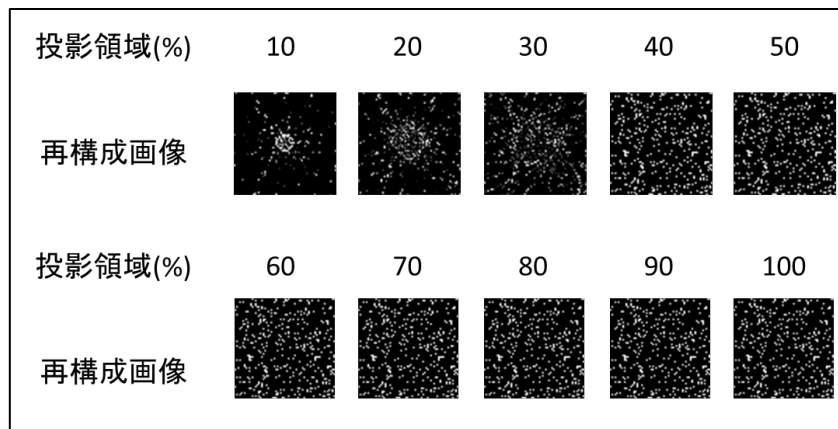


図 5.12 投影領域に制限を設けた場合の再構成画像  
(ランダムドット画像, 400-スパース, 投影回数=最低投影回数の 2 倍)



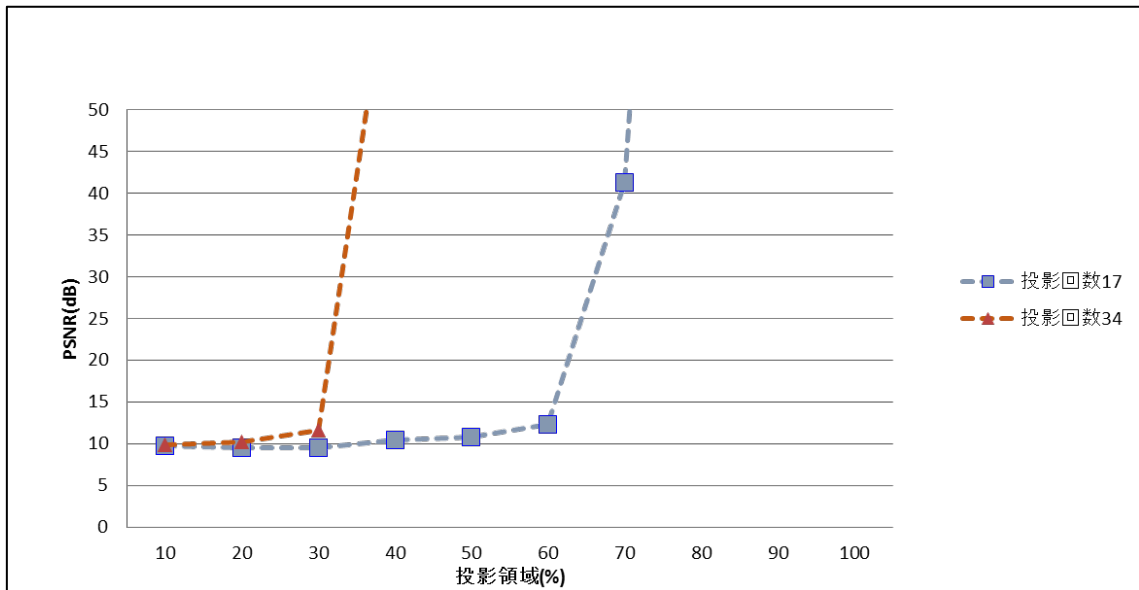


図 5.13 投影領域に制限を設けた場合の再構成画像の PSNR  
(ランダムドット画像, 400-スパース)

文字画像に対し、投影領域に制限を設けて投影を行い、画像再構成を行った。“京”，“産”，“京産大”という文字画像に対して投影回数を最低投影回数に設定したときの再構成画像をそれぞれ図 5.14，図 5.17，図 5.20 に，投影回数を最低投影回数の 2 倍に設定したときの再構成画像をそれぞれ図 5.15，図 5.18，図 5.21 に示す。また，再構成画像の PSNR をそれぞれ図 5.16，図 5.19，図 5.22 に示す。投影回数を最低投影回数に設定したときには，文字画像“京”は投影領域が 40%以上のときに，文字画像“産”は投影領域が 50%以上のときに，文字画像“京産大”は投影領域が 60%以上のときに，それぞれ十分な再構成画像が得られた。投影回数を最低投影回数の 2 倍に設定したときには文字画像“京”は投影領域が 30%以上のときに，文字画像“産”は投影領域が 40%以上のときに，文字画像“京産大”は投影領域が 50%以上のときに，それぞれ十分な再構成画像が得られた。

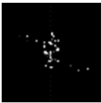
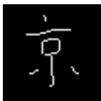
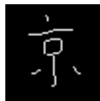
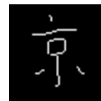
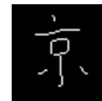
|         |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 投影領域(%) | 10                                                                                | 20                                                                                | 30                                                                                | 40                                                                                 | 50                                                                                  |
| 再構成画像   |  |  |  |  |  |
| 投影領域(%) | 60                                                                                | 70                                                                                | 80                                                                                | 90                                                                                 | 100                                                                                 |
| 再構成画像   |  |  |  |  |  |

図 5.14 投影領域に制限を設けた場合の再構成画像  
(文字画像“京”, 100-スパース, 投影回数=最低投影回数)

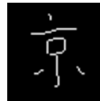
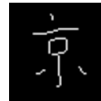
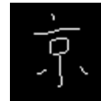
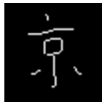
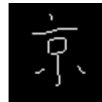
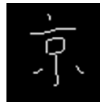
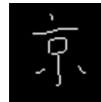
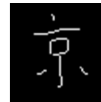
|         |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                      |                                                                                       |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 投影領域(%) | 10                                                                                  | 20                                                                                  | 30                                                                                  | 40                                                                                   | 50                                                                                    |
| 再構成画像   |   |   |   |   |   |
| 投影領域(%) | 60                                                                                  | 70                                                                                  | 80                                                                                  | 90                                                                                   | 100                                                                                   |
| 再構成画像   |  |  |  |  |  |

図 5.15 投影領域に制限を設けた場合の再構成画像  
(文字画像“京”, 100-スパース, 投影回数=最低投影回数の2倍)

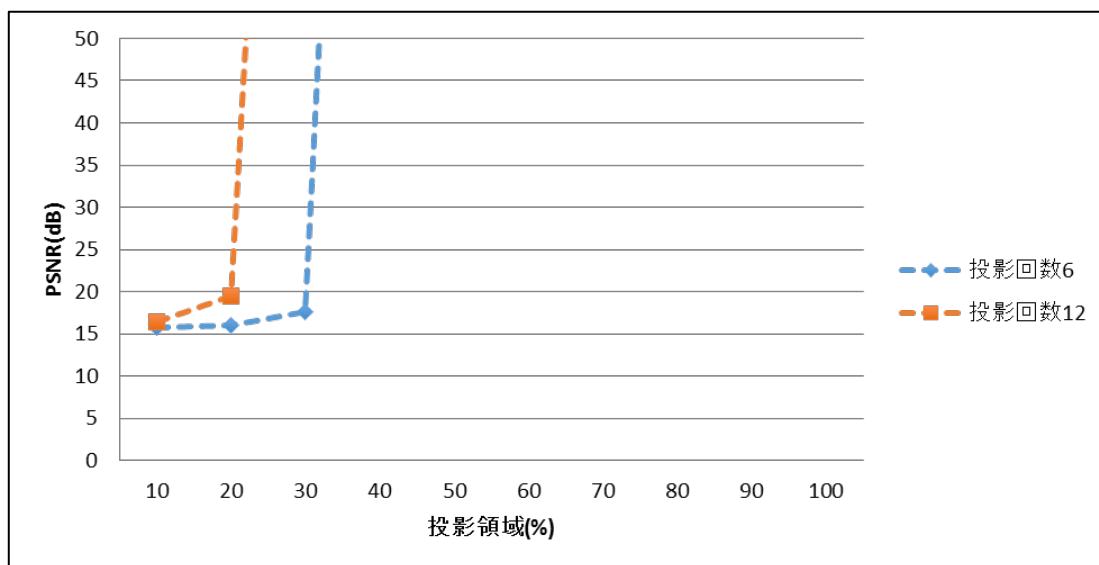


図 5.16 投影領域に制限を設けた場合の再構成画像の PSNR  
(文字画像“京”, 100-スパース)

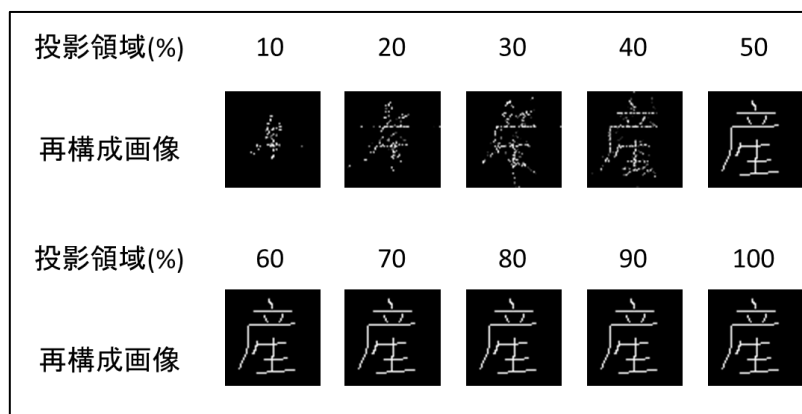


図 5.17 投影領域に制限を設けた場合の再構成画像  
(文字画像“産”, 200-スパース, 投影回数=最低投影回数)

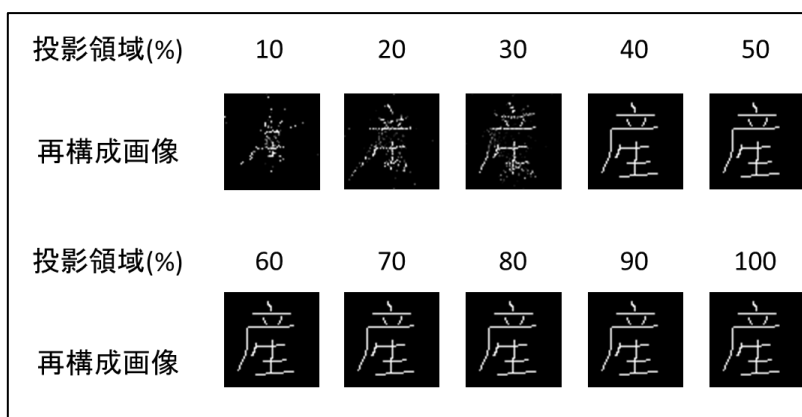


図 5.18 投影領域に制限を設けた場合の再構成画像  
(文字画像“産”, 200-スパース, 投影回数=最低投影回数の 2 倍)

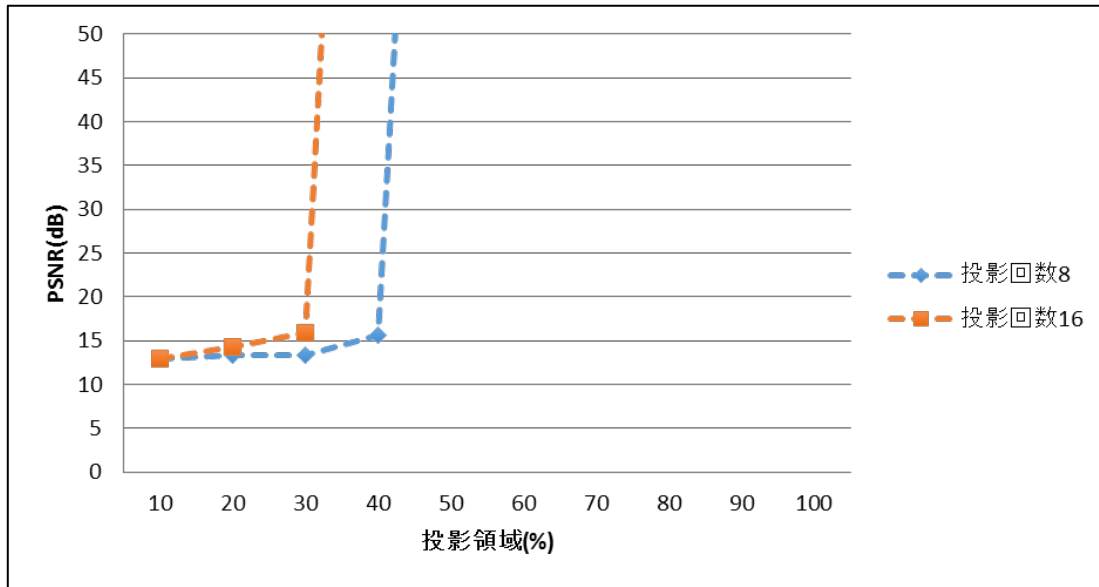


図 5.19 投影領域に制限を設けた場合の再構成画像の PSNR  
(文字画像“産”, 200-スパース)

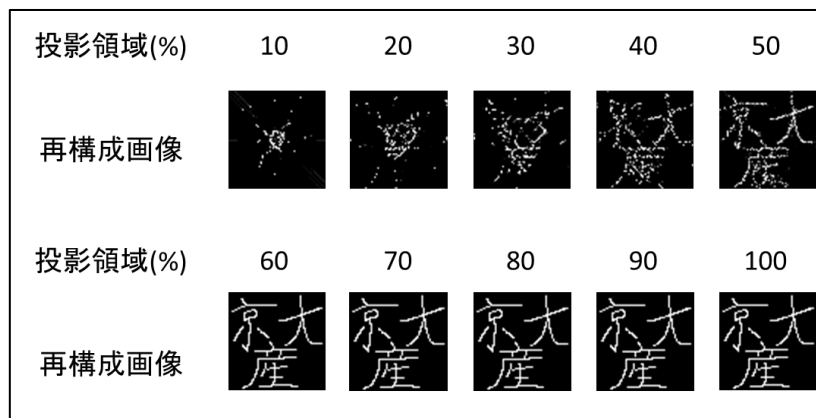


図 5.20 投影領域に制限を設けた場合の再構成画像  
(文字画像“京産大”, 400-スパース, 投影回数=最低投影回数)

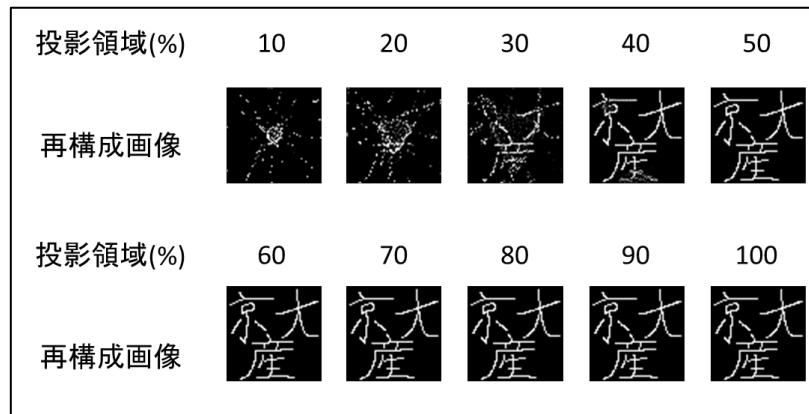


図 5.21 投影領域に制限を設けた場合の再構成画像  
(文字画像“京産大”, 400-スパース, 投影回数=最低投影回数の2倍)

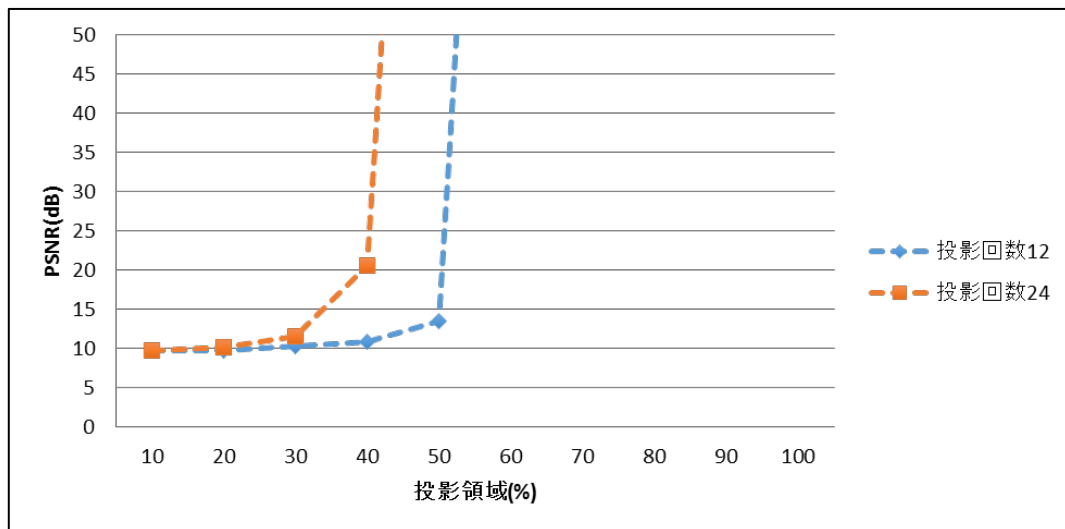


図 5.22 投影領域に制限を設けた場合の再構成画像の PSNR  
(文字画像“京産大”, 400-スパース)

### 5.1.3 投影角度範囲に制限を設けた場合

400-スパースのランダムドット画像に対し, 投影角度範囲に制限を設けて投影を行い, 画像再構成を行った. 投影回数を最低投影回数に設定したときの再構成画像を図 5.23 に, 投影回数を最低投影回数の2倍に設定したときの再構成画像を図 5.24 に示す. また, 再構成画像の PSNR を図 5.25 に示す. 投影回数を最低投影回数に設定したときには投影角度範囲が  $110^\circ$  以上 ( $130^\circ$  を除く) のときに, 投影回数を最低投影回数の2倍に設定したときには投影角度範囲が  $50^\circ$  以上 ( $80^\circ$  を除く) のときに, 十分な再構成画像が得られた. (なお, この実験結果のように, 本来ならば十分な再構成画像が得られるはずの条件でありながら, それに失敗する場合がある. これはプログラムに存在するバ

グによるものであると思われる.)

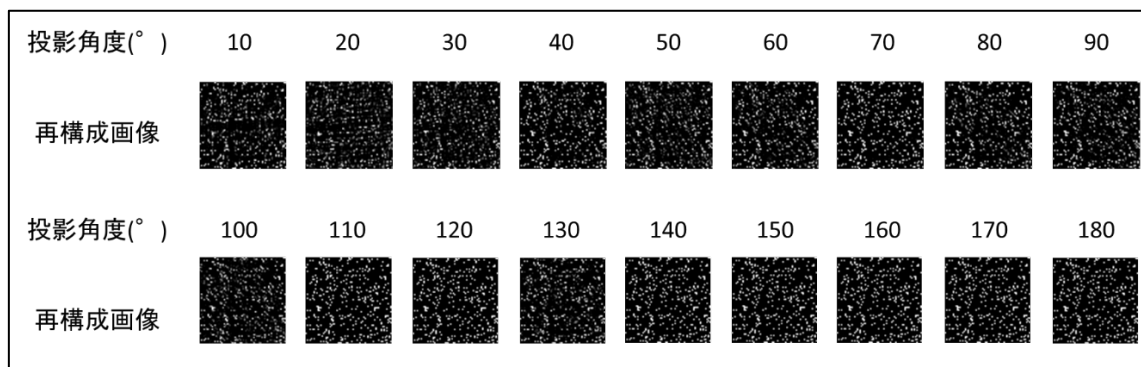


図 5.23 投影角度範囲に制限を設けた場合の再構成画像  
(ランダムドット画像, 400-スパース, 投影回数=最低投影回数)

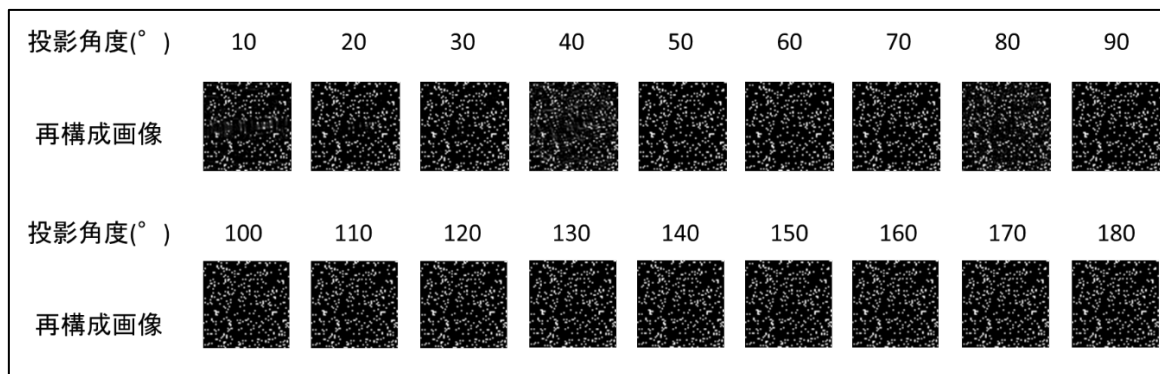


図 5.24 投影角度範囲に制限を設けた場合の再構成画像  
(ランダムドット画像, 400-スパース, 投影回数=最低投影回数の 2 倍)

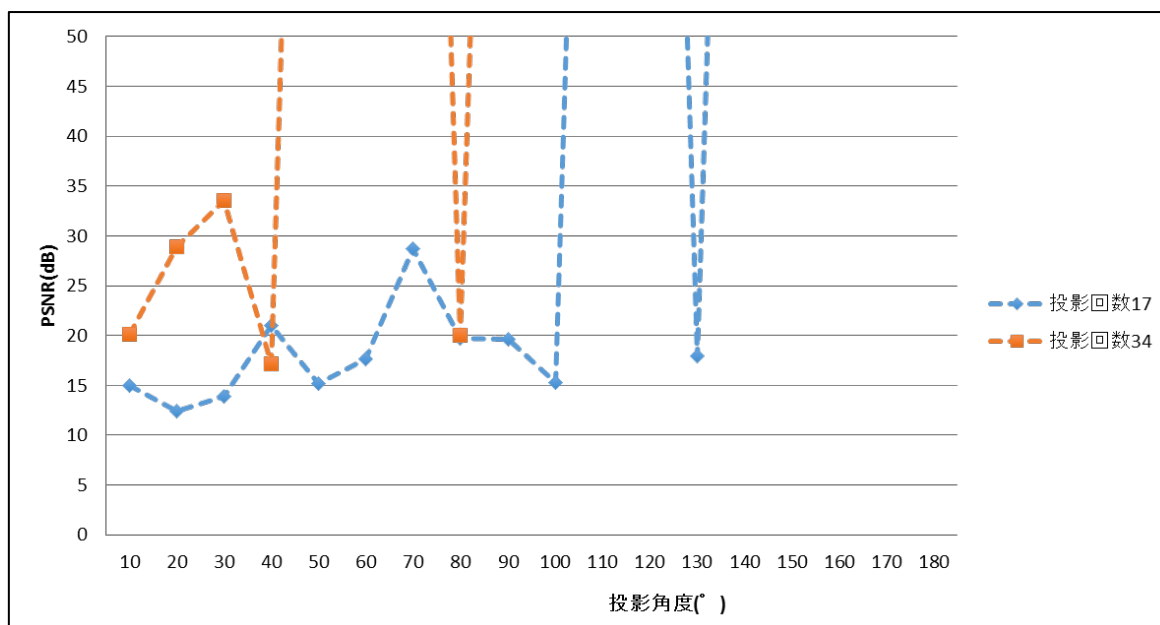


図 5.25 投影角度範囲に制限を設けた場合の再構成画像の PSNR  
(ランダムドット画像, 400-スパース)

文字画像に対し、投影角度範囲に制限を設けて投影を行い、画像再構成を行った。“京”，“産”，“京産大”という文字画像に対して投影回数を最低投影回数に設定したときの再構成画像をそれぞれ図 5.26，図 5.29，図 5.32 に、投影回数を最低投影回数の 2 倍に設定したときの再構成画像をそれぞれ図 5.27，図 5.30，図 5.33 に示す。また、再構成画像の PSNR をそれぞれ図 5.28，図 5.31，図 5.34 に示す。投影回数を最低投影回数に設定したときには、文字画像“京”は投影角度範囲が  $110^\circ$  以上のときに、文字画像“産”は投影角度範囲が  $130^\circ$  以上( $170^\circ$  を除く)のときに、文字画像“京産大”は投影角度範囲が  $160^\circ$  以上のときに、それぞれ十分な再構成画像が得られた。投影回数を最低投影回数の 2 倍に設定したときには文字画像“京”は投影角度範囲が  $50^\circ$  以上のときに、文字画像“産”は投影角度範囲が  $90^\circ$  以上のときに、文字画像“京産大”は投影角度範囲が  $80^\circ$  以上( $90^\circ$  は除く)のときに、それぞれ十分な再構成画像が得られた。

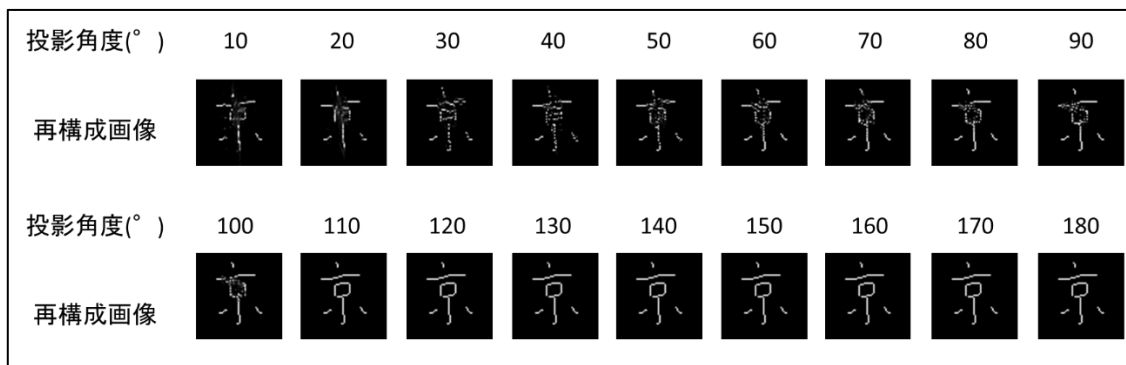


図 5.26 投影角度範囲に制限を設けた場合の再構成画像  
(文字画像“京”，100-スパース，投影回数＝最低投影回数)

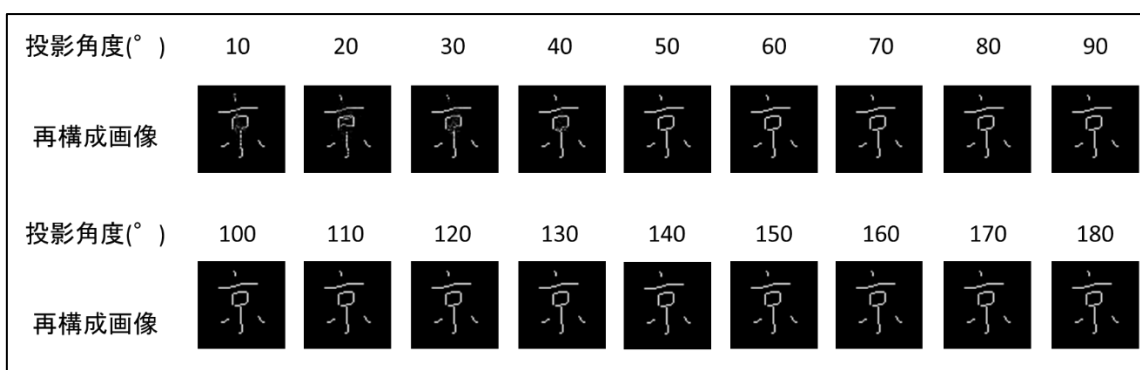


図 5.27 投影角度範囲に制限を設けた場合の再構成画像  
(文字画像“京”，100-スパース，投影回数＝最低投影回数の 2 倍)

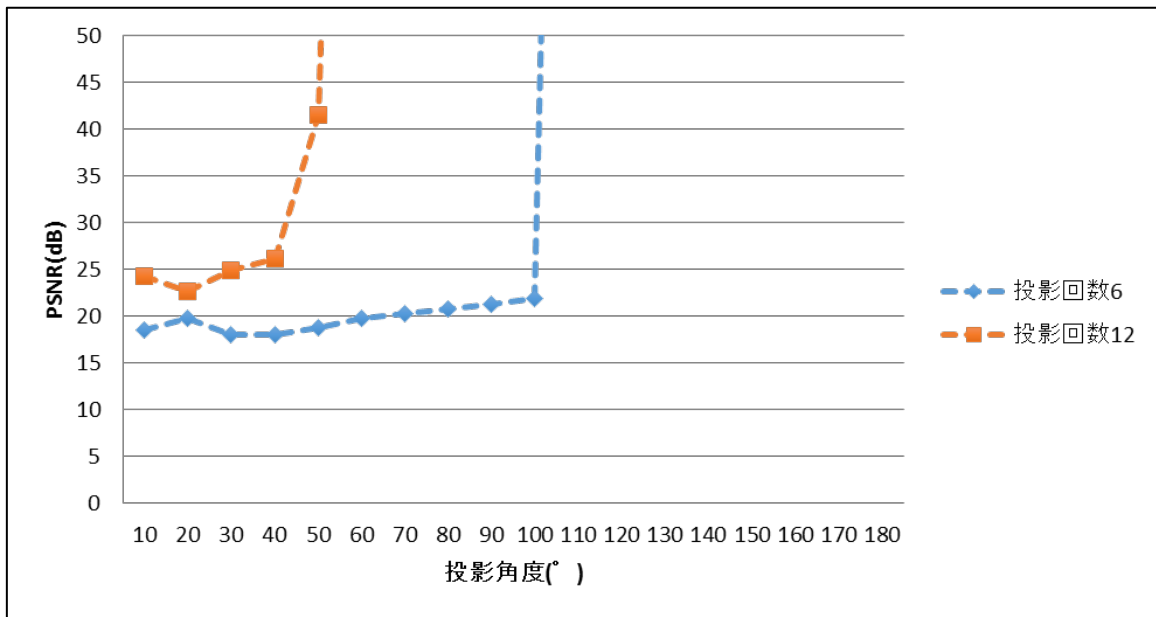


図 5.28 投影角度範囲に制限を設けた場合の再構成画像の PSNR  
(文字画像“京”, 100-スパース)

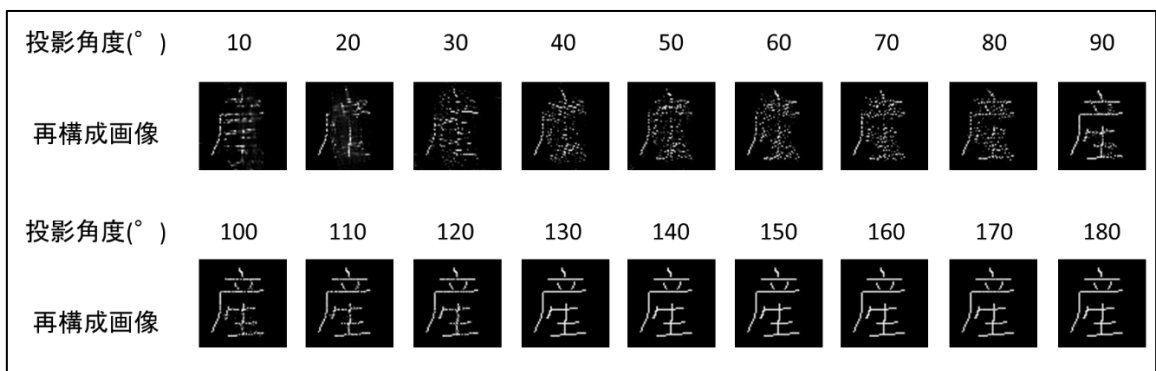


図 5.29 投影角度範囲に制限を設けた場合の再構成画像  
(文字画像“産”, 200-スパース, 投影回数=最低投影回数)

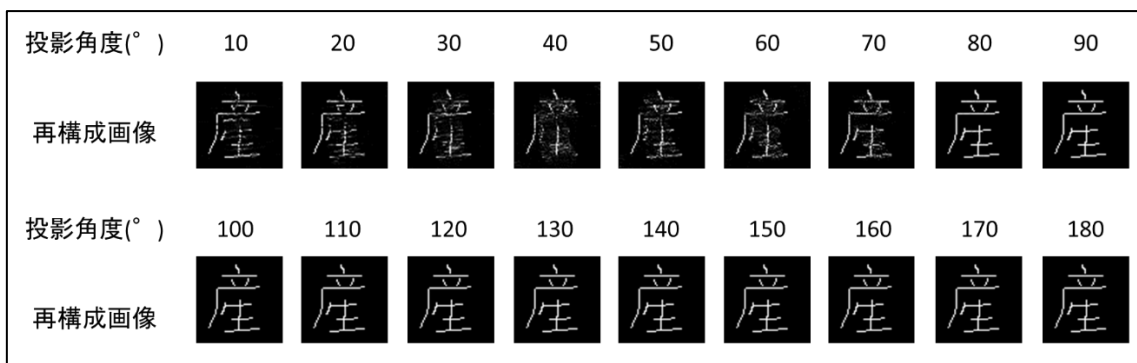


図 5.30 投影角度範囲に制限を設けた場合の再構成画像  
(文字画像“産”, 200-スパース, 投影回数=最低投影回数の 2 倍)



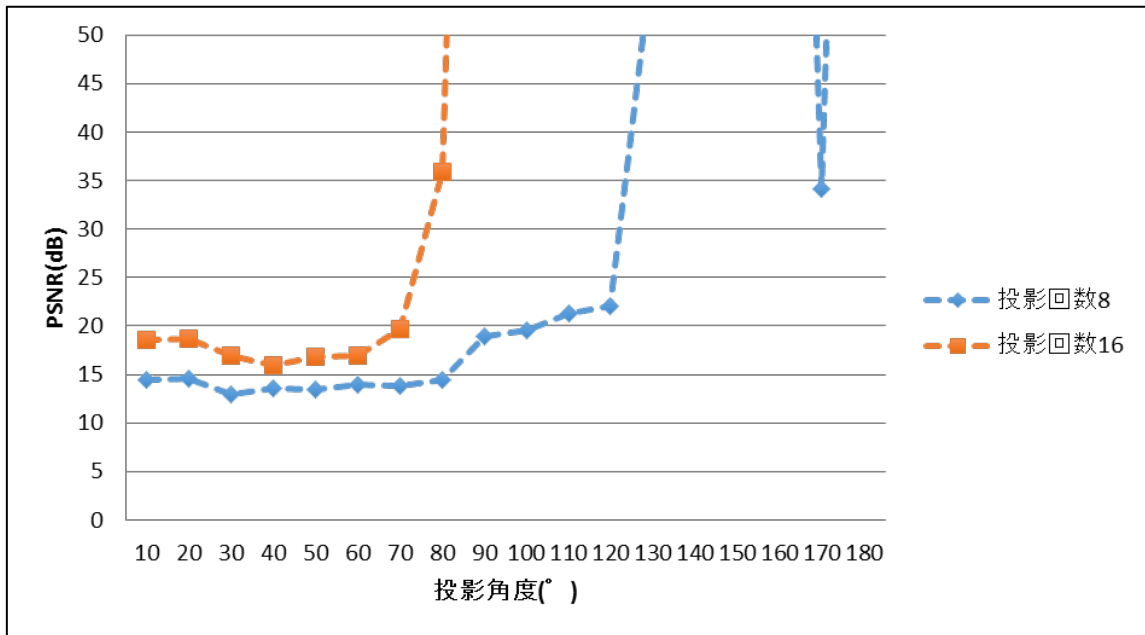


図 5.31 投影角度範囲に制限を設けた場合の再構成画像の PSNR  
(文字画像“産”, 200-スパース)

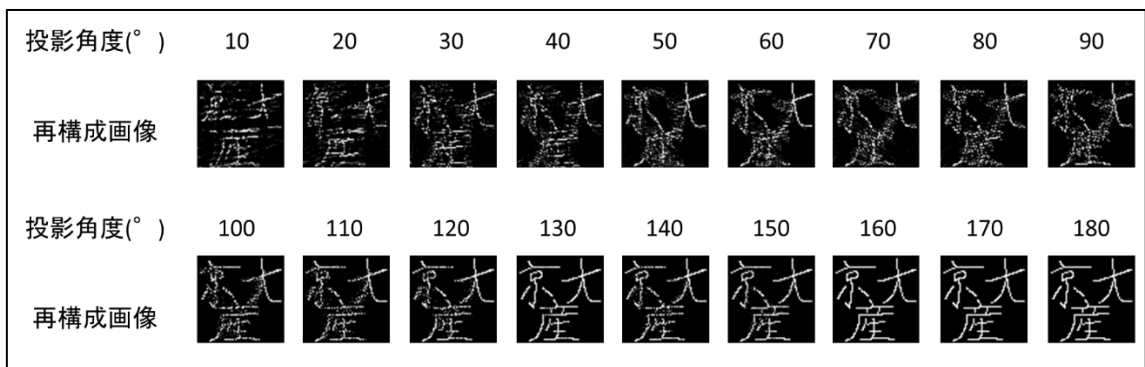


図 5.32 投影角度範囲に制限を設けた場合の再構成画像  
(文字画像“京産大”, 400-スパース, 投影回数=最低投影回数)

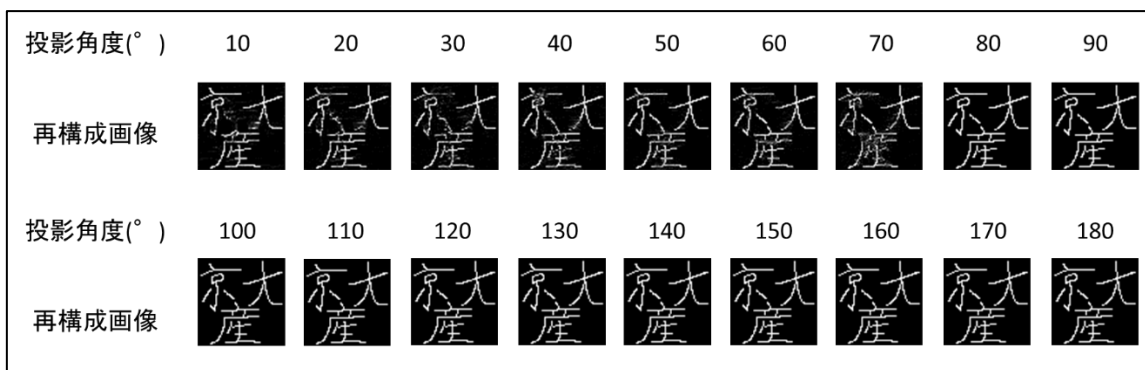


図 5.33 投影角度範囲に制限を設けた場合の再構成画像  
(文字画像“京産大”, 400-スパース, 投影回数=最低投影回数の 2 倍)

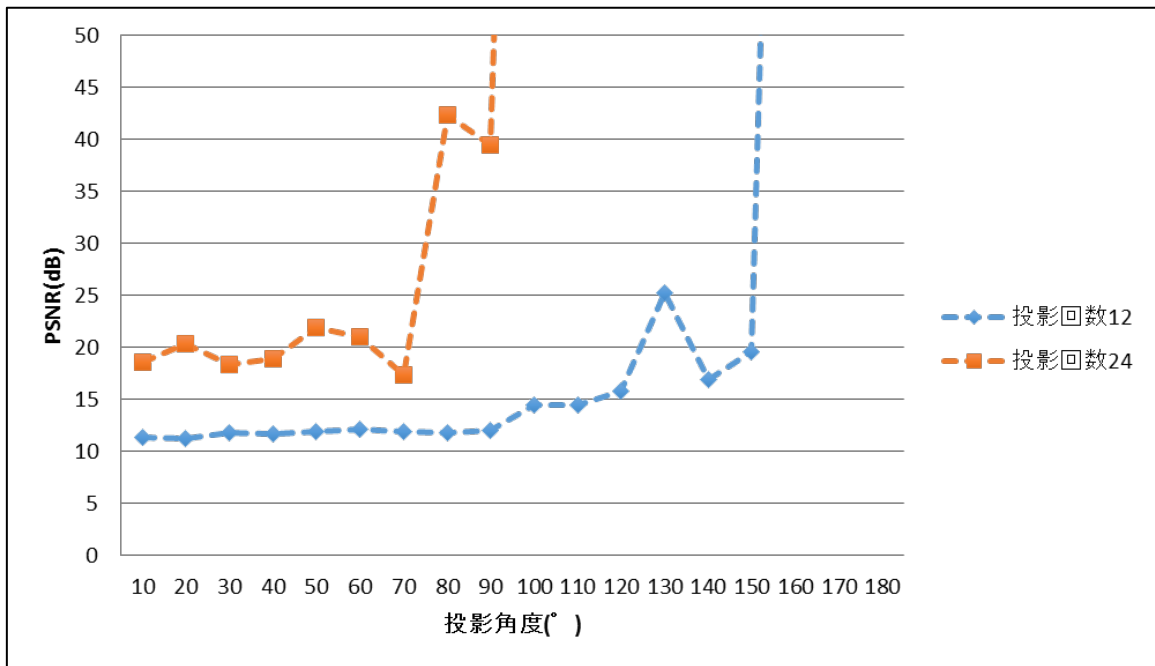


図 5.34 投影角度範囲に制限を設けた場合の再構成画像の PSNR  
(文字画像 “京産大”, 400-スパース)

## 5.2 ファントム画像の再構成

### 5.2.1 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合

投影領域と投影角度範囲に制限がない場合の, 各投影回数におけるファントム画像の再構成画像を図 5.35 に, 再構成画像の PSNR を図 5.36 に示す. 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合では, 投影回数が 14 回以上のときに PSNR が 40dB 以上となり, 十分な再構成画像が得られた.

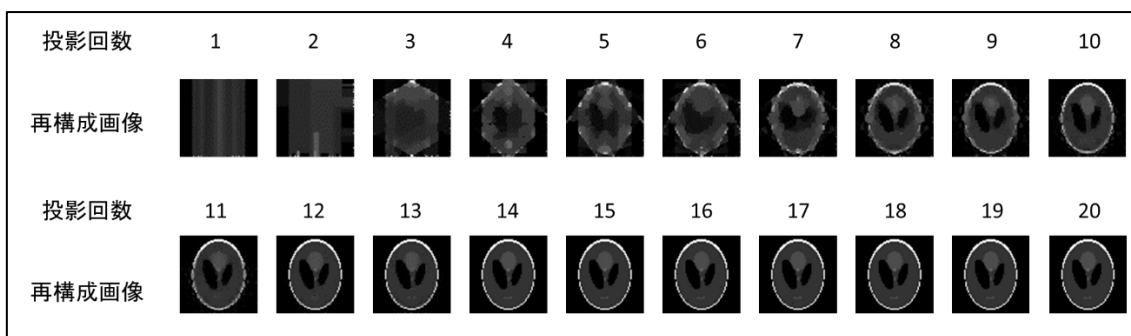


図 5.35 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合の再構成画像(ファントム画像)

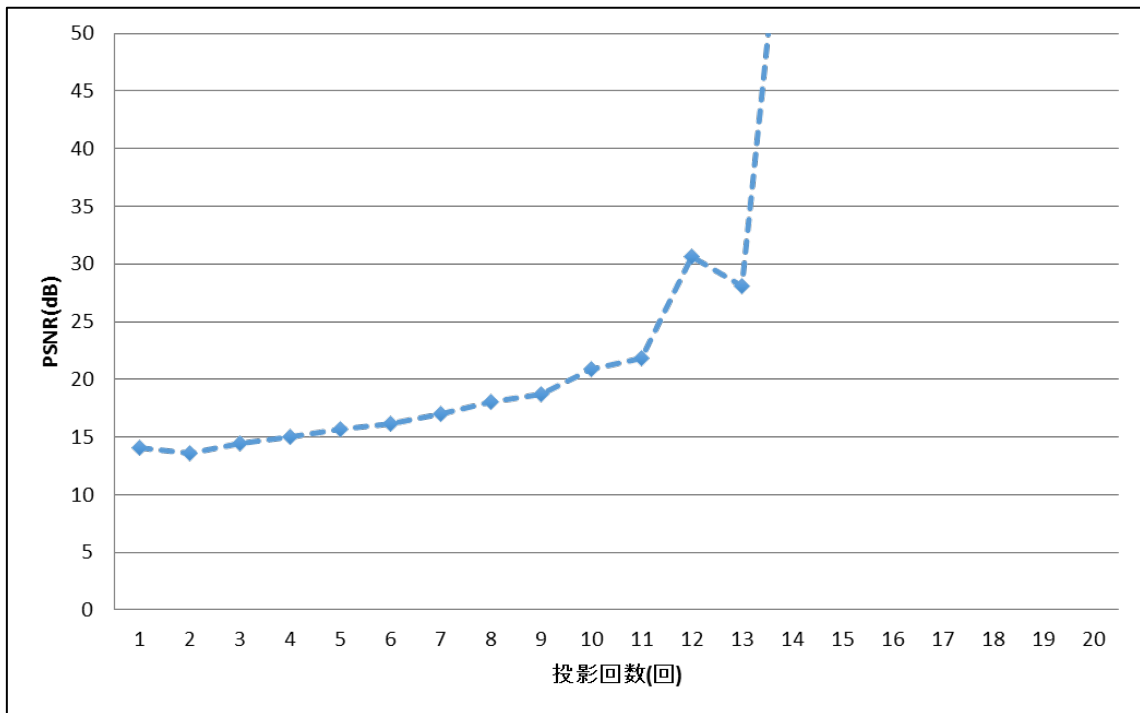


図 5.36 投影領域・投影角度範囲に制限がない場合の再構成画像の PSNR  
(ファントム画像)

### 5.2.2 投影領域に制限を設けた場合

ファントム画像に対し，投影領域に制限を設けて投影を行い，画像再構成を行った．投影回数を最低投影回数に設定したときの再構成画像を図 5.37 に，投影回数を最低投影回数の 2 倍に設定したときの再構成画像を図 5.38 に示す．また，再構成画像の PSNR を図 5.39 に示す．投影回数を最低投影回数に設定したときには投影領域が 70%以上のときに，投影回数を最低投影回数の 2 倍に設定したときには投影領域が 60%以上のときに，十分な再構成画像が得られた．

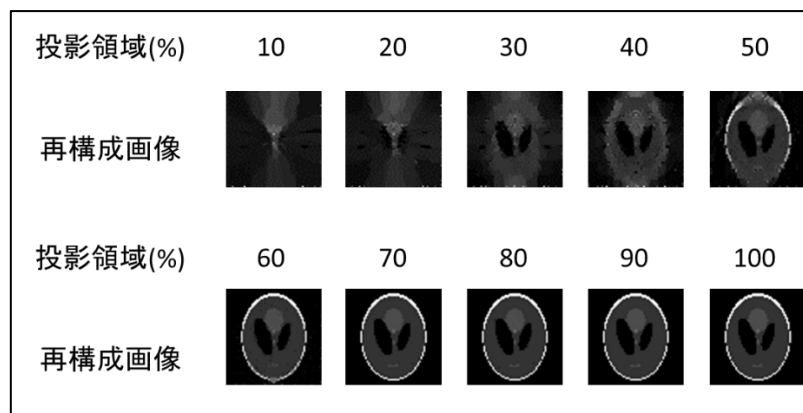


図 5.37 投影領域に制限を設けた場合の再構成画像  
(ファントム画像, 投影回数＝最低投影回数)

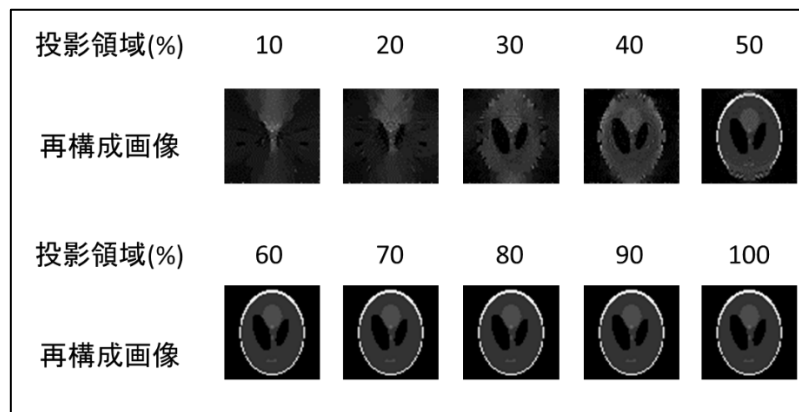


図 5.38 投影領域に制限を設けた場合の再構成画像  
(ファントム画像, 投影回数=最低投影回数の 2 倍)

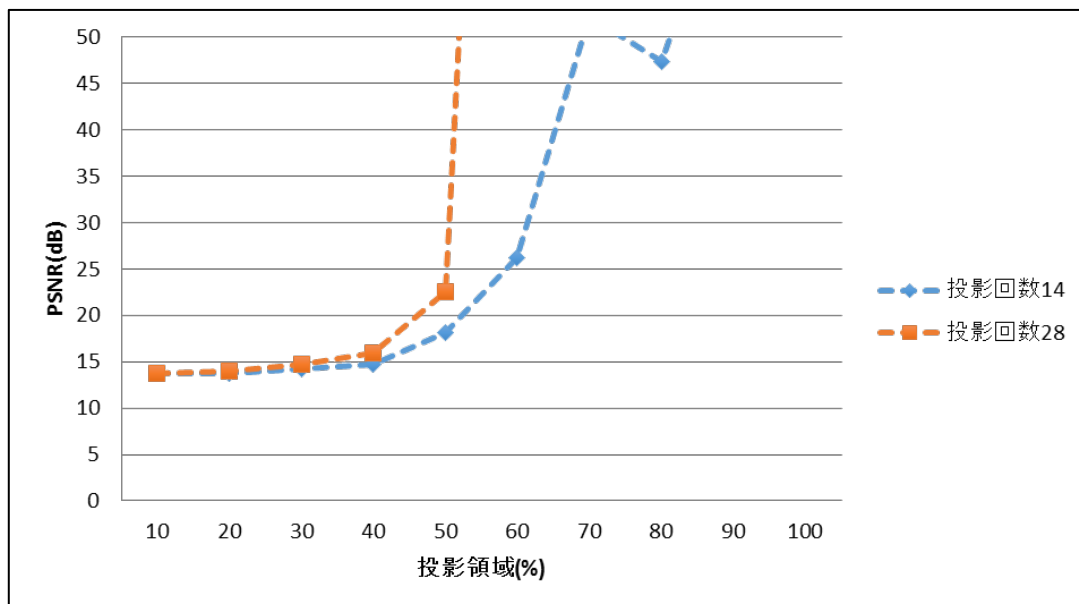


図 5.39 投影領域に制限を設けた場合の再構成画像の PSNR  
(ファントム画像)

### 5.2.3 投影角度範囲に制限を設けた場合

ファントム画像に対し, 投影角度範囲に制限を設けて投影を行い, 画像再構成を行った. 投影回数を最低投影回数に設定したときの再構成画像を図 5.40 に, 投影回数を最低投影回数の 2 倍に設定したときの再構成画像を図 5.41 に示す. また, 再構成画像の PSNR を図 5.42 に示す. 投影回数を最低投影回数に設定したときには投影角度範囲が  $180^\circ$  のときのみ, 投影回数を最低投影回数の 2 倍に設定したときには投影角度範囲が  $150^\circ$  以上 ( $170^\circ$  を除く) のときに, 十分な再構成画像が得られた.

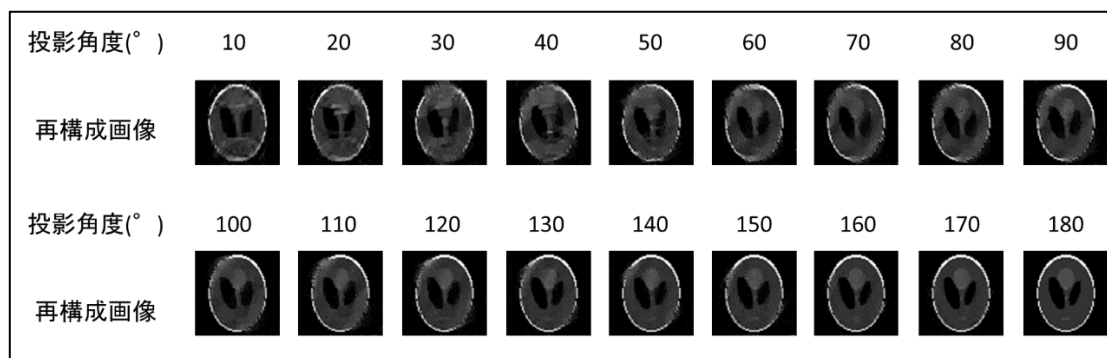


図 5.40 投影角度範囲に制限を設けた場合の再構成画像  
(ファントム画像, 投影回数=最低投影回数)

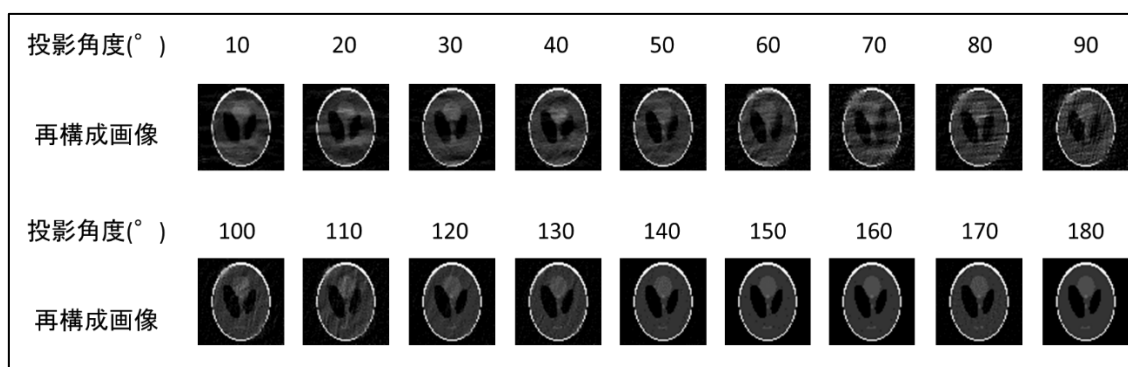


図 5.41 投影角度範囲に制限を設けた場合の再構成画像  
(ファントム画像, 投影回数=最低投影回数の 2 倍)

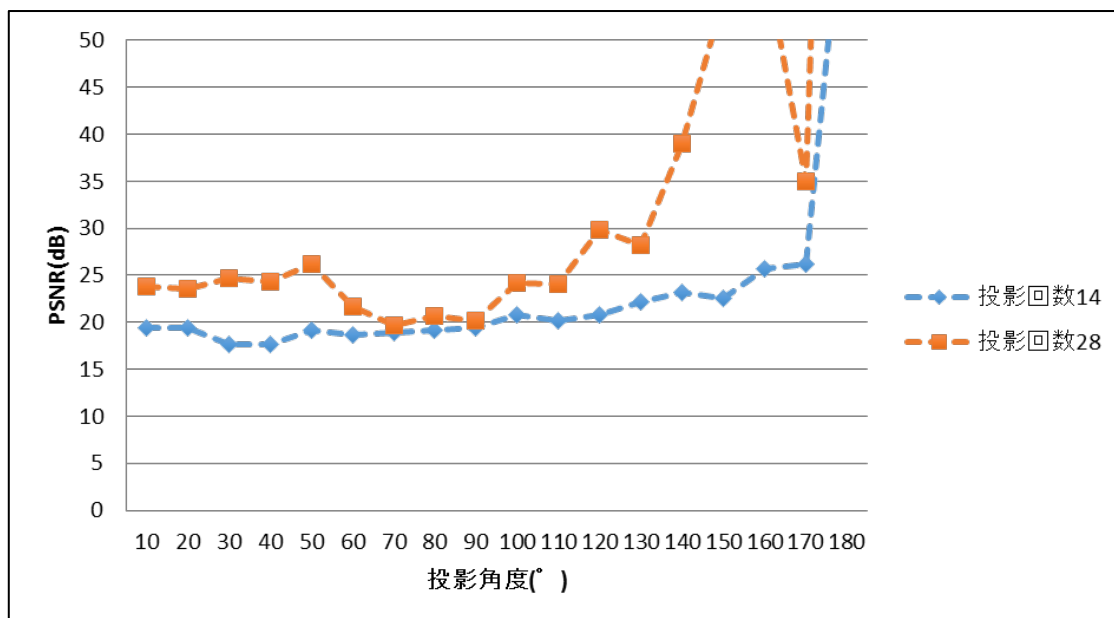


図 5.42 投影角度範囲に制限を設けた場合の再構成画像の PSNR  
(ファントム画像)

### 5.3 従来手法によるファントム画像の再構成

最初に，投影回数を 14 回（圧縮センシングにおいて十分な再構成画像が得られた最低投影回数）に設定した．投影領域と投影角度範囲には制限を設けず，画像再構成を行った．各手法による再構成画像を図 5.43 に，PSNR を表 5.1 に示す．いずれの手法においても，十分な再構成画像を得られなかった．



図 5.43 投影回数を 14 回に設定した場合における従来手法の再構成画像

表 5.1 投影回数を 14 回に設定した場合における従来手法の再構成画像の PSNR (単位: dB)

|      | FBP 法 | 逐次近似法 | 線形方程式を<br>解く方法 |
|------|-------|-------|----------------|
| PSNR | 19.16 | 22.60 | 12.43          |

次に，投影回数を 180 回に設定し，投影領域・投影角度範囲に制限がない場合，投影領域を 50%に制限した場合，投影角度範囲を  $90^\circ$  に制限した場合についてそれぞれ画像再構成を行った．図 5.44 に FBP 法，図 5.45 に逐次近似法，図 5.46 に線型方程式を解く方法における再構成画像を示す．また，表 5.2 に以上の条件における各手法の再構成画像の PSNR を示す．FBP 法と逐次近似法においては，投影領域を制限すると，制限を設けた領域については十分な再構成画像が得られなかった．また，FBP 法と逐次近似法において，投影角度範囲を制限すると，制限を設けた角度部分について十分な再構成画像が得られなかった．線型方程式を解く方法においては，投影領域を制限した場合と投影角度範囲を制限した場合の両方で十分な再構成画像が得られた．

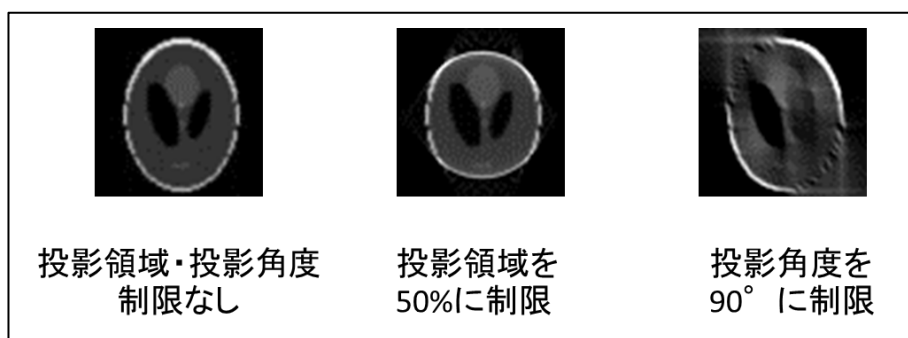


図 5.44 FBP 法を用いた画像再構成



図 5.45 逐次近似法を用いた画像再構成

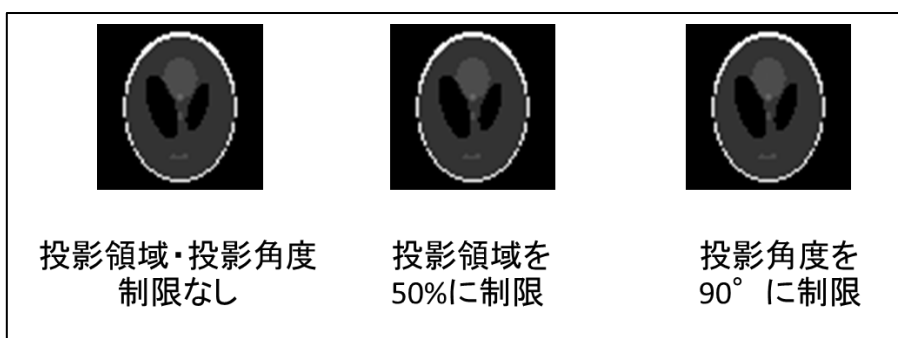


図 5.46 線型方程式を解く方法を用いた画像再構成

表 5.2 様々な投影条件下における従来手法の再構成画像の PSNR(単位: dB)

|                | 投影領域・投影角度<br>制限<br>なし | 投影領域を 50%に<br>制限 | 投影角度を 90°<br>に制限 |
|----------------|-----------------------|------------------|------------------|
| FBP 法          | 29.79                 | 22.49            | 17.65            |
| 逐次近似法          | 27.57                 | 17.35            | 24.12            |
| 線形方程式を解く<br>方法 | 279.32                | 270.94           | 272.03           |

## 5.4 実験結果の考察

圧縮センシングによる疎な画像の再構成では、画像の非零要素が多くなるほど、十分な再構成画像を得るために必要な投影回数が増加した。また、ランダム画像と文字画像を、十分な再構成画像を得るために必要な投影回数で比較すると、ランダム画像がより多くの回数を必要とした。以上のことから、一般の断層画像を圧縮センシングで再構成する場合、スパース度が高く、かつ、構造を持つように変換することが重要である。

投影領域・投影角度範囲を制限しない場合のファントム画像の再構成において、従来手法と圧縮センシングを比較する。投影回数を 14 回に設定したときに、圧縮センシングでは十分な再構成画像が得られたが、従来手法では十分な再構成画像が得られなかった。このことから、圧縮センシングは従来よりも少ない撮影枚数から断面画像の再構成が可能であることが確認できた。

投影領域を制限した場合、FBP 法と逐次近似法では、投影回数を増加させても、十分な再構成画像が得られなかった。一方、圧縮センシングと線型方程式を解く方法では、投影回数を増加させれば、十分な再構成画像が得られた。圧縮センシングにおいては、投影回数を増加させることで、より厳しい制限において十分な画像再構成が可能になる傾向が見られた。

投影角度範囲を制限した場合、FBP 法と逐次近似法では、投影回数を増加させても十分な再構成画像が得られなかった。一方、圧縮センシングと線型方程式を解く方法では、投影回数を増加させれば十分な再構成画像が得られた。圧縮センシングにおいては、投影回数を増加させることで、より厳しい制限において十分な画像再構成が可能になる傾向が見られた。

以上の結果からは、投影領域・投影角度範囲それぞれを制限した場合の圧縮センシングと線型方程式を解く方法の違いを検証できていない。そこで、投影領域を 50%に制限した場合に十分な再構成画像が得られる最低投影回数と、投影角度範囲を  $90^\circ$  に制限した場合に十分な再構成画像が得られる最低投影回数を、両手法において調査した。その結果、線型方程式を解く方法は、投影領域を 50%に制限した場合は投影回数が 87 回以上、投影角度範囲を  $90^\circ$  に制限した場合は投影回数が 59 回以上必要であった。一方圧縮センシングは、投影領域を 50%に制限した場合は投影回数が 34 回以上、投影角度範囲を  $90^\circ$  に制限した場合は投影回数が 36 回以上必要であった。



## 6. 結論

### 6.1 成果

本研究では投影回数・投影領域・投影角度範囲をそれぞれ制限し、圧縮センシングによる画像再構成を行った。また、比較のため、代表的な従来手法である FBP 法、逐次近似法、線型方程式を解く方法による画像再構成を行った。その結果、以下のことが確認できた。

- (i) 圧縮センシングは、投影領域・投影角度範囲に制限を設けない場合に、従来手法よりも少ない投影回数で十分な再構成画像が得られた。
- (ii) 投影領域を制限した場合、FBP 法と逐次近似法では十分な再構成画像が得られなかった。線型方程式を解く方法と圧縮センシングでは投影回数を増加させることにより十分な再構成画像が得られた。十分な再構成画像を得るのに必要な投影回数は圧縮センシングの方が少なかった。
- (iii) 投影角度範囲を制限した場合、FBP 法と逐次近似法では十分な再構成画像が得られなかった。線型方程式を解く方法と圧縮センシングでは投影回数を増加させることにより十分な再構成画像が得られた。十分な再構成画像を得るのに必要な投影回数は圧縮センシングの方が少なかった。

以上から、投影回数・投影領域・投影角度範囲といった撮影条件が制限されるような状況においても、圧縮センシングは十分な再構成画像を得ることができる。圧縮センシングを CT 画像再構成に用いることで、装置の小型化による省スペース化や被曝量の低減が期待できる。具体的には、以下のようなことが実現可能であると考えられる。

- (i) 投影角度範囲を  $90^\circ$  に制限した場合、X 線源と X 線検出器を分離することによる装置の小型化が可能である。被曝線量は、従来の線形方程式を解く方法の 61% に低減することができる。
- (ii) 投影領域を 50% に制限した場合、被曝線量を従来の線形方程式を解く方法の 39% に低減することができる。

### 6.2 課題

従来手法と比較すると、圧縮センシングは画像再構成の計算に、より長い時間を要した。本論文のファントム画像の画像再構成の実験において、FBP 法・逐次近似法・線型方程式を解く方法では投影回数を 100 回程度に設定すると、数十秒で一枚の再構成画像を得られたのに対し、圧縮センシングは投影回数を 50 回程度に設定したときに、数十分の時間を要した。

本論文では、投影領域・投影角度範囲を制限した投影条件においても、投影回数を増加させることにより十分な再構成画像が得られることを確認できた。しかし、十分な再

構成画像が得られる投影領域・投影角度範囲の限界については，前述の計算時間の問題もあり十分に確認できておらず，今後の課題である．

## 参考文献

- [1] 経済産業省 資源エネルギー庁, 「日常生活で受ける放射線と人体影響」, [http://enecho.meti.go.jp/category/electricity\\_and\\_gas/nuclear/rw/hlw/qa/pdf/sanko02.pdf](http://enecho.meti.go.jp/category/electricity_and_gas/nuclear/rw/hlw/qa/pdf/sanko02.pdf).
- [2] David L. Donoho, "Compressed Sensing", IEEE Transactions on Information Theory, Vol.52, No.4, pp.1289-1306, 2006.
- [3] 工藤博幸, イサム・ラシド, 「圧縮センシングを用いた少数方向投影データからのCT画像再構成」, 映像情報メディカル, Vol.43, pp.1093-1099, 2011.
- [4] Kihwan Choi, Jing Wang, Lei Zhu, Tae-Suk Suh, Stephen Boyd, Lei Xing, 「Compressed sensing based cone-beam computed tomography reconstruction with a first-order method」, MedicalPhysics, Vol.37, No.9, pp.5113-5125, 2010.
- [5] 篠原広行, 中世古和真, 坂口和也, 橋本雄幸, 「逐次近似画像再構成の基礎」, 医療科学社, pp.24-28, 2013.
- [6] Hiroyuki Kudo, Taizo Suzuki, Essam A. Rashed, "Image reconstruction for sparse-view CT and interior CT - introduction to compressed sensing and differentiated backprojection", Quantitative Imaging in Medicine and Surgery, Vol.3, No.3, pp.147-161, 2013.
- [6] Hengyong Yu, Ge Wang, "Compressed sensing based interior tomography", Physics in Medicine and Biology, Vol.54, pp.2791-2804, 2009.

## 謝辞

本論文の作成にあたり、懇切丁寧な指導を賜りました蚊野浩教授に深く感謝致します。  
また、精神面で支えてくれた友人、大学院進学にあたり生活面で援助いただいた家族に  
深く感謝致します。

## 付録 1 : X 線 CT における観測行列の生成

### 1. 投影像の生成

図 A1-1 に角度  $45^\circ$  で投影像を生成する様子を示す。測定対象物を正方形小領域の 2 次元配列で表現する。各小領域にその部分の X 線減衰量を対応させる。全ての小領域が、図のように、一次元センサに垂直投影される。一次元センサはビンとよばれる要素に分割されている。全ての小領域の X 線減衰量はいずれかのビンに対応づけられ、同じビンに投影される減衰量を加算し投影像を生成する。

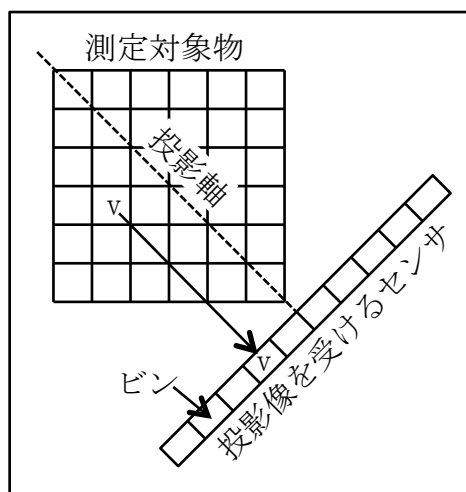


図 A1-1 投影像の生成

一次元センサを構成する要素であるビンの横幅は、正方形小領域の一辺の長さと同じに設定する。測定対象物の中心が投影される位置をセンサの中央に合わせる。センサ全体の長さ（ビン数）は測定対象物の対角線をカバーする。例えば、測定対象物の大きさが  $64 \times 64$  の場合、センサの長さは  $2 \times \text{ceil}(32 \times \sqrt{2}) = 92$  となる。ここで  $\text{ceil}()$  は小数を整数に切り上げる関数である。

ビンの横幅は正方形小領域の一辺の長さと同じに設定することが望ましい。より短く設定すると高精細な投影データを得ることができるように思えるが、対応する観測行列がランク落ちするため、線形従属する行を削除する手間が増える。より長く設定すると、投影データの解像度が落ちるため、より多くの投影枚数が必要になる。

## 2. 観測行列の生成

ある投影角度で、一つ小領域がセンサのビンと図 A1-2 の位置関係になっていたとする。小領域の減衰量を投影するとき、図のように小領域を 4 分割し、分割した領域の X 線減衰量を元の小領域の減衰量の 1/4 にする。そして、その減衰量をセンサのビンに投影する。投影位置がビンの中央であれば、投影を受けたビンにだけ投影加算する。投影位置がビンの中央からずれておれば、隣接するビンとの間で減衰量を比例配分する。これを全ての小領域に繰り返すことで、その投影角度での投影データを生成する。(この方法は、Matlab の `radon` 関数のヘルプページに説明されている方法である。)

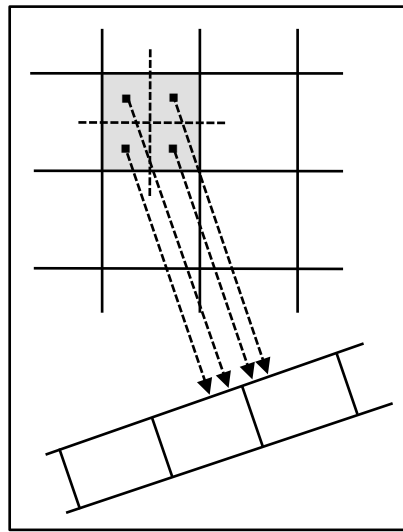


図 A1-2 減衰量の 4 分割投影

測定対象物の  $N \times N$  個の減衰量を一次元に並べたものを  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{N \times N})^T$  とする ( $^T$  は  $\mathbf{x}$  を縦ベクトルにするための転置を表す)。投影角度  $i$  における投影データを  $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{iL})^T$  とする。ただし、 $L$  はビンの総数である。 $\mathbf{y}_i$  は、図 A1-2 に示す小領域の投影を全体で加算したものであるから、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}_i$  の間に式(A1-1)の関係がある。

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{x} \quad \dots (A1-1)$$

ここで  $\mathbf{A}_i$  は  $L \times N^2$  の行列である。全ての投影角度について式(A1-1)を書き並べ、全ての  $\mathbf{y}_i$  を並べた縦ベクトルを  $\mathbf{y}$ 、全ての  $\mathbf{A}_i$  を並べた行列を  $\mathbf{A}$  とすると、X 線 CT の投影データ全体を式(A1-2)と表すことができる。 $\mathbf{A}$  を X 線 CT の観測行列とよぶ。

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad \dots (A1-2)$$

一例として測定対象物が  $64 \times 64$ 、センサのビン数が 92、投影の角度数が 20 の場合、式(A1-2)の観測行列  $A$  は  $1840 \times 4096$  になる。ここで、 $1840=92 \times 20$ 、 $4096=64 \times 64$  である。

式(A1-2)は連立一次方程式を表す。連立する式の中で、像が投影されない行は対応する  $A$  の行の要素が全て 0 である。そのような行は冗長な行であるから削除することができる。

## 付録 2：圧縮センシング理論の概要

付録 2 は、この付録の参考文献である 4 件の解説論文をまとめたものである。

### 1. はじめに

デジタル写真など多くのデジタル画像は冗長で無駄の多い情報である。デジタル画像を JPEG で保存すると、1/10 程度に圧縮しても画質の劣化はほとんど気にならない。JPEG の場合、画像を  $8 \times 8$  画素のブロックに分割し、64 個の画素値を 64 個の DCT（離散コサイン変換）係数に変換する。これは、 $8 \times 8$  画素の小画像を DCT で表現された基底画像の線形和に分解することに相当する。このとき、直流成分および低周波成分の係数が大きくなり、高周波成分の係数は急速に小さくなる。したがって、写真画像は直流成分といくつかの低周波成分を用いれば、ほぼ忠実に再現することができる。

冗長性の高い生画像を入力し、データ量を圧縮して保存する。これが画像入力・保存の通常の流れであるが、入力段階で冗長な生画像を撮影することなく、最初から圧縮された形式で取り込むことはできないのだろうか。それが可能であれば、まず圧縮された形で画像を入力し、人間が観察する段階で通常のデジタル画像に展開することになる。圧縮センシングの考え方は、このようなことを可能にする技術である。

デジタル写真を入力する段階で画像センサ面を高精細に空間サンプリングすることが、生画像に冗長性が生じる原因である。しかし、サンプリングは標本化定理に基づいて行わねばならず、ナイキスト周波数以上の解像度が要求される。このように、標本化定理に基づく画像入力原理では圧縮センシングの考え方は実現不可能である。一方、入力信号に厳しい条件をつければ、このような事が可能になるかもしれない。

圧縮センシングでは入力信号にスパース性（圧縮可能性）を仮定する。スパースという言葉は、 $N$  個の数値があったとき、その多くがゼロであることを意味する。入力信号がスパース性を有するとは、それが、スパースな信号源から線形変換されたものであることを意味する。圧縮センシングの理論によると、入力信号がスパース性を持てば、少ない入力データ量であっても、それに何らかの復元処理を加えることで、高精細な信号を生成できる。



## 2. 一般の線形観測問題

未知の実数値ベクトル  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_N)$  があり、これに線形変換を加えることでスカラー値  $y$  を得るならば、 $y=a_1 x_1+a_2 x_2+\dots+a_N x_N=\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$  である。 $\mathbf{x}$  は観測対象の状態を表す未知数、 $\mathbf{a}$  は観測装置の特性、 $y$  は観測装置の出力と考えることができる。このような観測を、1 回の観測ごとに線形変換の係数を変えて、 $M$  回行う。各観測における係数ベクトルを  $\mathbf{a}_i=(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN})$ 、 $i=1 \sim M$ 、観測値を  $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \dots, y_M)$  とする。これを、 $M \times N$  の行列

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_M \end{pmatrix} \quad \dots (A2-1)$$

を使って

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \quad \dots (A2-2)$$

と表現することができる。これは、 $\mathbf{x}$  を未知数とする連立一次方程式である。 $A$  を観測行列とよぶ。

観測行列  $A$  が既知で、観測値  $\mathbf{y}$  から  $\mathbf{x}$  を推定する問題を考える。 $A$  の全ての行が線形独立で、 $\mathbf{x}$  について事前知識がなければ、この問題は  $M$  と  $N$  の大小関係によって、表 A2-1 のように分類できる。

表 A2-1 連立一次方程式の式数と未知数の関係

|     |                                                                                                                                                 |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| M<N | 観測データが不足しているため、式(A122)を満たす解は無数にある。 $\mathbf{x}$ の $l_2$ ノルムを最小にする解であれば、 $A$ の一般逆行列を $A^+$ として $\mathbf{x} = A^+ \cdot \mathbf{y}$ として求めることができる。 |
| M=N | 式(A2-2)を満たす唯一の解が存在する。                                                                                                                           |
| M>N | 観測データが多すぎるため、式(A2-2)を満たす解はない。式(A2-2)を最小二乗近似する解であれば、 $A$ の一般逆行列を $A^+$ として $\mathbf{x} = A^+ \cdot \mathbf{y}$ として求めることができる。                     |

## 3. 圧縮センシング

### 3.1 ノルムの定義

圧縮センシングではノルムが重要な働きをする。ここで、ベクトルのノルムを説明する。ベクトルのノルムはベクトルの距離を表す概念である。通常、単

にベクトルのノルムと言え、ベクトルの要素の二乗和の平方根であり、 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$  となる。これを  $l_2$  ノルム、あるいはユークリッドノルムともよぶ。より一般的なノルムとして  $p$ -ノルムがある。これは  $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_N|^p}$  と定義されるものである。 $p=1$  の場合、 $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_N|$  となり、これを  $l_1$  ノルムとよぶ。 $p=0$  に対して  $p$ -ノルムは定義できないが、別途、 $x$  の非ゼロ要素の個数を  $l_0$  ノルムと定義する。

図 A2-1 に 2 次元空間におけるノルム=1 の等ノルム線を  $l_0$  ノルム・ $l_1$  ノルム・ $l_2$  ノルムについて示す。 $l_0$  ノルムの場合、原点を除く軸上でノルム=1 となる。 $l_2$  ノルムは等ノルム線上において、原点からのユークリッド距離が等しくなる。 $l_1$  ノルムは両者の中間的な性質を持つ。

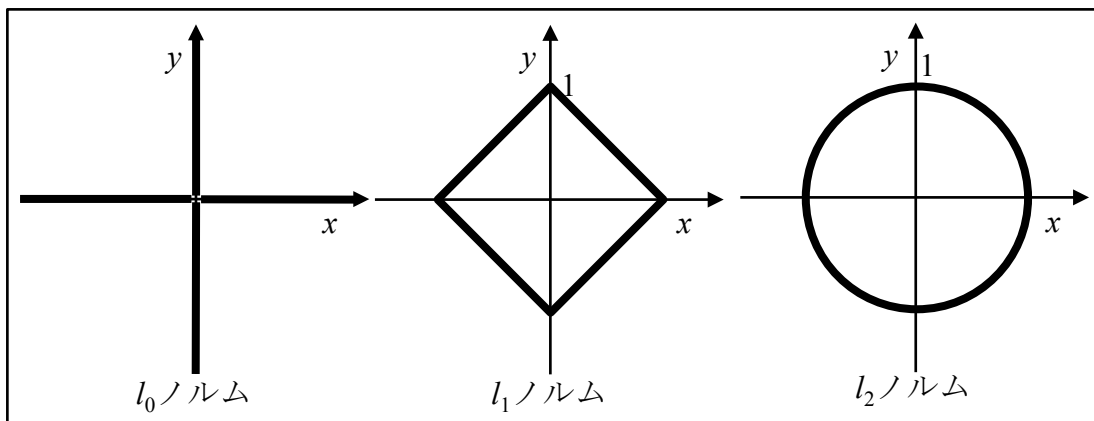


図 A2-1 等ノルム線

ノルムはベクトル空間に距離の概念を定義するものである。距離は三角不等式（2 辺の和が他辺よりも長い）が成り立たねばならないが、 $0 \leq p < 1$  のノルムはこれが成立しない。このため、ノルムに準じた性質のものであるとして、準ノルムとよばれる。

### 3.2 スパース信号と圧縮可能信号

ベクトル  $x$  の  $N$  個の要素の中で、ゼロでない要素が高々  $K$  個であるとき、 $x$  は  $K$ -スパースであるという。一方、現実の信号が完全にスパースであるとは考え難い。JPEG 圧縮信号のように、多くの信号をゼロとして扱っても元の信号

に非常に近い場合、圧縮可能信号とよぶ。圧縮可能信号は  $K$  個の大きな値とそれ以外の非常に小さい値からなる信号である。

### 3.3 圧縮センシング問題

$N$  個の要素からなる原信号  $\mathbf{x}$  が  $K$  スパースであり、 $K$  が  $N$  よりも十分小さいという条件のもとで、 $\mathbf{x}$  を線形変換した観測信号から  $\mathbf{x}$  を推定することが基本的な圧縮センシング問題である。これを推定する方法として、式(A2-2)を拘束条件として  $\mathbf{x}$  の  $l_0$  ノルムを最小化する式(A2-3)を考える。この方法を  $l_0$  再構成とよぶ。

$$\hat{\mathbf{x}}^{(0)} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{subject to } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \dots (A2-3)$$

$l_0$  再構成によって得る解は、 $M > K$  であれば、ほとんどいつも正しい推定結果を与える。その理由を次のように理解することができる。線形制約  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  は、 $N$  次元空間において余次元  $M$  のアフィン部分空間  $L(\mathbf{y})$  を定める。また、 $K$ -スパースな  $\mathbf{x}$  の集合は、 $K$  個の基本ベクトルで張る  $K$  次元部分空間の和集合  $S_K$  に対応する。 $K$ -スパースなベクトル  $\mathbf{x}$  は  $L(\mathbf{y}) \cap S_K$  に属する。一方で、余次元  $M$  のアフィン空間と  $K$  次元部分空間は、一般の位置にあれば  $M > K$  のとき交点を持たない。それにも関わらず解が存在する（余次元  $M$  のアフィン空間と  $K$  次元部分空間が交点を持つ）のであれば、それは正解であろう。したがって、 $M > K$  の場合、 $L(\mathbf{y}) \cap S_K$  が空集合でなければ  $\{\mathbf{x}\}$  に等しいと考えてよい。

$l_0$  再構成は優れた方法であるが、一般には NP 困難であり、計算に必要な時間が  $N$  に関して指数関数的に増大する。実用的な問題に  $l_0$  再構成を適用することは厳しく制限される。

圧縮センシング問題に対する  $l_0$  再構成を緩和するために、式(A2-3)における  $l_0$  ノルムを  $l_1$  ノルムに置き換えた、式(A2-4)の  $l_1$  再構成を考える。

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \dots (A2-4)$$

式(A2-4)は線形計画問題として定式化することができ、効率的に解を求めることができる。また、ある条件では、 $M < N$  であっても完全に正しい推定結果を得ることができる。

図 A2-2 を用いて、 $l_1$  再構成でスパースな解を得ることができる理由を、2 変数の場合について説明する。図の直線は線形拘束を示し、スパースな解は  $x$  軸

との交点か  $y$  軸との交点である。図中の四角形は  $l_1$  ノルムが一定の線である。 $l_1$  再構成を行うことは、四角形を直線に外接させることに相当する。図中の赤丸を真の解とすると、図 A2-2 左の場合には、赤丸を計算することができ、右の場合は計算することができていない。いずれにしても  $l_1$  再構成でスパースな解を求めることはできている。

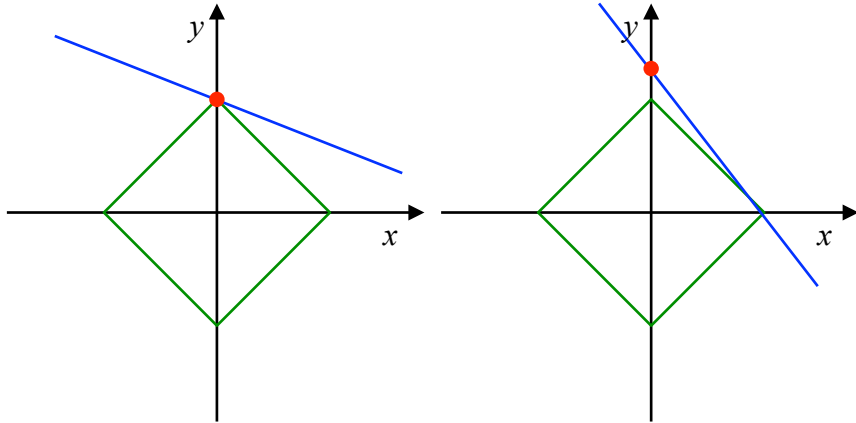


図 A2-2  $l_1$  再構成で赤丸を求めることができる場合とできない場合

### 3.4 $l_0$ 再構成の計算手法

$l_0$  再構成は NP 困難である。この計算法の一例を説明する。 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  の条件のもとで  $K$  スパースな解  $\mathbf{x}$  を求めるには、 $A$  から任意に選び出した  $K$  個の列が一次独立でなければならない。この条件が成立していれば、 $A$  から  $K$  個の列ベクトルを順に選び出していく。得られる部分行列  $A_K$  の値域に  $\mathbf{y}$  が含まれているかどうかを判定する。含まれていれば  $A_K$  の一般逆行列を  $\mathbf{y}$  に作用させることで解を求めることができる。この手順で唯一の解を得ることができるが、 $K$  の増加とともに、組合せ爆発を起こしてしまうため、現実的な解法ではない。

### 3.5 $l_1$ 再構成の完全再現性とロバスト性

任意の  $K$  スパースベクトル  $\mathbf{x}$  に対して、 $\mathbf{A}\mathbf{x}$  のノルムの範囲が次の式(A1-5)のように定数  $\delta_K$  で制限されるとき、式(A2-5)を満たす最小の  $\delta_K$  を制限等長定数とよぶ。

$$(1 - \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad \dots \text{(A2-5)}$$

式(A2-5)は、 $\delta_K$  がゼロに近い場合、観測行列  $A$  によって原信号  $\mathbf{x}$  のノルムが

それほど変化しないことを意味している。これは、 $A$  が  $\mathbf{x}$  のスパース成分に対して正規直交行列に近いことを意味する。このような性質を制限等長性とよぶ。

観測行列に対する制限等長性を用いて、次の定理が示されている。

[定理] (Candes, 2008)

$K \geq 1$  とする。観測行列  $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$  が  $\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1$  を満たし、 $\|\mathbf{x}\|_0 \leq K$  なる任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  について、 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  とするとき、

$$\text{minimize } \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to } \mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

の唯一の解  $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}$  は  $\hat{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{x}$  を満たす。

この定理から、制限等長定数が 0.4142... よりも小さい場合、 $l_1$  再構成の解は  $l_0$  再構成の解に等しい ( $l_1$  再構成の完全再現性)。

現実の信号では、原信号  $\mathbf{x}$  が完全にスパースでないことも多い。そのような場合に、 $l_1$  再構成によってどの程度の精度で原信号が復元できるか、ということに関して、次の定理が示されている。

[定理] (Candes, 2008)

観測行列  $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$  が  $\delta_{2K} < \sqrt{2} - 1$  を満たし、任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  について、 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  とするとき、

$$\text{minimize } \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to } \mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

の唯一の解を  $\hat{\mathbf{x}}^{(1)}$  とする。このとき、次の不等式が成り立つ。

$$\|\hat{\mathbf{x}}^{(1)} - \mathbf{x}\|_2 \leq C_0 K^{-0.5} \|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}\|_1$$

$$\|\hat{\mathbf{x}}^{(1)} - \mathbf{x}\| \leq C_0 \|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}\|_1$$

ここで、定数  $C_0$  は

$$C_0 = 2 \frac{1 + (\sqrt{2} - 1)\delta_{2K}}{1 - (\sqrt{2} + 1)\delta_{2K}}$$

である。 $\mathbf{x}_K$  は  $\mathbf{x}$  の  $K$  スパース成分以外をゼロとしたものある。

この定理は、原信号  $\mathbf{x}$  が完全にスパースでないでも、復元誤差が残差の定数倍で抑えられることを意味している。

## 付録 2 の参考文献

- [1] 平林晃, 「[チュートリアル講演] Compressed Sensing - 基本原理と最新研究動向 -」, 信学技報, SIP2009-28, pp.55-60, 2009.
- [2] 田中利幸, 「圧縮センシングの数理」, IEICE Fundamentals Review, Vol.4,

No.1, pp.39-47, 2010.

- [3] 和田山正,「圧縮センシングにおける完全再現十分条件について」, 日本神経回路学会誌, Vol.17, No.2, pp.63-69, 2010.
- [4] 平林晃,「圧縮センシングの基礎と最近の話題」, システム／制御／情報, Vol.58, No.10, pp.414-419, 2014.

### 付録3: 圧縮センシングによる CT 画像再構成 –ノイズを考慮した再構成手法の一例–

#### 1. 問題設定

推定すべき画素集合を表す縦ベクトルを  $\mathbf{x}$ 、投影を表す行列を  $A$ 、投影データを  $\mathbf{b}$  とすると、これらには式(A3-1)の関係がある。

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \dots (A3-1)$$

圧縮センシングによる CT 画像再構成は、投影におけるノイズを考慮しない場合、式(A3-1)を線形拘束として、 $\mathbf{x}$  の  $l_1$  ノルムを最小化する問題になる。したがって、問題を式(A3-2)のように記述することができる。この問題は、線形計画法で解くことができる。

$$\mathbf{x} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \dots (A3-2)$$

投影データがノイズを含む場合、式(A3-1)は近似的に成立する。これを式(A3-2)のように線形拘束として問題を解くと、投影データ（投影回数）が増えるにしたがい、式(A3-2)による解が不適切なものになる。これを解決する一つの方法は、問題を式(A3-3)のように扱うことである。すなわち、投影データの誤差（式(A3-3)の場合、 $l_2$  ノルムの意味での誤差）として  $\varepsilon$  まで許容し、その条件で  $\mathbf{x}$  の  $l_1$  ノルムを最小化する。式(A3-3)は非線形最小化（非線形計画法）の一つである。非線形最小化問題は、最小化する関数が連続関数で、制約条件が定義する領域が凸であれば、比較的、効率的に解くことができる。

$$\mathbf{x} = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{subject to} \quad \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{l_2} \leq \varepsilon \quad \dots (A3-3)$$

#### 2. 解法の一例

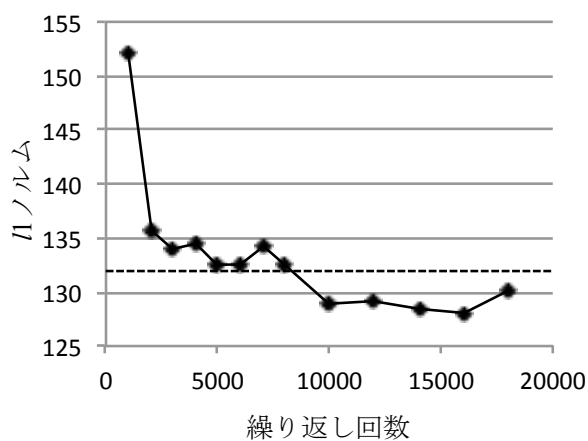
Matlab に制約付き非線形多変数関数の最小値を求める関数（ソルバー）`fmincon` がある。`fmincon` の使い方の一つに、最小化する関数と制約条件を `m` コード関数として与える方法があり、それを用いた。

投影の元データとして手書きで「大」の文字を書いた  $64 \times 64$  画素の 2 値画像を用いた。これを  $0^\circ \sim 180^\circ$  の範囲で均等に 8 方向から、93 分割したビンに投影した。投影データに対する誤差として平均 0、分散 0.05 の正規分布乱数を与

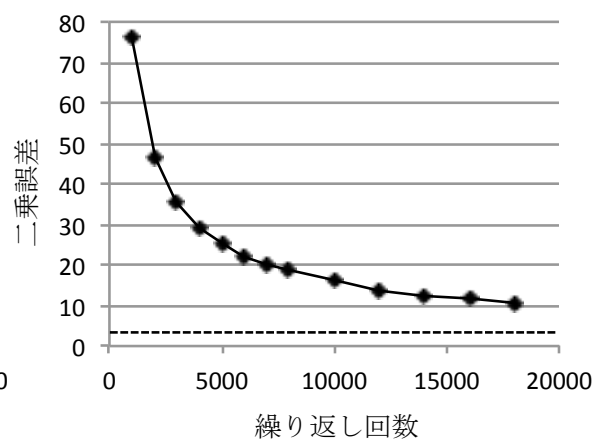
え、式(A3-3)の  $\varepsilon$  として実際の誤差の2倍程度にあたる3.0に設定して fmincon を、50 時間程度、実行した。最適化の繰り返し回数と、 $l_1$  ノルム、二乗誤差の変化を表1に示す。また、その時に再構成された画像と元画像を図 A3-1 に示す。

表 A3-1 ノイズを考慮した  $l_1$  ノルム最小化の収束の一例

| 繰り返し回数 | $\ x\ _{l_1}$ | $\ Ax - b\ _{l_2}$ |
|--------|---------------|--------------------|
| 1000   | 152.113       | 75.98              |
| 2000   | 135.60        | 46.37              |
| 3000   | 133.89        | 35.38              |
| 4000   | 134.45        | 28.92              |
| 5000   | 132.46        | 25.06              |
| 6000   | 132.63        | 22.34              |
| 7000   | 134.11        | 20.19              |
| 8000   | 132.49        | 18.62              |
| 10000  | 128.87        | 16.03              |
| 12000  | 129.08        | 13.97              |
| 14000  | 128.44        | 12.47              |
| 16000  | 128.06        | 11.46              |
| 18000  | 130.02        | 10.65              |



(a)  $l_1$  ノルムの変化



(b) 二乗誤差の変化

図 A3-2 繰り返し回数と  $l_1$  ノルム、二乗誤差の変化



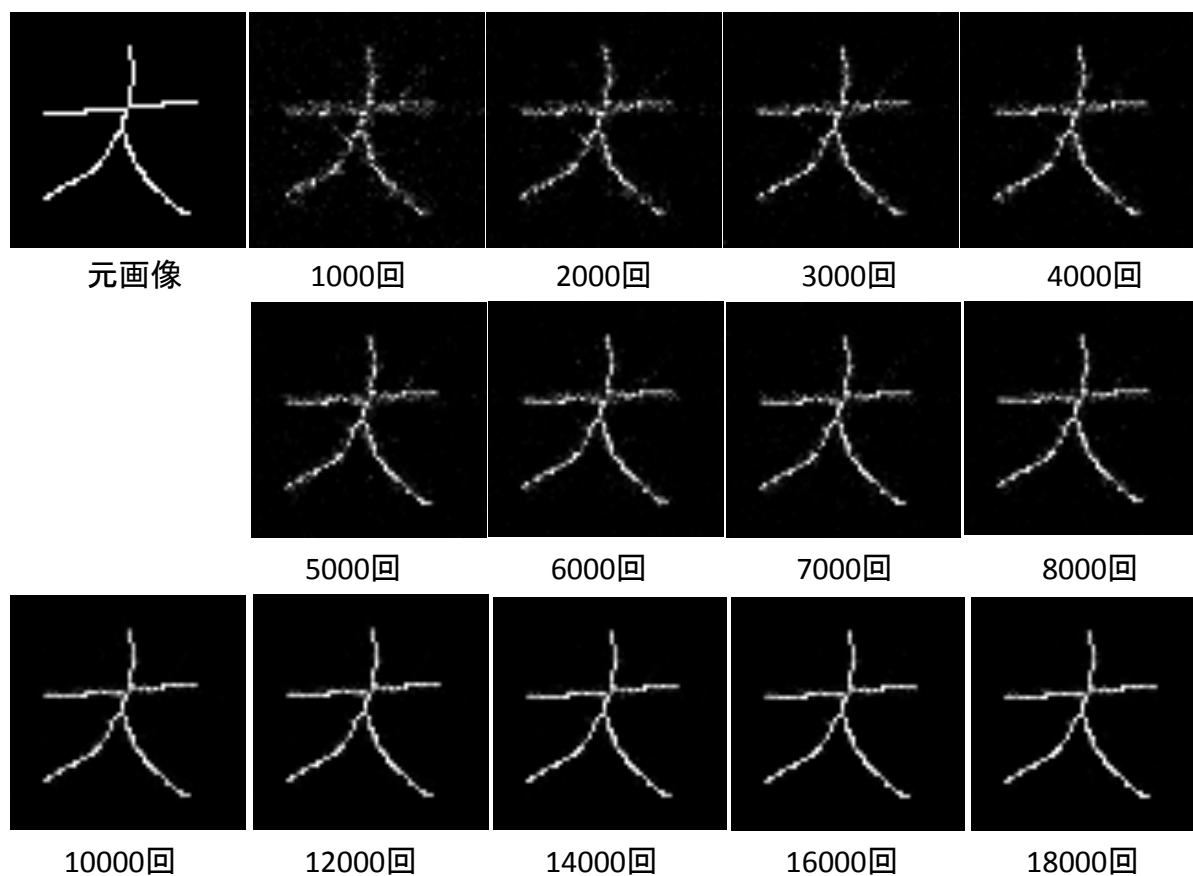


図 A3-1 元画像と再構成された画像

これらのデータから次のように判断している。

- ① Matlab の制約付き非線形多変数関数の最小値を求める関数 `fmincon` を用いると、圧縮センシングを用いた CT 画像再構成において、ノイズを考慮した処理が可能である。
- ② `fmincon` の収束は遅いが、十分に最適化の処理を繰り返せば、元画像に近づく。
- ③ 収束を高速化することや、より大きな画像サイズに適用するためには、この問題に適した手法を用いる必要がある。