集合の演算の証明2004

平成 16 年 6 月 20 日

集合の演算に関する等式は、命題論理の等式をそのまま使える。すなわち、$x \in A$ を一つの基本文とみなし、類似がわかりやすいようにこの命題を文字 P_A で表すことにする。このとき

$$x \notin A, x \in A \wedge x \in B, x \in A \vee x \in B$$

はそれぞれ

$$\neg P_A, P_A \wedge P_B, P_A \vee P_B$$

と表される。また、

$$x \in A^c, x \in A \cap B, x \in A \cup B$$

はそれぞれ

$$\neg P_A, P_A \wedge P_B, P_A \vee P_B$$

と表される。論理式 X と Y について、$v(X) = v(Y)$ を $X \leftrightarrow Y$ と書くことにする。

この略記法を使って、p.8 の命題 12 が p.100 の命題 31 を使って証明できる

例 分配律

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

証明 $x \in (A \cap B) \cup C \leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in C$

$$(x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \leftrightarrow (P_A \wedge P_B) \vee P_C$$

$\leftrightarrow (P_A \vee P_C) \wedge (P_B \vee P_C) \leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) x \in (A \cup C) \cap (B \cup C).$

p.100 の分配律を使った。

ほかに集合演算のいくつかの等式の証明をしてみよう。

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \tag{1}$$

証明 右辺 $\leftrightarrow x \in (A^c \cap B^c)^c \leftrightarrow \neg(\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B))$

$$\leftrightarrow \neg(\neg P_A \wedge \neg P_B) \leftrightarrow \neg\neg P_A \vee \neg\neg P_B$$

$$\leftrightarrow P_A \vee P_B \leftrightarrow x \in A \vee \in B \leftrightarrow \quad \text{左辺}$$

ここで、ドモルガンの法則と二重 $\neg$ の除去を用いた。

(1) の証明において $\cup$ と $\cap$、$\vee$ と $\wedge$ を入れ替えると、次の等式が得られる。

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \tag{2}$$

$$(A^c)^c = A \tag{3}$$

証明 $x \in (A^c)^c \leftrightarrow \neg x \in A^c \leftrightarrow \neg\neg x \in A \leftrightarrow \neg\neg P_A \leftrightarrow P_A \leftrightarrow x \in A$

$$(X \cup B^c)^c = X^c \cap B \tag{4}$$

証明 (2) を書き換えると $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$. $A = X^c$ とおくと、これは

$$((X^c)^c \cup B^c)^c = X^c \cap B$$

(3) により左辺を変形して、左辺 $= (X \cup B^c)^c$ となり (4) を得る。