

# 集合の演算に関する等式

平成 14 年 6 月 15 日

## 1 集合の和積標準形

集合の演算に関してはふつう「和積標準形」ということばは使わないが、命題論理との類似の変形規則を知っていると便利なので、ここでは臨時に「集合の和積標準形」ということばを使う。

集合の和積標準形は、命題論理の論理式の和積標準形の定義 ( pp.108-109 ) において、 $\vee, \wedge, \neg$  をそれぞれ  $\cup, \cap, *^c$  で置き換えたものである。したがって、ある集合の表現を和積標準形に変形するには、110 ページの命題 3.8 においてこのような記号の置き換えをすればよい。ただし集合の場合には  $\Rightarrow$  は不要。

例  $(A \cup B)^c$  は  $A^c \cap B^c$  に変形 ;  $A \cup (B \cap C)$  は  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$  に変形。

和積標準形に直したとき  $(X \cup \dots \cup X^c \cup \dots)$  の形の基本和があれば、全体集合になるので、これは除くことができる。また、 $\dots \cap X \dots \cap X^c \dots$  の形になれば空集合になる。このようにして無駄を省くことができ、二つの集合が等しいかどうかチェックするのが容易になる。

## 2 問題

- 全体集合  $U$  の中で考える。次のうちで全体集合になるもの (a)、全体集合ではないが空集合でないもの (b)、空集合 (c) はどれか？
  - $A \cup (B \cap A^c) \cup (B^c \cap A^c)$
  - $((A \cup B)^c \cup A)^c$
  - $A \cap (A \cup B)^c$
- 次の集合を、できるだけ簡単な形で表せ。
  - $(A^c \cap B^c)^c$
  - $(A^c \cup B^c)^c$
  - $(A^c)^c$
- 次の等式は正しいか？
  - $(A \cap B^c)^c = A^c \cap B$
  - $X^c \cup (X \cap Y) = X^c \cup Y$

4. 次の集合を和積標準形に変形せよ。

(1)  $((X^c \cup (Y \cap Z)) \cap ((Y^c)^c \cup (X \cap Y)))$

(2)  $((X \cap (X^c \cup Y)) \cup ((X \cap Y)^c \cup Z))^c$

### 3 解答

1. 107ページの例3.4を参照。

(1) (a), (2) (b), (3) (c)

2. 103ページの命題3.3を参照。

(1)  $A \cup B$  (2)  $A \cap B$  (3)  $A$

3. (1) Yes (2) Yes

4. 111ページの例3.6を参照。

(1)  $(X^c \cup Y) \cap (X^c \cup Z) \cap (Y \cup X) \cap (Y \cup Y)$

$Y \cup Y$  は  $Y$  でよい。

(2)  $(X^c \cup X) \cap (X^c \cup Y^c) \cap X \cap Y \cap Z^c$

$(X^c \cup X) \cap$  はなくてよい。