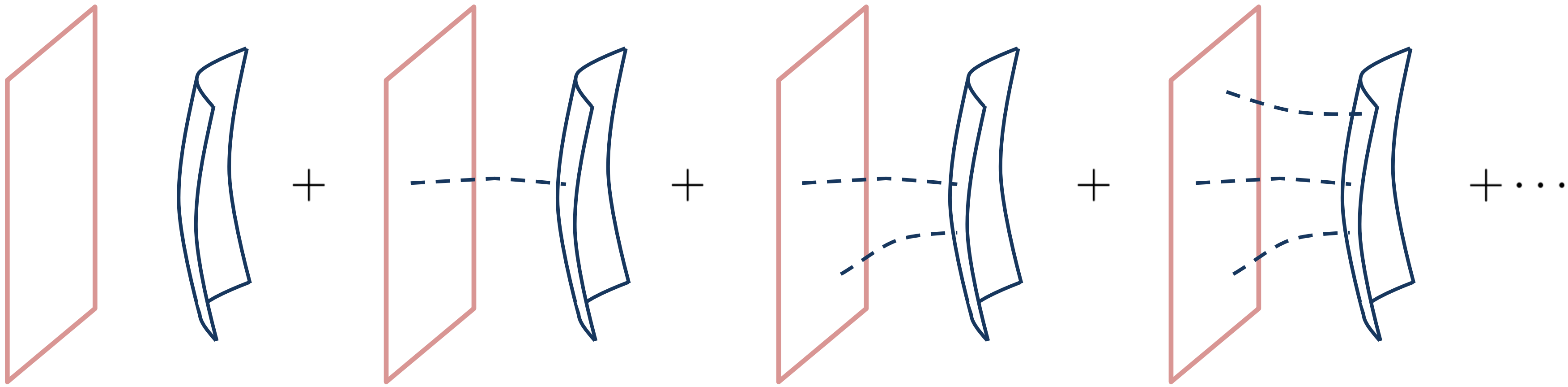
On string Hamiltonian in the sigma-gauge

三輪　光嗣　日本大学理工学部

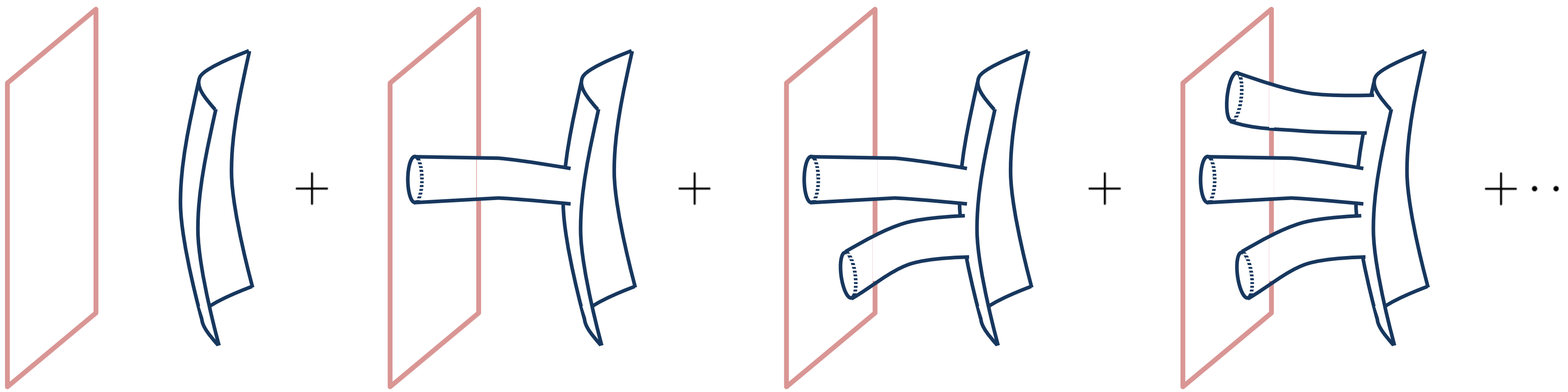
第6回日大理工・益川塾連携素粒子物理学シンポジウム
平成28年10月16日（日）

時空の曲がりと弦



Dブレーンとの重力子のやりとり　〜　時空の曲がり

開弦の多重ループ



AdS/CFT対応を理解する上で本質的 [’08 ,’08 Kawai-Suyama]

ゲージを工夫すると足し上げ可能（平面図） [’06, ’08 Kruczenski]

今日の話:　Kruczenski の話 ＋ α

（スライド中のすべての式のすべての項は up to 定数　とくに $\alpha'=1/4\pi=1/2\pi$ ）

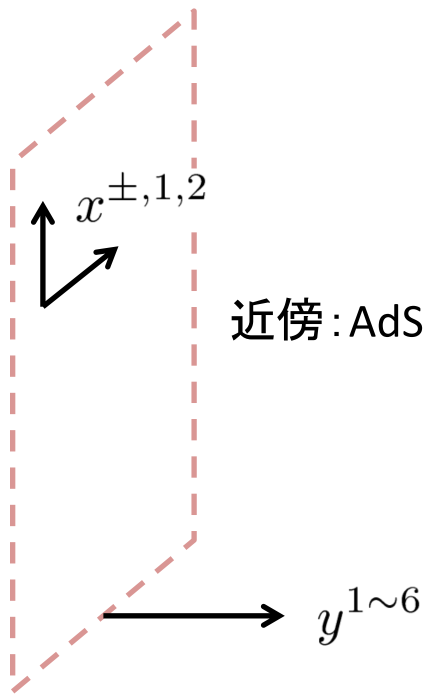
内容

- イントロ
- σゲージ
- 開弦の多重ループ
- ＋αの話
- まとめとこれから

σゲージ

D3ブレーン背景時空

	x^+	x^-	x^1	x^2	y^1	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6
D3 :	○	○	○	○	−	−	−	−	−	−



近傍 : AdS時空

遠方 : 平坦

D3ブレーン背景時空

	x^+	x^-	x^1	x^2	y^1	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6
D3：	○	○	○	○	−	−	−	−	−	−

$$ds^2_{\mathrm{D3}} = G_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \frac{1}{\sqrt{H_3}}(dx^+ dx^- + d\vec{x}^{\,2}) + \sqrt{H_3}\, d\vec{y}^{\,2}$$

$$H_3 = 1 + \frac{g_{\mathrm{st}} N_3}{|\vec{y}|^4}$$

g_{st} ：閉弦の結合定数

N_3 ：D3ブレーンの枚数

光錐ゲージとσゲージ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ab}G_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \qquad g_{ab}$$: 世界面の計量 $\quad a, b = \tau, \sigma$

$$\Downarrow \qquad g_{01} = 0, \quad x^+ = \tau$$

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}H_3}}\left(\dot{x}^- + \dot{\vec{x}}^{\,2} + H_3\dot{\vec{y}}^{\,2}\right) - \sqrt{-\frac{g_{00}H_3}{g_{11}}}\left(\frac{1}{H_3}\vec{x}^{\,\prime 2} + \vec{y}^{\,\prime 2}\right)\right]$$

x^- の運動方程式 $\quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial}{\partial\tau}\sqrt{-\dfrac{g_{11}}{g_{00}H_3}} = 0$

σ を再定義 $\quad \Rightarrow \quad \sqrt{-\dfrac{g_{11}}{g_{00}H_3}} = 1$

光錐ゲージ

ラグランジアン：

$$\mathcal{L}_{\rm l.c} = \frac{1}{2}\Big(\dot{\vec{x}}^{\,2} + H_3\dot{\vec{y}}^{\,2} - \frac{1}{H_3}\vec{x}^{\,\prime 2} - \vec{y}^{\,\prime 2}\Big)$$

ハミルトニアン：

$$\mathcal{H}_{\rm l.c.} = \frac{1}{2}\Big(\vec{p}_x^{\,2} + \frac{1}{H_3}\vec{p}_y^{\,2} + \frac{1}{H_3}\vec{x}^{\,\prime 2} + \vec{y}^{\,\prime 2}\Big) \qquad H_3 = 1 + \frac{g_{\rm st}N_3}{|\vec{y}|^4}$$

$$= \mathcal{H}_{\rm flat} + \frac{g_{\rm st}N_3}{|\vec{y}|^4}(\cdots) + \left(\frac{g_{\rm st}N_3}{|\vec{y}|^4}\right)^2(\cdots) + \cdots$$

σ ゲージ

[’06,’08 Kruczenski]

ラグランジアン:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{l.c}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{x}}^{\,2} + H_3\dot{\vec{y}}^{\,2} - \frac{1}{H_3}\vec{x}^{\,\prime 2} - \vec{y}^{\,\prime 2}\right)$$

$\Downarrow$　　$\tau \leftrightarrow \sigma$　（結果的に $x^+ = \sigma$ ⇒ σ ゲージ　（Kruczenski)））

$$\mathcal{L}_{\sigma} = \frac{1}{2}\left(\vec{x}^{\,\prime 2} + H_3\vec{y}^{\,\prime 2} - \frac{1}{H_3}\dot{\vec{x}}^{\,2} - \dot{\vec{y}}^{\,2}\right)$$

ハミルトニアン:

$$\mathcal{H}_{\sigma} = \frac{1}{2}\left(H_3\vec{p}_x^{\,2} + \vec{p}_y^{\,2} + \vec{x}^{\,\prime 2} + H_3\vec{y}^{\,\prime 2}\right)$$　（符号を変えた）

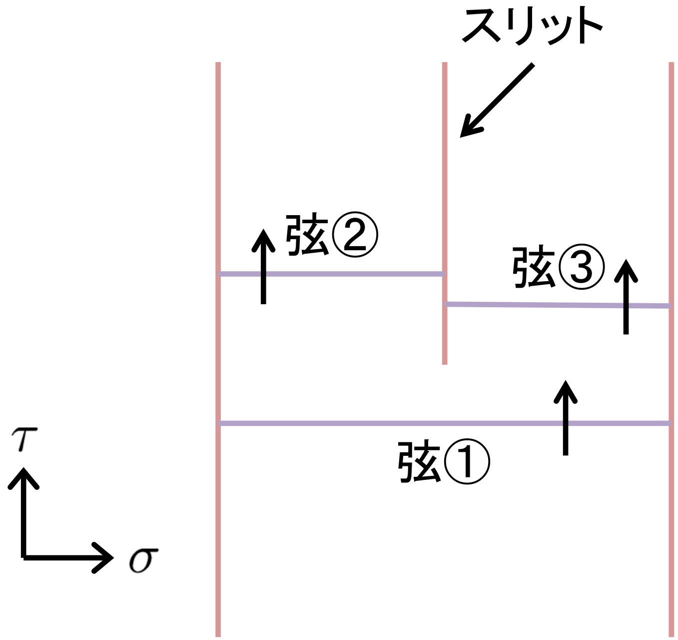
$$= \mathcal{H}_{\mathrm{flat}} + \frac{g_{\mathrm{st}}N_3}{2|\vec{y}|^4}\left(\vec{p}_x^{\,2} + \vec{y}^{\,\prime 2}\right)$$

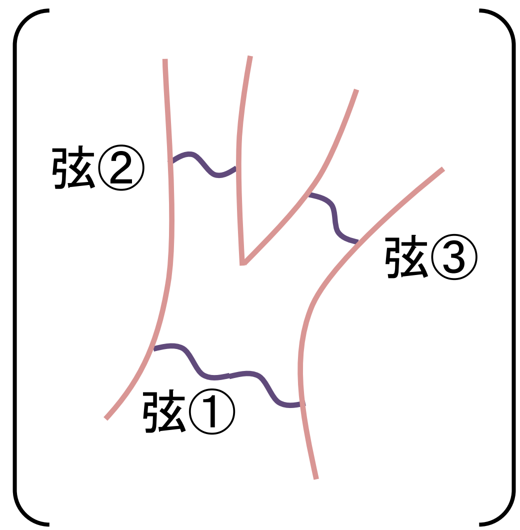
開弦の多重ループ

開弦の相互作用（光錐ゲージ）

[Green-Schwartz-Witten の教科書]

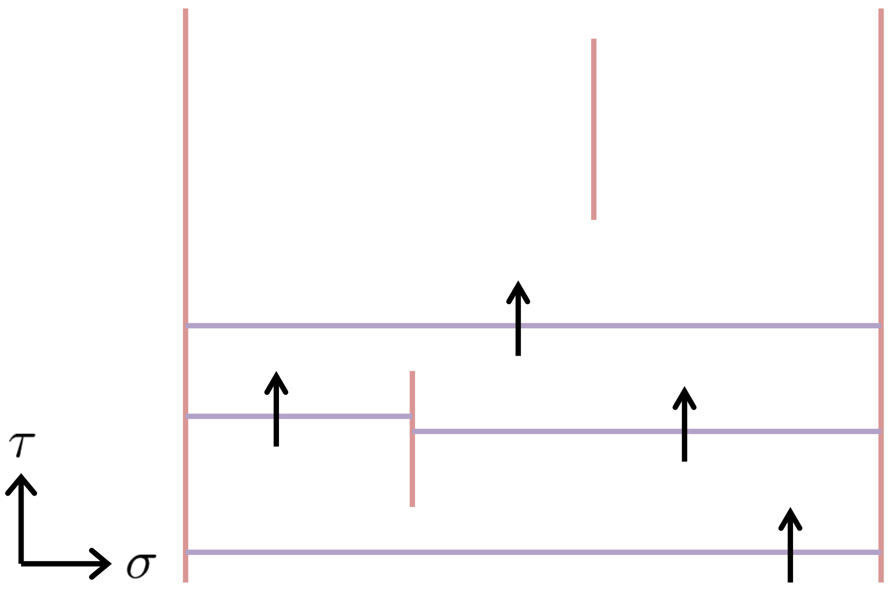
光錐ゲージでの開弦の相互作用　⇒　スリット

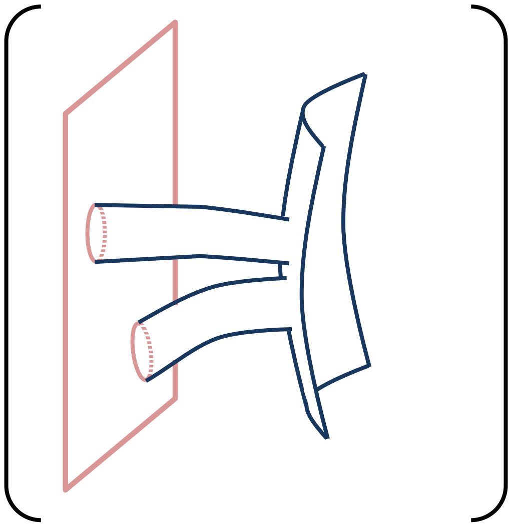




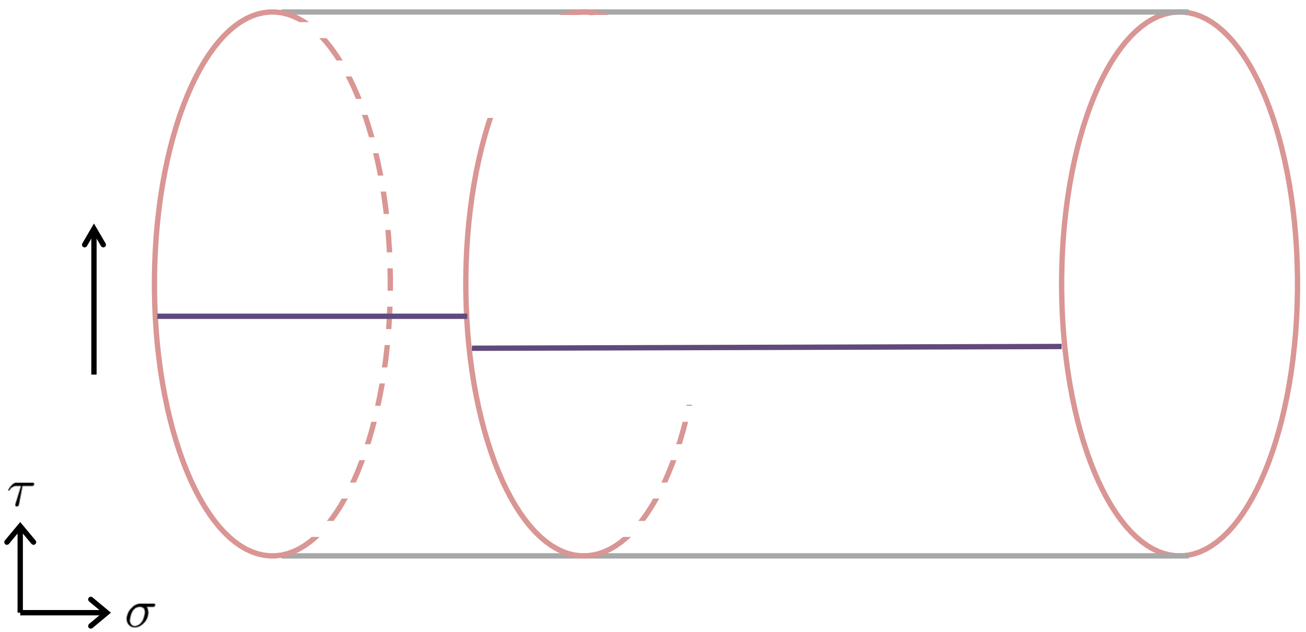
開弦の多重ループ（光錐ゲージ）

［Green-Schwartz-Witten の教科書］





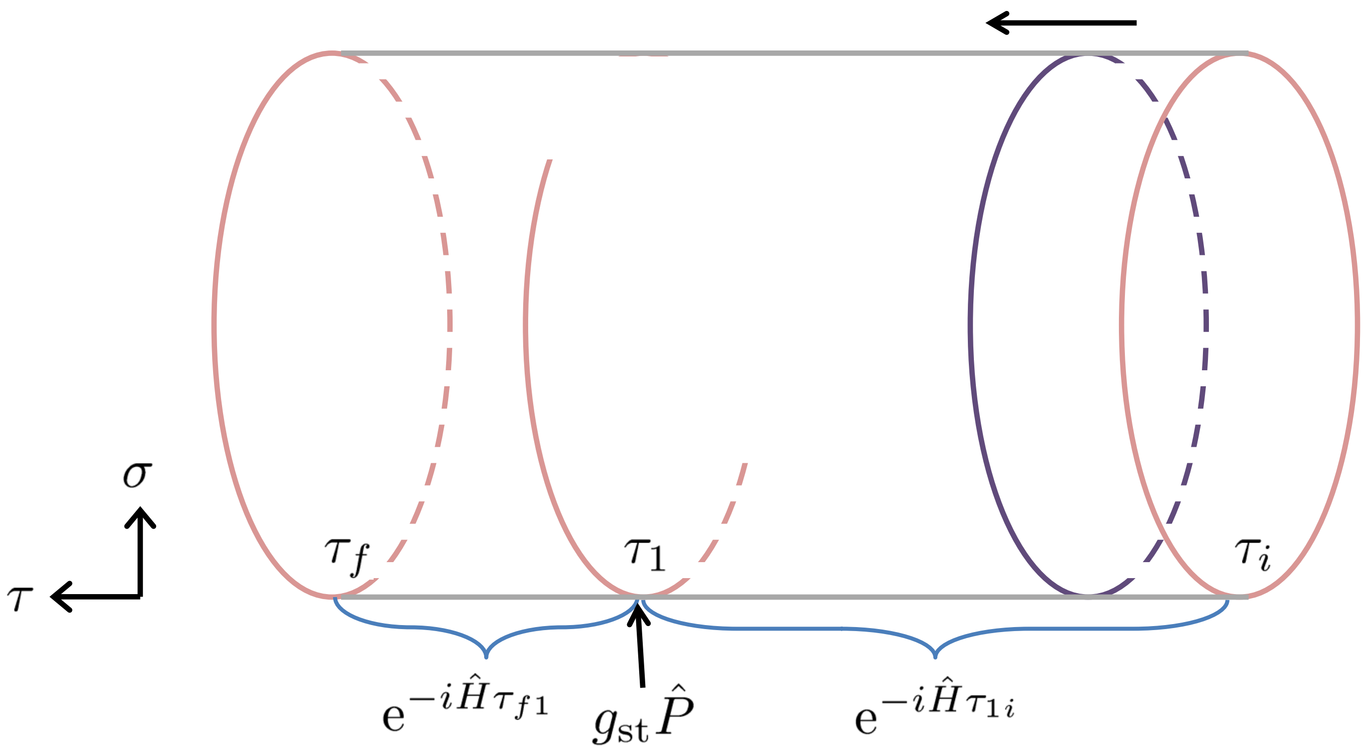
開弦の多重ループ（光錐ゲージ）



開弦の２ループ

τ ⇔ σ (σ ゲージ)

[’06,’08 Kruczenski]

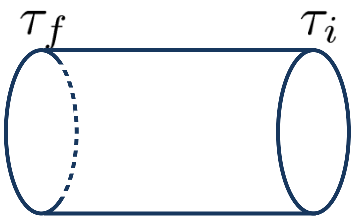


○ スリットにぶつかるまではフリー $\hat{H} = \frac{1}{2}\int d\sigma(\vec{\Pi}^2 + \vec{X}'^2)$

○ スリットの効果は結合定数の一次

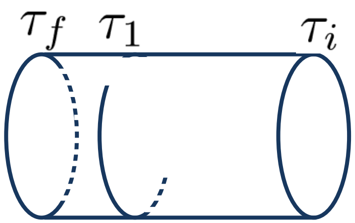
多重ループの和

[’06,’08 Kruczenski]



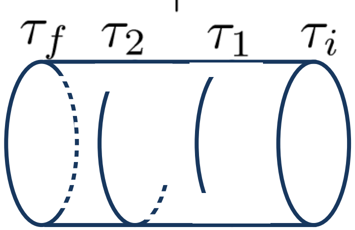
$$\langle B|\ \mathrm{e}^{-i\hat{H}\tau_{fi}}\ |B\rangle$$

$$+$$



$$g_{\mathrm{st}}\ \int d\tau_1\ \langle B|\ \mathrm{e}^{-i\hat{H}\tau_{f1}}\ \hat{P}\ \mathrm{e}^{-i\hat{H}\tau_{1i}}\ |B\rangle$$

$$+$$



$$g_{\mathrm{st}}^2\ \int d\tau_1 d\tau_2\ \langle B|\ \mathrm{e}^{-iH\tau_{f2}}\ \hat{P}\ \mathrm{e}^{-iH\tau_{21}}\ \hat{P}\ \mathrm{e}^{-iH\tau_{1i}}\ |B\rangle$$

$$+$$

$$\vdots$$

$\hat{P}$ はスリットの両端に関する積分も含む

多重ループの和 [’06,’08 Kruczenski]

多重ループの寄与が入ったハミルトニアン

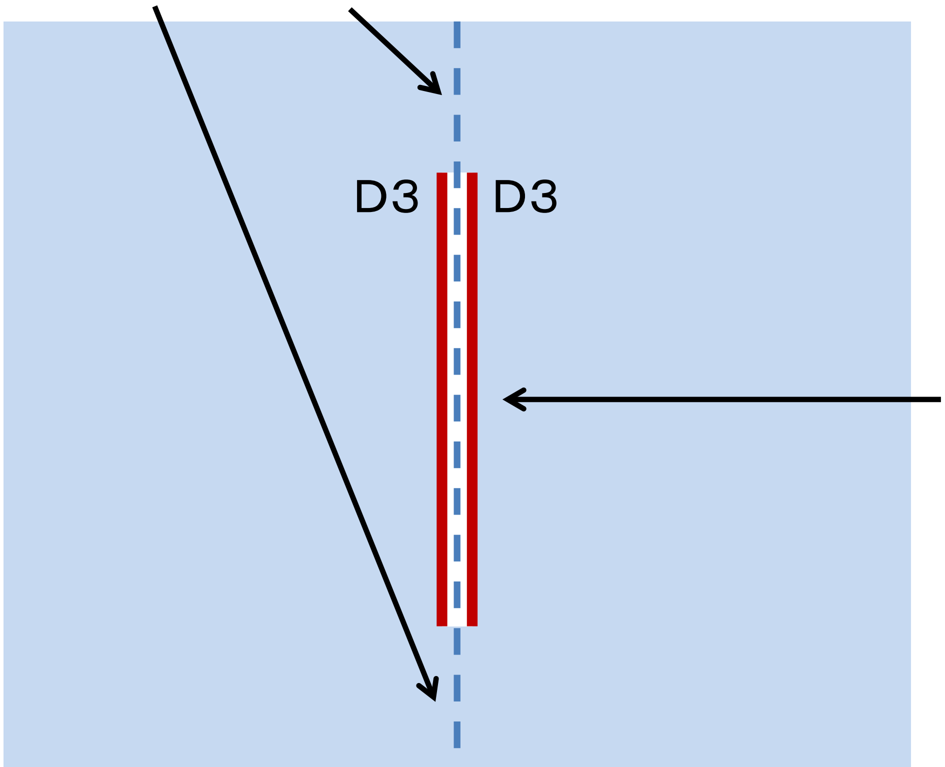
$$\langle B|\ \mathrm{Texp}\Big(-i\int d\tau(\hat{H}+g_{\mathrm{st}}\hat{P})\Big)\ |B\rangle$$

DブレーンがN_3枚重なっている場合

$$\langle B|\ \mathrm{Texp}\Big(-i\int d\tau(\hat{H}+g_{\mathrm{st}}N_3\hat{P})\Big)\ |B\rangle$$

スリット演算子の構成 [’06,’08 Kruczenski]

① $X^\mu(\sigma),\ \Pi_\mu(\sigma)$ が連続



② ディリクレ方向

$$X^\mu(\sigma)=0$$

左から当たって0
右から当たって0

③ ノイマン方向

$$\Pi_\mu(\sigma)=0$$

左から当たって0
右から当たって0

① $X^\mu(\sigma)\hat{P}=\hat{P}X^\mu(\sigma), \quad \Pi_\mu(\sigma)\hat{P}=\hat{P}\Pi_\mu(\sigma)$

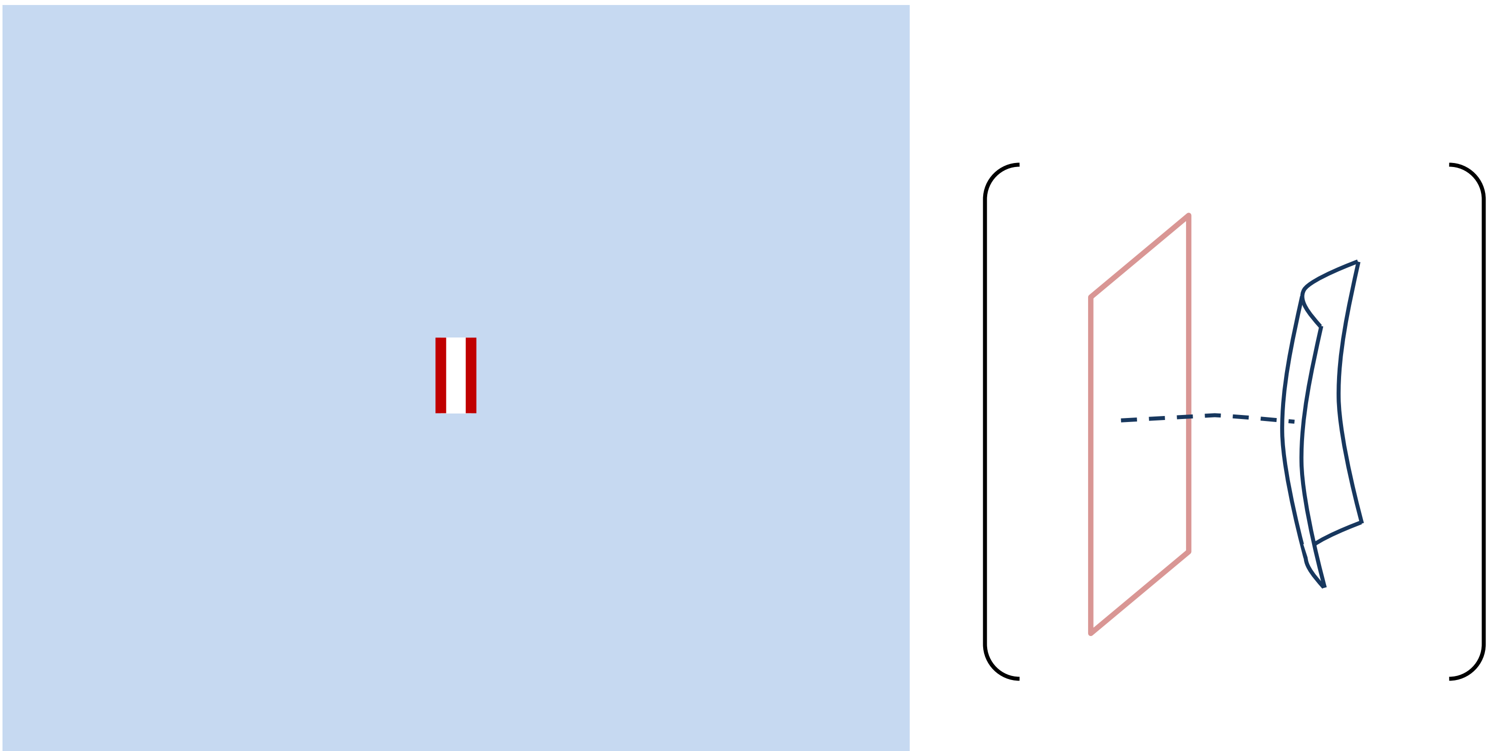
② $X^\mu(\sigma)\hat{P}=\hat{P}X^\mu(\sigma)=0$

③ $\Pi_\mu(\sigma)\hat{P}=\hat{P}\Pi_\mu(\sigma)=0$

（Kruczenskiはきちんと超弦でやっている）

幅の小さな極限

[’06,’08 Kruczenski]



$$g_{\rm st} N_3 \hat{P} \sim \frac{1}{2} \int d\sigma \frac{g_{\rm st} N_3}{|\vec{Y}|^4} \left(\vec{\Pi}_X^2 + \vec{Y}'^2 \right)$$

＋αの話

D1-D5背景時空と弦

	x^+	x^-	x^1	x^2	x^3	x^4	y^1	y^2	y^3	y^4
D1：	○	○	△	△	△	△	−	−	−	−
D5：	○	○	○	○	○	○	−	−	−	−

$$\underbrace{x^1 \; x^2 \; x^3 \; x^4}_{\text{４次元トーラス}}$$

△： delocalized, smeared

$$ds^2_{\text{D1-D5}} = \sqrt{H_1 H_5}\Big(\frac{dx^+ dx^-}{H_1 H_5} + \frac{d\vec{x}^2}{H_5} + d\vec{y}^2\Big) \qquad H_i = 1 + \frac{g_{\text{st}} N_i}{|\vec{y}|^2}$$

（ $\mathrm{e}^{-2\phi} = \cdots, \quad C_{\mu\nu} = \cdots$ はとりあえずおいておこう。）

光錐ゲージとσゲージ

光錐ゲージラグランジアン:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{l.c.}} = \frac{1}{2}\left(H_1 \dot{\vec{x}}^{\,2} + H_1 H_5 \dot{\vec{y}}^{\,2} - \frac{1}{H_5}\vec{x}^{\,\prime 2} - \vec{y}^{\,\prime 2}\right)$$

σゲージハミルトニアン:

$$\mathcal{H}_\sigma = \mathcal{H}_{\mathrm{flat}} + \frac{g_{\mathrm{st}} N_1}{2|\vec{y}|^2}\left(\vec{x}^{\,\prime 2} + \vec{y}^{\,\prime 2}\right) + \frac{g_{\mathrm{st}} N_5}{2|\vec{y}|^2}\left(\vec{p}_x^{\,2} + \vec{y}^{\,\prime 2}\right) + \frac{g_{\mathrm{st}}^2 N_1 N_5}{2|\vec{y}|^4}\vec{y}^{\,\prime 2}$$

調和関数規則

[’96 Tseytlin, 太田さんの教科書]

$$ds^2_{\mathrm{D3}} = \sqrt{H_3}\left(\frac{dx_+ dx_- + d\vec{x}^2}{H_3} + d\vec{y}^2\right)$$

$$ds^2_{\mathrm{D1\text{-}D5}} = \sqrt{H_1 H_5}\left(\frac{dx^+ dx^-}{H_1 H_5} + \frac{d\vec{x}^2}{H_5} + d\vec{y}^2\right)$$

$$ds^2_{\mathrm{D3\text{-}D3}} = \sqrt{H_3^{(1)} H_3^{(2)}}\left(\frac{dx^+ dx^-}{H_3^{(1)} H_3^{(2)}} + \frac{d\vec{x}^2_{(1)}}{H_3^{(1)}} + \frac{d\vec{x}^2_{(2)}}{H_3^{(2)}} + d\vec{y}^2\right)$$

このタイプは同様の性質を持つ（D３-D３はディラトン無し）

まとめとこれから

まとめとこれから

まとめ

- σ ゲージ = 光錐ゲージ + τ-σ入れ替え（$X^+=\sigma$）
- σ ゲージ ⇒ ハミルトニアンはg_{st}の１次で止まる

  〇 D3ブレーン背景時空

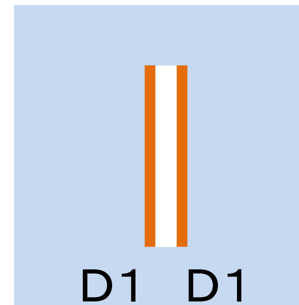
  〇 スリット演算子（平面図の和）から導かれるハミルトニアン
- スリット演算子はD3ブレーン背景時空を再現
- 調和関数規則を満たすものもハミルトニアンはg_{st}の有限次

これから

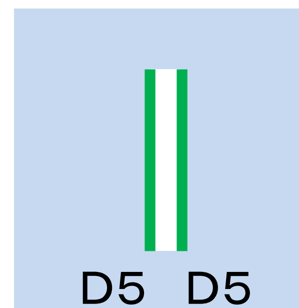
- D1-D5　や　D3-D3　のスリット演算子を求める

D1-D5のスリット？

$$\frac{g_{\rm st}N_1}{2|\vec{y}|^2}\left(\vec{x}\,'^2+\vec{y}\,'^2\right) \quad \overset{?}{\Leftrightarrow}$$



$$\frac{g_{\rm st}N_5}{2|\vec{y}|^2}\left(\vec{p}_x{}^2+\vec{y}\,'^2\right) \quad \overset{?}{\Leftrightarrow}$$



$$\frac{g_{\rm st}^2N_1N_5}{2|\vec{y}|^4}\vec{y}\,'^2 \quad \overset{?}{\Leftrightarrow}$$