Renormalization Group Equations and Some of Their Solutions

近畿大学理工学部　太田　信義

何故重力の量子論が必要なのか

- 現在の宇宙は膨張している → ずっと過去の宇宙は点だったのか？
  - 曲率が無限大の空間(特異点)は一般相対論では取り扱えない
- ブラックホール
  - この空間にも特異点がある
- 特異点定理
  - すべてのアインシュタイン方程式の適切な解には特異点

- このような空間で物理量を計算したり、予言できる量を計算

→ 量子重力の必要性

何故重力の量子論は難しいか

- アインシュタイン理論は摂動論では繰り込み可能ではなく、低エネルギー有効理論!

- 量子重力、例えば弦理論を考えると高次項がいつでも現れる! ⇒ これは紫外まで有効な理論を与えるかもしれない。

- 4次元では、曲率の2次理論は繰り込み可能であるが、ユニタリーではない! ⇒ 万事休すか？

漸近安全性とは？

- 有効作用に対して厳密に成り立つくりこみ群方程式の解として、紫外領域で無限大などの困難がなく理論が定義できる可能性。
- より具体的には、エネルギースケール k での有効作用を定義する。
- その k 微分によって厳密に成り立つくりこみ群方程式を、無限大の量がないように定義できる。⇒あるスケールで理論を決め、それを初期条件としてkが∞になるところを調べて、それが有限に求まればよい。
- 漸近自由性に似ている。しかし相互作用が残っている。

厳密くりこみ群 1

K に依存した生成汎関数 $$e^{W_k[J]} = \int [\mathcal{D}\phi] e^{-(S[\phi]+\Delta S_k[\phi])+\int J\phi}$$

ただし $$\Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2}\int d^d q \phi(-q) R_k(q^2)\phi(q)$$

は q<k のモードを上の式から除いて、汎関数積分を実行する。
次に W のルジャンドル変換

$$\tilde{\Gamma}_k[\varphi] = -W_k[J] + \int J\varphi$$

を定義し、最後に有効作用を

$$\Gamma_k[\varphi] = \tilde{\Gamma}_k[\varphi] - \Delta S_k[\varphi]$$

によって定義する。

厳密くりこみ群 2

- 有効作用の k に関する対数微分を計算すると、

$$\frac{d\Gamma_k[\varphi]}{dt} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{\delta^2\tilde{\Gamma}_k}{\delta\varphi\delta\varphi}\right)^{-1}\frac{dR_k}{dt} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\varphi\delta\varphi}+R_k\right)^{-1}\frac{dR_k}{dt}$$

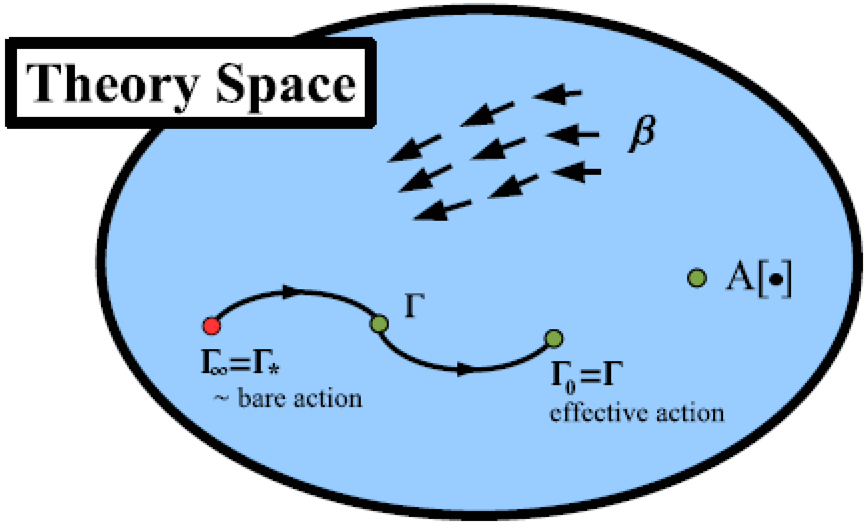
  が成り立つ。
- 1ループに似ているが厳密に成り立つ。
- ここで、もともと経路積分による $\Gamma_k[\varphi]$ の定義には無限大があったが、この方程式では、∞領域は正則因子 R_k によってカットされており、どこにも無限大は生じないことに注意！

厳密くりこみ群による量子重力

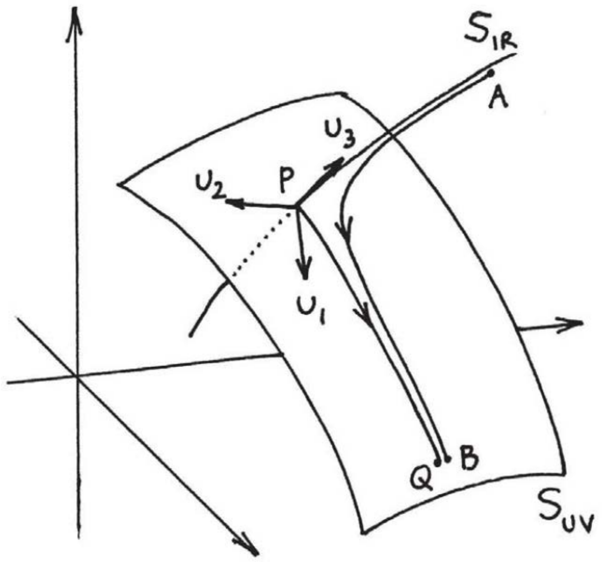
- 厳密くりこみ群を用いて、それを適切な初期条件の下で $k \to 0$ の極限まで積分できれば、すべてのグリーン関数を計算できる量子効果をすべて取り入れた有効作用が求まる！

- 高エネルギーでの振る舞いが重要
  - $k \to \infty$ としたとき無限大になると駄目
  - その振る舞いが重要

- 理論空間を広げる必要 → 理論空間



理論空間



- 基底 $\mathcal{O}_i$ により、有効作用を構成

$$\Gamma_k = \sum_i g_i(k)\mathcal{O}_i$$

- くりこみ群方程式

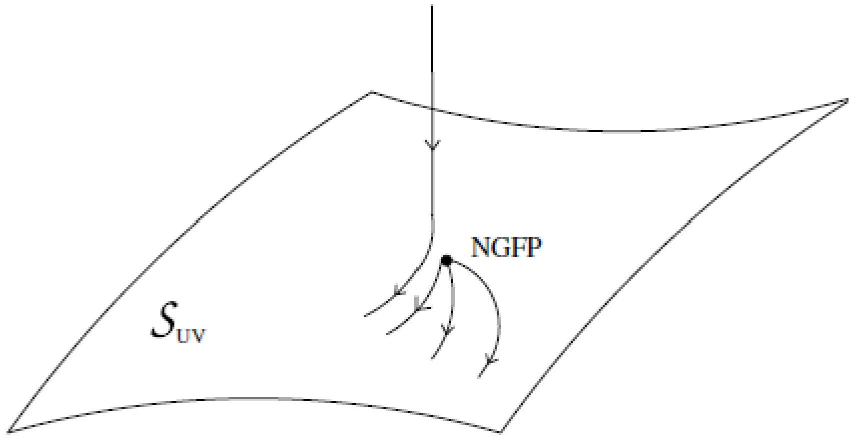
$$\frac{d\Gamma_k}{dt} = \sum_i \beta_i \mathcal{O}_i \qquad \beta_i = \frac{dg_i}{dt}$$

- くりこみ群方程式は理論空間の中での流れを与える。

K → ∞ での振る舞い

1. くりこみ群の流れが無限大になる
   量子論として失格(QEDのランダウポール)

2. くりこみ群の流れが無限大にならない
   a. 固定点に行く
      すべての係数が有限の固定点に行けば
      物理量が有限に定義される
   b. リミットサイクルになる
      考えない

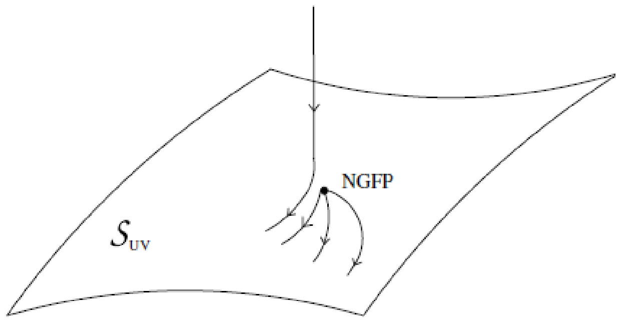


漸近的安全性1

- 結合定数が固定点に行く場合で、かつrelevant結合定数が有限個
  - 固定点に吸い込まれる結合定数　･･･　relevant
  - 固定点から離れる結合定数　･･･　irrelevant
  - どちらでもないもの　･･･　marginal
- 理論が予言可能性を持つためには、irrelevant は 0 、relevantは有限個が必要。
  - relevant は実験で決めるべきパラメーターを与える。
  - relevant 結合の作る空間　･･･　UV critical surface
- 固定点のまわりのふるまいを見る。

relevant coupling はcouplingsの空間の中で一般にsurfaceを作る。

漸近的安全性2



- そのsurfaceを　UV critical surface と呼ぶ。

  UV critical surface に乗っている点はすべて固定点に含まれる

  ⇒ UV critical surfaceの次元の数-1だけfree parameterのある理論で紫外のふるまいが同じで、特異性なく定義できる理論

- UV critical surface が有限次元になっている理論は、free parameter を実験で決めると、あとは予言になる
- Irrelevant couplingsは制御できないので、最初から固定点にfix
- 例：原点が固定点の場合　・・・　irrelevant operatorは摂動的くりこみ不可能項　⇒　くりこみ可能な理論（漸近的自由）QCD等

物理的予言は？

- くりこみ群の流れをk → 0 にまで積分して行く
- ⇒ 量子効果をすべて取り入れた有効作用

- このとき、一般に高エネルギーでの relevant couplingsは実験で決めるべきパラメーター（一意的に定まるわけではない）

- それらを決めると、他の項は決まっている。 ⇒ 物理的予言

重力理論

- 一般に理論空間の基底は多様
- 一般座標変換不変性を課したとしても $R, R_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\rho\sigma}$、共変微分 など

- まず、取り扱える範囲で調べ、漸近安全性が満たされているか
  - アインシュタイン重力と宇宙項でOK
- その上で、項を増やしてもこの性質が変わらないかを見る
  - 答えは両方ともイエス ・・・ スカラー曲率の多項式で R^{34}の項まで調べられた → けちけちせずに R の任意関数で！

- 漸近安全性は正しい方向である兆候

f(R) gravity

- スカラー曲率Rの任意関数 $\Rightarrow$ 固定点の条件は微分方程式

$$S = \int d^d x \sqrt{-g} f(R)$$

- 繰り込み群方程式

$$\dot{\Gamma}_k = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{(2)}\left[\frac{\dot{f}'(\overline{R})R_k(\Delta-\alpha\overline{R}) + f'(\overline{R})\dot{R}_k(\Delta-\alpha\overline{R})}{f'(\overline{R})(P_k(\Delta-\alpha\overline{R}) + \alpha\overline{R} + \frac{2}{d(d-1)}\overline{R})}\right] - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{(1)}\left[\frac{\dot{R}_k(\Delta-\gamma\overline{R})}{P_k(\Delta-\gamma\overline{R}) + \gamma\overline{R} - \frac{1}{d}\overline{R}}\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{(0)}\left[\frac{\dot{f}''(\overline{R})R_k(\Delta-\beta\overline{R}) + f''(\overline{R})\dot{R}_k(\Delta-\beta\overline{R})}{f''(\overline{R})(P_k(\Delta-\beta\overline{R}) + \beta\overline{R} - \frac{1}{d-1}\overline{R}) + \frac{d-2}{2(d-1)}f'(\overline{R})}\right],$$

- 定数 α, β, γ を入れる自由度がある。

FRGE (work with Percacci, Vacca, Falls)

- 繰り込み群方程式をコンパクトな時空S^4 と双曲空間 H^4に対して求めた。
- そのいずれも次の形

$$
\begin{aligned}
&32\pi^2(\dot{\varphi} - 2r\varphi' + 4\varphi) \\
&= \frac{c_1(\dot{\varphi}' - 2r\varphi'') + c_2\varphi'}{\varphi'[6 + (6\alpha + 1)r]} + \frac{c_3(\dot{\varphi}'' - 2r\varphi''') + c_4\varphi''}{[3 + (3\beta - 1)r]\varphi'' + \varphi'} - \frac{c_5}{4 + (4\gamma - 1)r}
\end{aligned}
$$

- cは（無次元）曲率 r の3次までの多項式、ドットはlog(k)の微分、’ は r についての微分、$\varphi(r) = k^{-d} f(R)$
- 固定点は3階微分方程式の解で与えられる

Their Solutions (work with Percacci, Vacca, Falls)

- 解の解析からわかったこと:
  - いずれの場合も $\Lambda + a\,r + b\,r^2$ が主要項
  - 他の項の係数は非常に小さい
  - 多項式近似：項を増やしていく → コンパクト空間ではよく収束
    非コンパクト空間では収束が悪い
  - Relevant な方向は2つ？3つ(宇宙項を除くと2つ）？→ 他の解析と必ずしも一致していない（非コンパクトでは?）

- Starobinsky インフレーション模型がよいのか？（他のテンソル構造）

今後

- 他のテンソル構造　$R_{\mu\nu\rho\sigma}$^2 等
- 物質場の寄与
- いずれも背景場の方法を用いている　・・・　背景場に依存しないか？
- ゲージ不変性、計量のパラメトリゼーション依存性？