Finite-Dimensional Lie Algebras and Their Representations for Unified Model Building

京都産業大学 益川塾
Maskawa Institute, Kyoto Sangyo University

山津 直樹
Naoki Yamatsu

2016年10月16日(日)
第６回日大理工・益川塾連携シンポジウム
@ キャンパスプラザ京都，京都

今回の講演

本講演の目的：

統一理論構築に最低限必要な有限次元リー代数とその表現論についての以下の論文の紹介

Title:	Finite-Dimensional Lie Algebras and Their Representations for Unified Model Building
Author:	Naoki Yamatsu
arXiv:	arXiv:1511.08771 [1] (reduced version)
Categories:	hep-ph hep-th
Comments:	1851 (3352) pages, 836 tables, no figures

これまで受けた質問やコメントの例

- いまさら(有限次元)リー代数の論文を書く意味があるのか?
- 物理屋向けにはH.Georgiのリー代数の本 [2] で十分ではないか?
- 長過ぎるのでこの論文の手引書がほしい.
- R. Slanskyによる大統一理論の有名なレビューとの違いは何か?

Title:	Group Theory for Unified Model Building
Author:	R. Slansky
Journal:	Phys. Rept., 1981, 79, 1-128 [3]
Comments:	128 pages, 58 tables, no figures

今回の講演の内容

本講演の目的：

統一理論構築に最低限必要な有限次元リー代数とその表現論についての論文 [1, N.Y.'15] の紹介

本講演の内容：

今回の有限次元リー代数の論文 [1, N.Y.'15] と R. Slansky による有名な大統一理論のレビュー [3, R.Slansky'81] との違いは何かということをいくつかの例を使って説明する．また，使い方を説明するためにその適用例を示す．

素粒子標準理論を越える統一理論構築への試みで現れる対称性

- クォークやレプトンの世代の統一：世代対称性
- クォークとレプトンの統一：大統一ゲージ対称性
- 標準理論のゲージ対称性の統一：大統一ゲージ対称性
- フェルミオンとボソンの統一：超対称性
- ゲージとスカラーの統一：高次元時空対称性

⋮

大統一ゲージ対称性を考える動機

物質場クォーク・レプトンのゲージ群の表現の組み合わせに注目

- なぜか四次元のカイラル量子異常が奇跡的に相殺している．
- なぜか$U(1)_Y$の電荷が量子化されている．
- なぜか標準理論のゲージ群G_{SM}を$SU(5)_{\mathrm{GUT}}$群に埋め込むとフェルミオンを$SU(5)$の基本表現に埋め込める．

大統一ゲージ対称性を考える動機

物質場クォーク・レプトンのゲージ群の表現の組み合わせに注目

- なぜか四次元のカイラル量子異常が奇跡的に相殺している．
- なぜか$U(1)_Y$の電荷が量子化されている．
- なぜか標準理論のゲージ群G_{SM}を$SU(5)_{\mathrm{GUT}}$群に埋め込むとフェルミオンを$SU(5)$の基本表現に埋め込める．

すべてが解決する分けでないが一部はG_{SM}をG_{GUT}に埋め込むことにより理解できるように見える．

R.Slansky とN.Y.の論文の比較：目的

R.Slanskyの論文 [3, R.Slansky'81]の目的：

大統一理論構築に最低限必要な有限次元リー代数とその表現論の基本的な情報を提供する

N.Y.の論文 [1, N.Y.'15]の目的：

R.Slanksyの論文で想定されていなかった高次元時空を含めた大統一理論構築に最低限必要な有限次元リー代数とその表現論の基本的な情報を提供する

R.SlanskyとN.Y.の論文の比較：内容

R.Slanskyの論文 [3, R.Slansky'81]の内容の外観：

当時は四次元での有限自由系の大統一理論を考えていたため基本的に複素表現を含むリー代数を記載している

N.Y.の論文 [1, N.Y.'15]の目的の外観：

現代的には高次元時空を含めた大統一理論構築を考えることがあるため複素表現を含まない有限次元リー代数も含めて記述している

R.Slansky と N.Y. の論文の比較：内容

内容の比較：有限次元リー代数の種類とランク

R.Slansky:	複素表現を含みかつランク 8 まで (例外あり)
N.Yamatsu:	ランク 15 まで ($+D_{16} = \mathfrak{so}_{32}$)

(参照) ランク 8 までのリー代数は全て以下の文献に記載：

Title:	Tables of Dimensions, Indices, and Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras
Authors:	W.G. McKay and J. Patera
Publisher:	Marcel Dekker, Inc., New York, 1981 [4]
Comments:	317 pages

R.SlanskyとN.Y.の論文の比較：内容

内容の比較：有限次元リー代数の表現表

R.Slansky:	Dynkinラベル，次元，同値類，Dynkin指数，部分代数の自明な表現の数(例外あり)
N.Yamatsu:	Dynkinラベル，次元，二次のカシミア，Dynkin指数，量子異常数，同値類，表現の種類
McKay-Patera:	Dynkin ラベル，次元，Dynkin 指数，四次のDynkin指数，表現の種類

R.Slansky とN.Y.の論文の比較：内容

内容の比較：部分代数分解に必要な射影行列

R.Slansky:	いくつかを以下の文献から転写している
N.Yamatsu:	ランク15まで$(+D_{16})$の全ての最大部分代数分解を記載している
McKay-Patera:	以下の文献を参照とある

Title:	The Computation of Branching Rules for Representations of Semisimple Lie Algebras
Authors:	W.G. McKay, J. Patera, and D. Sankoff
Publisher:	New York Academic Press, 1977 [5]
Comments:	in *Computers in Nonassociative Rings and Algebras*, ed. J. Beck and B. Kolman

R.Slansky とN.Y.の論文の比較：内容

内容の比較：有限次元リー代数の最大部分リー代数への表現分解

R.Slansky:	複素表現を含む代数$(+E_{7,8}, F_4$など$)$とランク6までの2,3個の表現(定義表現や随伴表現)
N.Yamatsu:	ランク15以下のリー代数$(+D_{16})$の全ての最大非半単純部分代数まで含めて最小10個程度
McKay-Patera:	ランク8以下のリー代数の全ての最大半単純リー代数を5,000次元以下(例外代数は10,000次元以下)

R.SlanskyとN.Y.の論文の比較：内容

内容の比較：テンソル積

R.Slansky:	いくつか例が書いてある
N.Yamatsu:	8,9個程度の表現について全て記載している
McKay-Patera:	計算方法が書いてある

(コメント)以下のプログラムなどを使えば簡単に計算できる.

[6] LiE(1992)	C program	by Leeuwen-Cohen-Lisser
[7] Susyno(2011)	Mathematica	by R.M. Fonseca
[8] LieART(2012)	Mathematica	by R. Feger, T.W. Kephart

R.Slansky とN.Y.の論文の比較：内容

内容の比較：大統一ゲージ群の必要条件

R.Slansky:	四次元については書いてある
N.Yamatsu:	高次元の場合も書いてみた
McKay-Patera:	数学の本なので書いてない

可能な大統一ゲージ群

四次元：

クラス	A_n	D_{2k+1}	E_6
	$n \geq 4$	$k \geq 2$	6

高次元：

クラス	A_n	B_n	C_n	D_n	E_n	F_4
	$n \geq 4$	$n \geq 4$	$n \geq 4$	$n \geq 5$	$n = 6, 7, 8$	4

リー代数とその表現の適用例

もちろんディンキンラベルは既約表現の定義なので必須であるが,

- ゲージ結合定数の繰り込み群方程式：(二次の)ディンキン指数
- 四次元カイラルゲージ理論：表現の種類，量子異常数
- 作用の不変量：同値類
- 対称性の破れ：最大部分代数，射影行列

...

リー代数と表現論の文献 [4, 9–15, E.Dynki'50'57;R.Cahn'85;...]

ゲージ結合定数の繰り込み群 [3, R.Slansky'81]

$$\mu\frac{dg}{d\mu} = \beta^{\text{1-loop}}(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3}C_2(\mathfrak{g}) - \frac{2}{3}\sum_{\text{Weyl}} T(R_F) - \frac{1}{6}\sum_{\text{Real}} T(R_S)\right].$$

$SO(11)$ の表現表([1, N.Y.'15] の表76の一部)

$\mathfrak{so}_{11}$ irrep.	$d(R)$	$C_2(R)$	$T(R)$	$C_c(R)$	R/PR
$(1,0,0,0,0)$	**11**	5	1	0	R
$(0,0,0,0,1)$	**32**	$\frac{55}{8}$	4	1	PR
$(0,1,0,0,0)$	**55**	9	9	0	R
$(2,0,0,0,0)$	**65**	11	13	0	R

表現の種類(自己共役と複素表現) [4, W.McKay,J.Patera’81]

四次元カイラルゲージ理論にはリー代数の複素表現が必須.

Algebra	Rank	Condition for a complex representation
A_n	$n \geq 2$	$(a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n) \neq (a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1)$
D_{2n+1}	$n \geq 1$	$(a_1 \cdots a_{2n-1} a_{2n} a_{2n+1}) \neq (a_1 \cdots a_{2n-1} a_{2n+1} a_{2n})$
E_6	6	$(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) \neq (a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_6)$

- 複素表現以外は自己共役表現(実または擬実表現)である.
- 実表現と擬実表現の違いは部分代数分解などには重要である.

四次元の量子異常数 [16–18, J.Banks,H.Georgi'76;S.Okubo'77;...]

量子異常のないまともな理論の条件

$$A^{\text{total}} := \sum_{R_i \in \text{Left}} A(R_i) - \sum_{R_i \in \text{Right}} A(R_i) = 0.$$

四次元の量子異常のない $SU(n)$ カイラルゲージ理論

$$SU(5) : A(\mathbf{10} \oplus \overline{\mathbf{5}}) = (+1) + (-1) = 0,$$
$$SU(6) : A(\mathbf{15} \oplus \overline{\mathbf{6}} \oplus \overline{\mathbf{6}}) = (+2) + 2(-1) = 0,$$
$$SU(7) : A(\mathbf{35} \oplus \overline{\mathbf{21}} \oplus \mathbf{7}) = (+2) + (-3) + (+1) = 0,$$
$$\vdots$$

$SO(11)$ 変換の不変量

$$\mathbf{11}\otimes\mathbf{11},\ \mathbf{11}\otimes\mathbf{11}\otimes\mathbf{55},\ \mathbf{32}\otimes\mathbf{32},\ \mathbf{32}\otimes\mathbf{32}\otimes\mathbf{55},\ \cdots$$

$SO(11)$ テンソル積の表([1, N.Y.'15] の表794の一部)

$\mathfrak{so}_{11}$ tensor products		
$\mathbf{11}\otimes\mathbf{11}$	$=$	$(\mathbf{65})\oplus(\mathbf{55})\oplus(\mathbf{1})$
$\mathbf{32}\otimes\mathbf{11}$	$=$	$(\mathbf{320})\oplus(\mathbf{32})$
$\mathbf{32}\otimes\mathbf{32}$	$=$	$(\mathbf{462})\oplus(\mathbf{330})\oplus(\mathbf{165})\oplus(\mathbf{55})\oplus(\mathbf{11})\oplus(\mathbf{1})$
$\mathbf{55}\otimes\mathbf{11}$	$=$	$(\mathbf{429})\oplus(\mathbf{165})\oplus(\mathbf{11})$
$\mathbf{55}\otimes\mathbf{32}$	$=$	$(\mathbf{1408})\oplus(\mathbf{320})\oplus(\mathbf{32})$
$\mathbf{55}\otimes\mathbf{55}$	$=$	$(\mathbf{1144})\oplus(\mathbf{1430})\oplus(\mathbf{330})\oplus(\mathbf{65})\oplus(\mathbf{55})\oplus(\mathbf{1})$

$SO(11)$ゲージ対称性の破れ [19, Y.Hosotani,N.Y.'15]

$SO(11)$ゲージ・ヒッグス大統一理論での対称性の破れのパターン：

$$SO(11) \underset{BC}{\rightarrow} \begin{cases} SO(10) & \text{on Planck brane} \\ SO(4) \times SO(7) & \text{on TeV brane} \end{cases}$$

$$\underset{BC}{=} SO(4) \times SO(6) \sim SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)_C$$

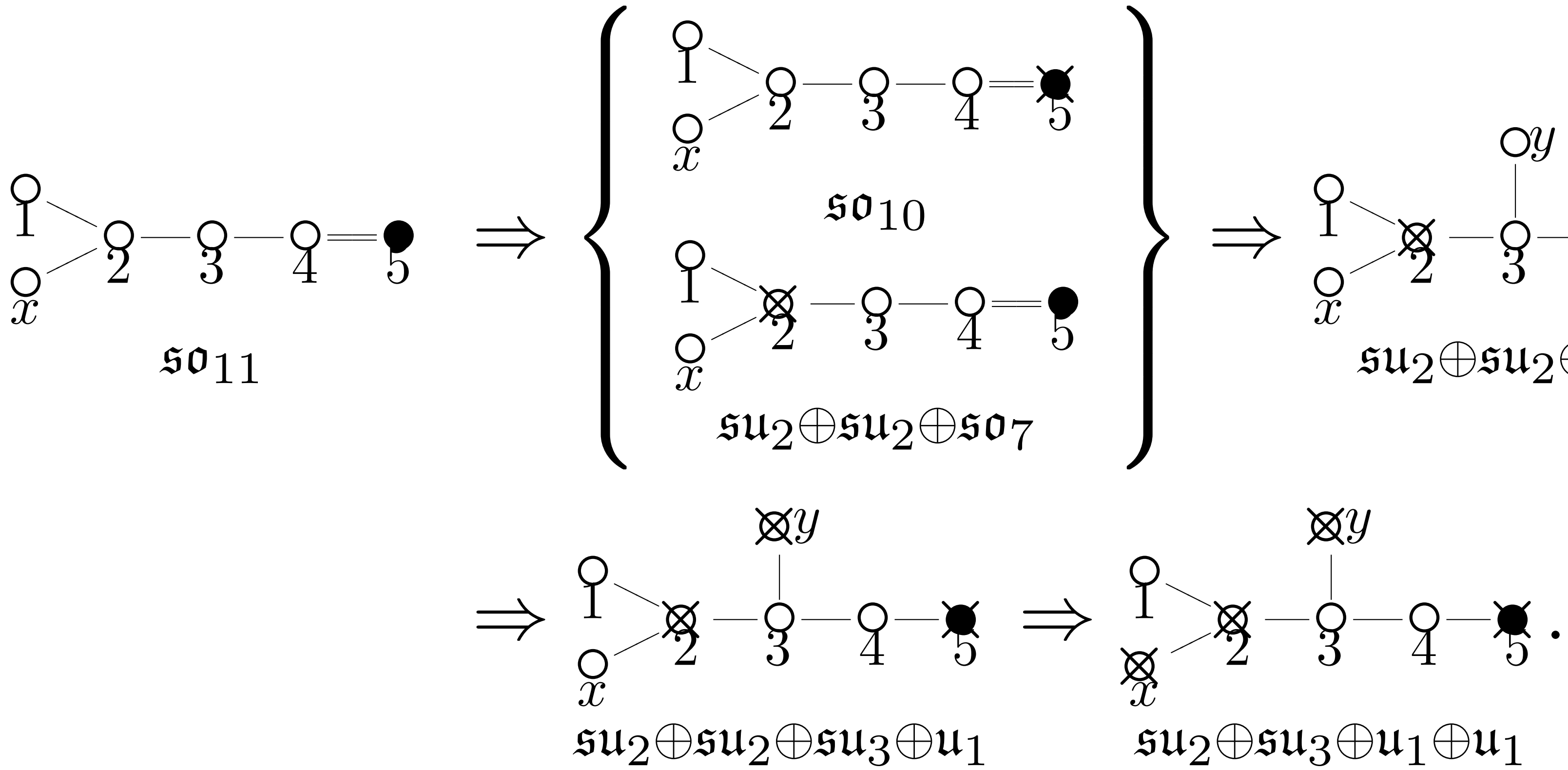
$$\underset{\langle\Phi\rangle}{\rightarrow} SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad \text{ブレーンスカラーのVEV}$$

$$\underset{\theta_H}{\rightarrow} SU(3)_C \times U(1)_{em}$$ (細谷機構) [20, Y.Hosotani'83]

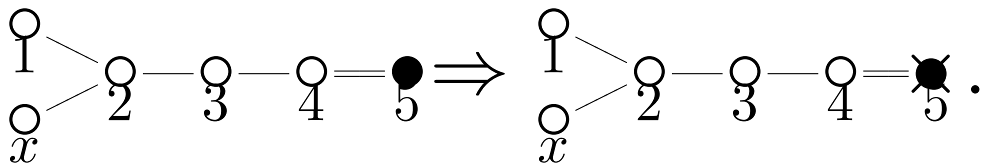
ランク５の最大部分代数([1, N.Y.'15] の表7の一部)

Rank	Algebra $\mathfrak{g}$		Maximal subalgebras $\mathfrak{h}$	Type
5	$\mathfrak{su}_6$	$\supset$	$\mathfrak{su}_5 \oplus \mathfrak{u}_1$; $\mathfrak{su}_4 \oplus \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{u}_1$; $\mathfrak{su}_3 \oplus \mathfrak{su}_3 \oplus \mathfrak{u}_1$	(R)
		$\supset$	$\mathfrak{su}_3$; $\mathfrak{su}_4$; $\mathfrak{usp}_6$; $\mathfrak{su}_3 \oplus \mathfrak{su}_2$	(S)
	$\mathfrak{so}_{11}$	$\supset$	$\mathfrak{so}_{10}$; $\mathfrak{so}_8 \oplus \mathfrak{su}_2$; $\mathfrak{su}_4 \oplus \mathfrak{usp}_4$; $\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2 \oplus$ $\mathfrak{so}_7$; $\mathfrak{so}_9 \oplus \mathfrak{u}_1$	(R)
		$\supset$	$\mathfrak{su}_2$	(S)
	$\mathfrak{usp}_{10}$	$\supset$	$\mathfrak{su}_5 \oplus \mathfrak{u}_1$; $\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{usp}_8$; $\mathfrak{usp}_4 \oplus \mathfrak{usp}_6$	(R)
		$\supset$	$\mathfrak{su}_2$; $\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{usp}_4$	(S)
	$\mathfrak{so}_{10}$	$\supset$	$\mathfrak{su}_5 \oplus \mathfrak{u}_1$; $\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_4$; $\mathfrak{so}_8 \oplus \mathfrak{u}_1$	(R)
		$\supset$	$\mathfrak{usp}_4$; $\mathfrak{so}_9$; $\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{so}_7$; $\mathfrak{usp}_4 \oplus \mathfrak{usp}_4$	(S)

$SO(11)$ 対称性の破れのパターン：Dynkin図版



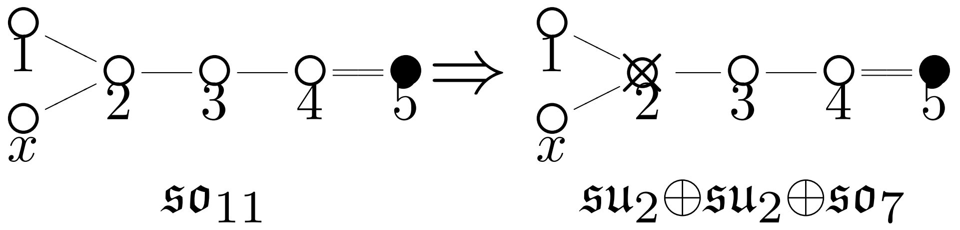
$\mathfrak{so}_{11} \supset \mathfrak{so}_{10}$ 表現分解([1, N.Y.'15] の表341の一部)



$\mathfrak{so}_{11}$ $\mathfrak{so}_{10}$

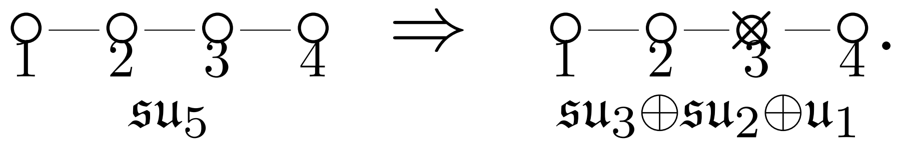
$\mathfrak{so}_{11} \supset \mathfrak{so}_{10}$ branching rules		
$\mathbf{1}$	$=$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{11}$	$=$	$\mathbf{10} \oplus \mathbf{1}$
$\mathbf{32}$	$=$	$\overline{\mathbf{16}} \oplus \mathbf{16}$
$\mathbf{55}$	$=$	$\mathbf{45} \oplus \mathbf{10}$
$\mathbf{65}$	$=$	$\mathbf{54} \oplus \mathbf{10} \oplus \mathbf{1}$

$\mathfrak{so}_{11} \supset \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{so}_7$ 表現分解 ([1, N.Y.'15] の表344の一部)



$\mathfrak{so}_{11} \supset \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{so}_7$ branching rules		
$\mathbf{1}$	$=$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$
$\mathbf{11}$	$=$	$(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{7})$
$\mathbf{32}$	$=$	$(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{8}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{8})$
$\mathbf{55}$	$=$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{7}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{21})$
$\mathbf{65}$	$=$	$(\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{7}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{27}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$

$\mathfrak{su}_5 \supset \mathfrak{su}_3 \oplus \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{u}_1$ 表現分解([1, N.Y.’15] の表234の一部)



$\mathfrak{su}_5 \supset \mathfrak{su}_3 \oplus \mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{u}_1$ branching rules		
$\mathbf{1}$	$=$	$(\mathbf{1},\mathbf{1})(0)$
$\mathbf{5}$	$=$	$(\mathbf{3},\mathbf{1})(+2) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{2})(-3)$
$\overline{\mathbf{5}}$	$=$	$(\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1})(-2) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{2})(+3)$
$\mathbf{10}$	$=$	$(\mathbf{3},\mathbf{2})(-1) \oplus (\overline{\mathbf{3}},\mathbf{1})(+4) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1})(-6)$
$\overline{\mathbf{10}}$	$=$	$(\overline{\mathbf{3}},\mathbf{2})(+1) \oplus (\mathbf{3},\mathbf{1})(-4) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1})(+6)$
$\mathbf{24}$	$=$	$(\mathbf{8},\mathbf{1})(0) \oplus (\mathbf{3},\mathbf{2})(+5) \oplus (\overline{\mathbf{3}},\mathbf{2})(-5) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{3})(0) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1})(0)$

ま と め

有限次元リー代数の論文 [1, N.Y.'15] と R. Slansky による有名な大統一理論のレビュー [3, R.Slansky'81] との違いは何かということをいくつかの例を使って説明した．また，使い方を説明するためにその適用例を示した．

R. Slansky との違いの例

- リー代数のランクが違う．複素表現がない代数も記述．
- 表現の例の数が違う，量子異常数，同値類，表現の種類も記載．
- 必要な射影行列を全て記載．
- テンソル積の例を全ての代数に対して記載．

References

[1] N. Yamatsu, "Finite-Dimensional Lie Algebras and Their Representations for Unified Model Building," arXiv:1511.08771 [hep-ph].

[2] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics. From Isospin to Unified Theories*. Westview Press, USA, 1999.

[3] R. Slansky, "Group Theory for Unified Model Building," *Phys. Rept.* **79** (1981) 1–128.

[4] W. G. McKay and J. Patera, *Tables of Dimensions, Indices, and Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1981.

[5] W. Mckay, J. Patera, and D. Sankoff, *The Computation of Branching Rules for Representations of Semisimple Lie Algebras*. New York Academic Press, 1977. in "Computers in Nonassociative Rings and Algebras" edited by R. E. Beck and B. Kolman.

[6] M. A. A. van Leeuwen, A. M. Cohen, and B. Lisser, *LiE, A Package for Lie Group Computations*. Computer Algebra Nederland, Amsterdam, 1992.

[7] R. M. Fonseca, "Calculating the Renormalisation Group Equations of a SUSY Model with Susyno," *Comput.Phys.Commun.* **183** (2012) 2298–2306, arXiv:1106.5016 [hep-ph].

[8] R. Feger and T. W. Kephart, “LieART - A Mathematica Application for Lie Algebras and Representation Theory,” *Comput.Phys.Commun.* **192** (2015) 166–195, `arXiv:1206.6379 [math-ph]`.

[9] E. Dynkin, “The Structure of Semi-Simple Lie Algebra,” *Trans.Am.Math.Soc.* **1** (1950) 1.

[10] E. Dynkin, “Maximal Subgroups of the Classical Groups,” *Trans.Am.Math.Soc.* **6** (1957) 245.

[11] E. Dynkin, “Semisimple Subalgebras of Semisimple Lie Algebras,” *Trans.Am.Math.Soc.* **6** (1957) 111.

[12] R. Cahn, *Semi-Simple Lie Algebras and Their representations*. Benjamin-Cummings Publishing Company, 1985.

[13] H. Weyl, *The Classical Groups -Their Invariants and Representations-*. Princeton University Press, 1946.

[14] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and some of their Applications*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974.

[15] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory*. Springer, 1991.

[16] J. Banks and H. Georgi, "Comment on Gauge Theories Without Anomalies," *Phys. Rev.* **D14** (1976) 1159–1160.

[17] S. Okubo, "Gauge Groups Without Triangular Anomaly," *Phys.Rev.* **D16** (1977) 3528.

[18] J. Patera and R. T. Sharp, "On the Triangle Anomaly Number of $SU(n)$ Representaions," *J. Math. Phys.* **22** (1981) 2352.

[19] Y. Hosotani and N. Yamatsu, "Gauge-Higgs Grand Unification," *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2015** (2015) 111B01, `arXiv:1504.03817 [hep-ph]`.

[20] Y. Hosotani, "Dynamical Mass Generation by Compact Extra Dimensions," *Phys.Lett.* **B126** (1983) 309.