極限再帰性という計算概念の基礎を求めて
- その背景と分析 -

八杉満利子　D1

平成 20 年 12 月 19 日

目 次

1　はじめに

　私の目標は、極限再帰性、すなわち決定可能な手続きの極限を求めること（極限同定と呼ばれる）を計算として認めることのできる知的基盤とはどのようなものであり得るか、についての考察をすることである。しかしこの一文

で表現されたことだけを孤立させて取り上げるわけではない。また計算論一般に興味があるわけでもない。私の関心は、後述する数学的背景の中での極限再帰性にある。なお、本稿での「計算」とは基本的に自然数上の計算であり、人が思考実験的に行う行為を指す。

（極限同定を計算として認める）知的基盤とは何をさすのか、目標のためには計算および極限同定の認識をどのような視点から考察するべきなのか、など、現時点では問そのものが明確ではない。脳の活動など生理的な観察と関連させる研究も可能であるかもしれないが、ここでは計算に関わる人の知的活動の抽象的・言語的記述を目標にする。したがって人の知的活動の分類は人為的なものであると考えるのが妥当であろう。

極限同定をとくに取り上げる理由は、そこに極限が関わらない再帰的手続きと本質的な相違が認められるからである。再帰的な手続きは人にとって自然な計算過程と認められているものと仮定した上で[1]極限同定に関わる知的活動に考察の焦点をしぼるが、当然ながらその前に再帰的な計算の知的基盤も記述しなければならない。

本稿では最終目標に向けて、答えを求める道筋をつけるために問題設定の準備をする。

まず極限同定を問題として取り上げることの背景と、その背景から導かれる具体的な問題について概観する（2 節 ∼5 節）。その後「想像」というキーワードによって数学、再帰的計算および極限同定の知的的活動を分析する（6 節 ∼10 節）。考察を進めるほどに問題の様相が変化するであろうが、とりあえず問題のより明確な記述を試みる。最後にいくつかの関連文献を挙げ、それらについて多少の感想を記す。それによって今後の方針も大筋は定まってくるだろう。

以下 2 節 ∼5 節の内容は [8], [9] でも概観している。

2　解析学における計算可能性構造

解析学において ”計算可能な対象物 ”のなす構造を ”解析学における計算可能性構造 ”と呼ぶ ([6])。その基本は実数や連続関数など連続体上の数学における基本的な対象物のうちで ”計算可能なもの ”、すなわち ”計算可能実数（列）”、”計算可能連続関数 ”などである。これらは実数や連続関数の定義において収束率や連続率を再帰関数によって与えることで得られる。このようになんらかの ”精度（率）”を再帰関数で与えることを ”実効化 ”という。

数学の中に計算可能性を持ち込む意義はいくつかある。第一に、計算機の発達によって複雑な計算が可能になり計算結果から理論をたてることが可能になったことである。とはいえ、実際に計算機に乗るような数学の対象物は

[1]実際長い年月と多数の頭脳による知恵として再帰的計算手続きは自然なものと認められている。

限られている。したがってなんらかの意味で計算が可能な対象物の一般的な構造を調べることが、計算という観点からみた数学の一つの姿を明らかにすることになる。第二に、名前のついているよく知られた実数や関数、あるいは具体的に与えることのできる数列や関数などは事実上なんらかの計算手続きを内包する。抽象的な議論はいくらでもできるが、具体例をあげるためには、その対象物の記述が必要であり、その記述という作業が自然に計算可能な対象物を作り出す。

実効化を例で示そう（[9] より引用）。なお、再帰関数の定義は 5 節で与えるが、ここでは「計算プログラムが書ける自然数上の関数（自然数列）」程度に考えておけば十分である。

任意の実数 x は、

(A) (i) ある有理数のコーシー列 $\{r_n\}$ があって、

(ii) x はそれによって近似される。

(ii) を詳しく書くと、「任意の p に対して N が存在して、$n \geq N$ ならば $|x - r_n| < \frac{1}{2^p}$ が成り立つ」となる。p, N, n は自然数を表す変数である。(A) の実効化、すなわち (A) を「計算」の立場から表現しなおすと、次の (B) になる。

(B) (i) n に対して r_n を計算する方法が存在する。

(ii) $\{r_n\}$ の x への近似の精度（近似率あるいは収束率）の計算方法が存在する。

(B) の数学的な記述は次の (C) になる。

(C) (i) $\{r_n\}$ は（自然数から有理数への）再帰関数である。

(ii) ある再帰関数 α が存在して、任意の p と任意の $n \geq \alpha(p)$ について、$|x - r_n| < \frac{1}{2^p}$ が成り立つ。

(ii) は、いわゆる $\varepsilon - \delta$ 方式の条件において ε に対して δ（この場合には p に対して N）を与える計算方法の存在を要求するものである。

(B)（または (C)）が成り立つ実数 x を計算可能と呼ぶ。実数の計算可能性は有理数 $\{r_n\}$ の再帰性と収束率 α の再帰性によって特徴付けられる。解析学の実効化は基本的にこの 2 種類の再帰性が基本になっている。

実数の計算可能性の定義は実数列 $\{x_m\}$ に対して自然に拡張される。

実数関数 f が（実数全体で）連続である、とは、

(D) (i) 任意の実数 x に対して関数値 $f(x)$ が定まり、

(ii) 連続の性質が成り立つ。

(ii) は、”任意の p, k に対して N が存在して、$x, y \in [-k, k]$ で $|x - y| < \frac{1}{2^N}$ ならば $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^p}$ が成り立つ ”と表される。

(D) の実効化は次のように述べられる。

(E) (i) ある計算方法があって、任意の計算可能な実数 x に対して、その方法によって計算可能実数 $f(x)$ を得ることができる。

(ii) 連続率 N の計算方法が存在する。

(E) をもって連続関数 f の計算可能性と考え、数学的には次の (F) で表現する。

(F) (i)（列計算可能性）f は計算可能実数列 $\{x_n\}$ を計算可能実数列 $\{f(x_n)\}$ に写す。

(ii)（実効的連続性）f に対して再帰的な連続率 β が存在する：

すべての p, k に対して $x, y \in [-k, k]$ で $|x - y| < \frac{1}{2^{\beta(p,k)}}$ ならば $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^p}$ が成り立つ。

このような定義により実数上の連続関数に関するいわゆる微分積分学の実効化が可能になる。

しかし多くの有用な不連続関数にも計算概念は可能である。そのための様々な理論があるが、それらについてはここでは触れない。ここで問題にするのは、素朴な意味で不連続関数を ”計算 ”することである。当然ながら連続関数の場合の (ii) に類似な定義は不可能である。不連続関数は連続率のような基準になる定量的な特性がないのである。それでは (i) はどうか？実は不連続点を含む実数列に対して、一般に列計算可能性は成り立たない。

3 節で、本論の問題点を提示する反例を扱う。それは、計算可能実数における関数値は計算可能であり、不連続点（列）は計算可能であり、不連続点を含まない区間では連続かつ計算可能、という多くの好条件をもつ関数の例でもある。

「解析学における計算可能性」研究の目的は、数学の対象物を ”計算可能 ”なものに限って通常の数学を実行し、それが不可能なケースでは反例を与えることである。その際の議論、すなわち数学の証明といわれるもの、は通常の古典論理にしたがっており、なんら特殊なものでないことは明確にしておかなければならない。

3 不連続関数における反例

$[x]$ は最大整数値関数、あるいはガウス関数と呼ばれ、x を越えない最大整数を値とする。関数値が各整数点で飛躍するので不連続である（右連続ではある）。個々の関数値は整数なのだから当然計算可能である。後で説明するように、我々は関数としての $[x]$ が「計算可能」だという感覚をもつ。他方列計算可能性が成り立たないという意味で、一般的定義によれば $[x]$ の値の計算方法はない。ガウス関数は計算可能性についての、数学的な定義と人の感覚のずれを示す例といえるが、人の感覚による計算可能性を何らかの形で反映させる方法を 4 節で提示する。

ガウス関数についての列計算可能性の反例を [10] から引用しておく。

a は 0 を値としてとらない再帰的単射（１対１関数）で、値の集合（$Ran(a)$ と書く）が再帰的でないものとする。$\{x_n\}$ は次のような計算可能実数列とす

る。（実際には有理数列である。）

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{2^m} & n = a(m) \text{ のとき} \\ 0 & \text{そのような } m \text{ がないとき} \end{cases}$$

これを使って、別の計算可能実数列 $\{y_n\}$ を $y_n = 1 - x_n$ と定義する。このとき

$$y_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^m} & n = a(m) \text{ のとき} \\ 1 & \text{そのような } m \text{ がないとき} \end{cases}$$

となり、したがって

$$[y_n] = \begin{cases} 0 & n = a(m) \text{ のとき} \\ 1 & \text{そのような } m \text{ がないとき} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで $\{[y_n]\}$ が計算可能実数列であると仮定すると、$Ran(a)$ が再帰的になることが示される。すなわち、$[y_n] < \frac{1}{2}$ ならば $n \in Ran(a)$ であり、$[y_n] > \frac{1}{2}$ ならば $n \notin Ran(a)$ である。仮定によれば前提条件は再帰的なので、$Ran(a)$ が再帰的になる。これは a の条件に矛盾する。したがって、計算可能な入力 $\{y_n\}$ に対して関数値の列 $\{[y_n]\}$ は計算可能列ではない。

他方、人はガウス関数を ”計算 ”する。たとえば、まず各整数点 n を認識し、関数値 $[n] = n$ を計算する。そしてこれを基に $n < x < n + 1$ について関数値 $[x] = n$ を計算する。この「計算」はどのような原理にしたがっているのだろうか。このことについて以下で考察していく。

4 不連続関数の列計算

[10] にしたがって $[x]$ の計算を実行してみる。それを手がかりにしてある種の不連続関数の値の計算において再帰関数に何を付け加えるべきか、を分析する。

任意の計算可能な実数 x について x が再帰的有理数列 $\{r_k\}$ と再帰的収束率 α で表現されるものとするとき、その情報を使って $n - 1 < x < n + 1$ となる整数 n を求める計算方法が存在する。たとえばそれによって得られた n が 0 であったとしよう。次のような性質 $R(p)$ を考える。

$$R(p) \equiv r_{\alpha(p)} < -\frac{1}{2^p}$$

$R(p)$ は再帰的に判定できる。このとき再帰的自然数列 $\{N_p\}$ を次のように定義する：$R(p)$ が成り立つとき $N_p = 1$、成り立たないとき $N_p = 2$。（N_p の値は相異なる自然数であれば何でもよい。）さらに、N_p が決まるごとに $N_p = 1$ ならば $s_p = -1 + \frac{1}{2^{p+1}}$、$N_p = 2$ ならば $s_p = \frac{1}{2^{p+1}}$ と定義すると、$\{s_p\}$ は再帰的な有理数列である。

$R(p)$ がどこかの $p = p_0$ で成り立てば p_0 以上の任意の q についても $R(q)$ は成り立つ。したがって N_p は最終的に安定して値 1 をとる。もしそのような p がなければ、N_p は最初から安定していて値は 2 である。これらの安定値を整数列 $\{N_p\}$ の極限と定義し、$\lim_p N_p$ と書く。極限値は 1 か 2 に確定する。極限値が 1 ならば $[x] = -1$ であり、2 ならば $[x] = 0$ である。いずれにしても再帰的有理数列 $\{s_p\}$ は $[x]$ を近似する。

この場合の近似率はどうなるか？$\lim_p N_p = 1$ の場合には $R(p)$ が成り立つ最初の $p = p_0$ が近似率になる。$\lim_p N_p = 2$ の場合には最初から正しい値に行き着いているので、近似率は 1 でよい。$\lim_p N_p$ が 1 の場合、2 の場合、それぞれの中では近似率は再帰的に求まる。

以上のことから、もしも再帰関数 $\{N_p\}$ について極限値をとる操作を計算過程として容認するならば、$[x]$ は再帰的有理数列 $\{s_p\}$ によって近似され、近似率は $\lim_p N_p$ の値にしたがって再帰的に決まる。言い換えると、$\{s_p\}$ の $[x]$ への収束率は $\lim_p N_p$ に相対的に再帰的（recursive in $\lim_p N_p$）な関数として得られる。

１個の計算可能な実数 $[x]$ について説明したが、以上の議論は x の特殊性に依存しないものなので、計算可能実数列 $\{x_m\}$ について同様の考察ができる。そのときには $\{N_{mp}\}$ と $\{s_{mp}\}$ が m にも依存して決まる。

一般に再帰関数 $\gamma(m,p)$ について $p = 0, 1, 2, \cdots$ と計算を進めるときに、もしもある p_0 から先は一定の値になるならば、その値を $\gamma(m,p)$ の p に関する極限とよび、$\lim_p \gamma(m,p)$ と表す。結果は m の関数であり、極限再帰関数と呼ばれる。γ が p のみの関数であるときには極限値は定数になる。

極限再帰関数を使えば、ガウス関数の列計算可能性は次のように表現される。「任意の計算可能実数列 $\{x_m\}$ に対して関数値の列 $\{[x_m]\}$ は再帰的（２重）有理数列で近似され、その収束率は極限再帰関数で得られる。」この状況を「極限再帰的列計算可能性」と呼んでおく。

再帰関数の極限値をとるというのは便宜上の操作のように見えるが、ゴールドが学習理論のために [3] で導入した概念であり、「極限同定」と呼ばれている。

問題は再帰関数の極限同定を計算として実感できるか、ということである。

5　再帰関数と極限再帰関数

連続体上の計算可能性の基礎を再帰関数による精度保証においたが（２節）、数学的には離散構造上の ”計算可能 ”関数であればよい。Turing 機械など他の理論もあるが、数学的にはすべて同値である。また、数学的経験により、離散構造上の計算可能関数はそれ以外にはない（Church のテーゼ）という合意が得られている。

ここで離散構造上および連続体上の計算可能性に関するどの理論をそれぞ

れ採用するか、などは、どのような目的をもってそれらに関わるか、による。ここではあくまでも現場の数学者が通常の数学研究を行う、というスタンスをとっている。したがって一つの計算論の視点から数学を見るのではなく、計算概念を含めた数学行為に適切な方法論をとる。その意味で再帰関数が（より）適切である。

再帰関数がどのような計算手続きをもつか、は定義を提示するのが最善であろう。以下の 1.~6. で定義される自然数上の関数 ϕ を再帰関数と呼ぶ。再帰関数の後に極限同定の定義も与える。

1. （次の数）$\phi(x) = x + 1$
2. （定数）$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = q$ （q は任意の自然数）
3. （射影）$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$

4.~7. において ψ , $\chi, \chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_m$ は再帰関数とする。

4. （合成） $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) =$

$$\psi(\chi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \chi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \chi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

5. （原始再帰）

$$\phi(0, x_1, x_2, \cdots, x_n) = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\phi(x + 1, x_1, x_2, \cdots, x_n) = \chi(x, \phi(x, x_1, x_2, \cdots, x_n), x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

6. （最小値作用素）各 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して

$$\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$$

となる y が存在すると仮定する。

$$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \min\{y : \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0\}$$

7. （極限同定） 各 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ について

$$\exists y \forall x \geq y.\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, x) = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$$

が成り立つとき、

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \min\{y : \forall x \geq y.\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, x) = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)\}$$

とおく。

$$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, h(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

以上の定義において、5. までは一歩一歩の計算手続きが与えられていることは、明らかであろう。

6. は事情が異なる。まず

$$\exists y.\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$$

という条件がついている。（5. まで、すなわち原始再帰関数については等号の判定など述語についての判定は論じられていない。自然数についての等号の判定は原始再帰的に可能であるが、その説明なしにこの条件がついている。これは技術的なことなので、一般にこのような定義が認められている。）ここで $\exists y$ は上界なしの存在命題という強い条件である。そのような y の有無は一般には判定できないにもかかわらず、6. を計算としてなぜ認ているか、について一言触れておく。我々の立場は、2 節で述べたように数学的な対象物の制限以外はすべて通常の数学における議論を前提としている。したがって「この条件が成り立つ」ことが古典的に前提できればその前提のもとで次の計算に進んでよい。要はその中で計算できればよいのである。

実際にそのような y があれば、たとえそれを知らなくても一歩一歩の計算を続ければ、やがてそれに行き当たる。ここで実際に正しい y であることが確認できる、ということがポイントである。人は正しい答えであることを認識して解答する。原始再帰関数の計算との相違は、いつしかるべき y に到達するか予測できないことである。しかし必ずその y に到達し、関数値が確定するのである。

??. の計算の難点は、たとえ正しい y あるいは $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ に到達したとしても人はそれと認識できないことにある。条件が y から先無限個の x についてチェックすべきものだからである。この点が 6. までの計算概念を超えるものである。連続体における近似の精度のような「近似度」を評価する量は全くないのである。

他方一歩一歩の計算はできる。しかも自分では気がつかなくてもいつかは必ず正しい答えを得ている。仮に無限回の計算を想定できれば、その先で実際に正しい答えを見出すことができる。この想定は人のどのような認識力によって妥当化されるのだろうか。ここでは人にそのような認識力が備わっていると仮定する。$[x]$ のような不連続関数の値の計算は自然だからである。実際には連続とは程遠い多くの関数についても極限再帰的列計算可能性が成り立つのである。

無限回の計算の実行後に結果を得るというプロセスは（それがプロセスと認められれば、であるが）、具体的な計算ではない。それを計算と認識できるとすれば、その能力は「想像力」である、と考える。ここで「想像力」と括弧をつけたのは、この時点でこのことばが未定義で使用されているからである。とりあえず素朴な意味で「想像力」と言い表しておく。また、想像力の産物を「イメージ」と言い表しておく。

当然ながら想像（力）は再帰関数や極限同定に限定されてはいない。また我々の関心事は想像力一般あるいはイメージ一般ではなく、数学とそのなかでの実効性（計算可能性）に関わることではあるが、それは想像（力）一般に支えられている。

以上のことを念頭におきながら、目標に向けての準備に進む。

6　数学における想像

数学においては具体的に語られる多くの、いやほとんどの対象物や概念が想像によって裏打ちされている。文字（記号を含む）列としての、あるいはことばの羅列としての対象となんらかのイメージとが一体となっており、このイメージをもつことができてはじめて数学が「分かった」と感じることができる。その感触を得られない限り、計算や証明をたどることができても、主体的に数学を「理解した」ことにはならない。すなわち、新しい知見を得たことにならない。しかし計算や証明に十分習熟すれば、自ずとイメージが湧くものでもある。イメージといっても明確に何らかの像や図形が思い浮かぶとは限らない。「イメージ」とは現時点では「脳内に思い浮かぶ想念で言語的でないもの」としておく。かならずしも視覚的ではないが、視覚と無関係ではない。言語が全く介在しないとも断言しない。8 節 ∼10 節で計算に関するイメージの把握を試みる。ここでは数学におけるイメージのいくつかの例を、自らの脳内活動を反省しつつ述べてみる。したがってイメージといっても人の知的活動に原因をもち、知性に訴えるものに限られている。

たとえば立方体の条件が与えられれば、たしかに立方体が思い浮かぶかもしれない。しかしではそれは稜線で描かれているものなのか、面に色はついているのか、と問われたときに、かならずしも稜線や面の色が思い浮かんではいない。それが次元をもっているとすらも限らない。

様々な無限集合などはとくに形も色もないのが普通であるが、それらの何らかのイメージが確実にに脳裏に存在するものなのである。多くの場合イメージするものは見たことも描いたこともない現象であり対象物なのだから、それらが思い浮かぶ、というのは人間知性がもつ想像力の作用の結果であると考えざるをえない。

極限計算を含めて数学のなかの計算に関する想像力の役割を少し検討してみる。

再帰関数の最小値作用素は、その存在が保証されている場合、その値にいつ達するかは分からないが、いつかそこへ到達してそれが正しい値であることを確認している状況を想像できる。極限再帰関数の計算は、その極限の存在は保証されているものとするとき、いつかは正しい値に到達しているが、計算結果がその値であるかどうかは通常は認知できない。正しい値は無限回の計算を実行しきった後で確定する。我々はその無限回の計算の終了とそれ

による値の取得に対する感触をもっている。無限遠点でのできごとと感じることもあり、無限遠点においてそれまでの計算を観察し、値を拾い出すというイメージのこともある。ここで無限遠点といっても、距離が遠いとは限らない。一歩一歩の計算を超えたある地点を仮に「無限遠点」と呼んでいるだけである。また、逐次計算は時間（ステップ数）が関係するが、「無限遠点」が無限時間先にあるわけではない。（計算については 8 節 ~10 節で詳説する。）

有理数や実数のコーシー列は収束するが、その様子が明確に見えるわけではない。実際に点が動いて行くというわけでもない。しかし次第に収束する様子はイメージできる。「次第に」といっても必ずしも時間経過を必要としないが、また時間の経過を感じるともいえる。

同じ極限という表現を使っても、連続体上の極限と離散構造上の極限とでは質が異なる。前者では接近の評価基準があるので、無限回の操作をしなくても接近の様子を想像できる。後者の場合は無限回の操作なしには答えが全く予測できない。

平面上の関数の極限的挙動の正確なグラフは一般に描画不可能であるが、限りなく一定の値に近づく、増大する、あるいは振動する、という状況をイメージできる。ただしグラフだからといって線が見えるわけではない。

論理推論でも、木構造的に平行推論、すなわち複数の同時推論が思い浮かんでいることが多い。証明論においては証明図の正規化など図形変換の一般的な様子が浮かぶ。

集合論のように具体的な実態のない理論においてもべき集合の構成、到達不可能基数、置換公理による集合の構成、などのイメージをもつことができる。

以上のように論理的な構成（数学の定義・定理・証明などの思考方法をこう呼ぶことにする）に習熟することにより、本来「イメージ」がない数学概念・対象物が脳の中で生きてくる。これらは外の対象物の経験的な理解と類似している。とくに計算機の発達で膨大な数値の列や複雑な描画も可能になり、植物観察などと類似の経験が数学的対象物に関しても可能になった。そこからイメージを膨らませる可能性は自然科学に準拠するだろう。しかし集合や論理などのように一貫して脳内の事象に留まる場合もある。

イメージ獲得は後天的であっても、それを可能にするのは人知の内在的働きであろう。それを想像力と仮定して、その中でとくに極限同定の作用の説明を試みる。

なお、想像力の産物が pictorial か descriptional かという議論があるが ([11])、数学における一般的なイメージの多くは pictorial とはいえないが、視覚に無関係ともいえない。また、descriptional ともいえない。また、productive ではあるが、無から生じるものでもなく、数学的体験に依存することが多い。

7　想像・イメージ

通常想像といえば、実在するもののイメージ（友人の顔、隣の犬、りんごの皮の中の果肉、など）と、実在しないもののイメージ（龍の爪、天国の花園、など）、存在しても見たことがないもの（アマゾン特有の植物、素粒子、など）などがある。数学の多くの対象物はこれらのどれでもない。数式や定理・証明の理解とは、実在するとはいえないものについてなんらかの視覚的イメージをもつときにはじめて生じる。ただし視覚的といっても花が見えたり点列が実際に見えるとは限らない。

計算についてはさらに計算の「プロセス」がセットになる。単に動きではなく、一定の決まりのある動きであり、動き全体でなく省略が入る。（動き、といっても「動きの想念」があるのみで、多くの場合イメージが動くことはない。）ここではそこまでの想像力を前提とした上で極限同定の想像とはどういうことか、を考察する。

改めて強調するが、ここで ”計算とは何か ”という問をやみくもにとりあげているのではなく、前述のように数学のひとつの構造の究明の手段として計算概念を基底におくのである。またそのなかで再帰関数までは何十年も多くの人々の ”計算概念 ”に耐えてきているので、ここではその上の極限同定に考察の対象を絞っている。ただし再帰関数に関する想像力の基盤を確立した上でなければ極限まで進めない。

想像とはとりあえず標準的な意味、すなわち「現前の知覚に与えられていない物事の心像（イメージ）を心に浮かべること」（広辞苑）として出発する。ただし「心」とは何か問うことはしない。心について問わなくてもイメージが湧くことには変わりない。イメージを得る能力、想像力が問題なのである。カントによれば「感性と悟性の性質を分有し、両者を媒介して認識を成立させる能力」（広辞苑）である。広辞苑のこの解釈における想像力の定義を基本にして今後の考察を進める。しかしその前に素材（極限同定を含む計算過程）のイメージの分析を続ける。

再帰関数の計算および極限同定という概念を取得し操作できるためには、当然簡単な数学および論理の知識と理解力が必要である（自然数、その間の同等性、再帰関数の事例、述語論理の基礎、など）。（ここではそれらの吟味はしない。それらは人間の集団的な知恵に耐えてきたものだからである。）そのような状況であるから、計算概念は知性に立脚していると考えるべきだろう。もちろんそれだけでは不十分である。計算として感じられるためには感覚的認識の助けが必要である。もっともここでは思惟が先で、それをもとに計算の概念を想像するので、思惟されたものが素材となって、感覚的認識で想像する、というのがより良い記述である。思考が概念・判断・推理の作用のみでなく知的直観も含めたものであるとすれば、「思考を土台にする」と表現してよいかもしれない。

8　計算の構図

5 節の再帰関数の定義にしたがって、その計算を想像するとはどういうことか、を検討し、以後の考察の枠組みとすることがこの節の意図である。

計算とは何か決まったプロセスがあって

$$入力 \longrightarrow プロセス \longrightarrow 出力$$

という仕組みである。それを想像するとはどういうことか。原始再帰的計算と最小値作用素の例で考える。

原始再帰関数は一歩一歩の計算であり、問題ないように見えるが、実際には簡単な関数でも膨大な計算量になり、計算ステップをすべて想像で追うことはできない。一歩一歩を追うのではなくて、その計算手続きの仕組みをまるごと想像して納得するのである。そこには計算の抽象化が介在する。

たとえば、関数 g の計算手続きのイメージを仮定するとき、原始再帰関数 ϕ が次のように定義されているものとする。

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 1 \\ \phi(n+1) &= g(n, \phi(n)) \end{aligned} \tag{1}$$

このとき $\phi(n)$ の計算のイメージとは、一般にはこの式 (1) そのものではない。しかし (1) は計算のイメージの根拠であり、(1) をしかるべく解釈した後にそれにしたがって計算のイメージが生じることになる。その意味で (1) そのものもイメージ生成に無関係ではない。この場合の計算のイメージは不特定の数 n について、式 (1) が表すプロセスを総合的に把握したもの、といえる。そのように把握されたものを計算の構図と呼ぶことにする。その構図は計算量を特定することはないが、「いつかは終わる」という想像ではなく、計算終了時点も含めて計算の枠組みを把握しているものである。他方特定の数 n_0 については、逐次計算の様子が思い浮かぶこともあり得る。

最小値作用素の場合には「いつかは終了する」という状況も含めての想像となる。たとえば g の計算プロセスのイメージを仮定し、さらに

$$\forall n \exists m . g(n, m) = 0$$

の保証のもとで再帰関数を定義する：

$$\phi(n) = \min\{m : g(n, m) = 0\} \tag{2}$$

$\phi(n)$ の計算のイメージとは、$g(n, m) = 0?$ というプロセス、そのプロセスが「いつかは終わる」という想念および終了時に m の値を得ている、という構図である。この構図は n の個々の値に依存するものではない。

以上のように再帰関数の計算についてのイメージでは、終了時点は特定できなくても「終了」という事象が明確にになっている。

極限同定においては、この「終了」という事象の把握が根本的に異なる。事実上は終了しているのであるが、それを人が把握できるのは無限回の操作の後なのである。この状況をひとつの典型例で説明する。

ϕ は再帰関数とする。ϕ の最小値を求めたい。最小値は必ず存在する。すなわち

$$\exists n \forall m. \phi(n) \leq \phi(m)$$

が成り立つ。このような n における値 $\phi(n)$ が最小値になる。最小値の計算は次のように行われる。$\phi(i)$ を $i = 0, 1, 2, \cdots$ と順次計算する。その都度最小値のベスト候補を求める。それを $s(i), i = 0, 1, 2, \cdots$ とすると、

$$\phi(0), \phi(1), \phi(2), \cdots, \phi(n), \phi(n+1), \cdots$$

にしたがって

$$s(0) = \phi(0)$$

$$s(1) = s(0) \quad \text{if} \quad s(0) \leq \phi(1); = \phi(1) \quad \text{if} \quad s(0) > \phi(1)$$

$$\cdots$$

$$s(n+1) = s(n) \quad \text{if} \quad s(n) \leq \phi(n+1); = \phi(n+1) \quad \text{if} \quad s(n) > \phi(n+1)$$

$$\cdots$$

最小値は再帰関数 s に極限同定の定義を適用すれば得られる。(存在条件は必然的に成り立っている。) 各ステップの計算は明確なものであり、一歩一歩確実に正解に近づいている。しかもどこかで $s(m)$ が実際に最小値になっている。もしも $s(m) = 0$ となることがあればその時点で最小値を認識できるが、そうでなければ $\phi(n)$ の計算の終了、すなわち無限個の $s(n)$ の計算の後ではじめて最小値が認識できる。言い換えれば、計算を途中で打ち切って求める値を入手はできないのである。

このような極限同定という無限操作を認識する仕組みの記述が本来の目的である。それは再帰関数の計算の認識の自然な延長でなければならない。

9 計算の想像：再帰関数

もう一度以上の計算過程の想像の仕組みを整理しておこう。

計算は「一歩一歩の繰り返しの後に終了」するもので、繰り返しの長さは一般には評価不可能である。この繰り返しの部分を $\cdots$ で表すことが多いが、想像上の計算像は $\cdots$ という視覚的イメージは必ずしももたない。

原始再帰性の場合にはこの $\cdots$ がほどんど問題にならない。その長さが数学的に評価可能であるという事実とともに、各回同じ仕組みで計算が実行されるために、同じ仕組みが「反復される」という想念によって原始再帰的計算過程を想像できる。具体的な数値を与えられた場合には $\cdots$ の部分のより

具体的な過程を想像することもある。計算に要する想像上の時間、すなわち時間経過の実感はほとんどなく、そこに時間がかかっているという想念で時間経過を把握する。空間的にはほとんどワン・スポットである。人が計算を思考する場合には機械のようにセルがつらなったりはしない。（Turing マシンなどを想像してテープ上で計算する人は当然いる。私が 5 節の再帰関数の定義を採用した時点でその立場を排除しているのである。）全体として原始再帰計算のイメージはコンパクトである。

最小値作用素についてはどうか。各ステップは $g(n,m)$ の計算と $g(n,m)=0?$ のチェックであり、それを $m=0,1,2,\cdots$ について順次同様の作業を繰り返す。この場合には $g(n,m)$ の計算および $g(n,m)=0?$ の計算に関しては内容に立ち入って想像することはない。しかしここでは計算の反復自体が問題なのではなく、それが続くことが本質的である。すなわち $\cdots$ が本質的なのである。ただしそれが終了する保証を得ているので、$\cdots$ の先に終了点があり、解答を得る。その解答をもって計算の完成とみなす。この場合 $\cdots$ は空間的な広がりも時間的な広がりも訴えてくる。ただし空間的にも時間的にもその量を特定することはない。とくに時間に関しては実際の時間経過を感覚することはほとんどなく、「時間が経過する」という想念が時間的広がりを訴えるのである。実感できる時間経過は一瞬である。

以上の計算においては計算過程の想像はあるものの、計算の進行および終了に関しては別途確信をもっている。

10　計算の想像：極限同定

ここでは極限同定の想像について 8 節の例を念頭において検討する。$\phi(n)$ を順次計算して $s(n)$ をその都度計算する過程は既知として一括して考える。あとは同じプロセスを延々と繰り返す。$\cdots$ が終わることなく続く。しかし $\cdots$ も途中で途切れる。その後空白があり、空白の先に飛躍する。この飛躍点を無限遠点と呼ぶ。ここで二つの異なるイメージが生じる。一つは無限遠点からそれまでのプロセスを観察し、値（例の場合には $s(n)$ の値）が安定する様子を見るものである。極限の存在が保証されているので、その値は存在し、無限遠点からは安定値が見える。ここで計算が終了する。もうひとつは、自分の視点は始点に留まり、そこから無限遠点まで見通し安定した答えを見るものである。ここで計算は終了する。それぞれの全行程が極限同定のイメージになる。

いずれにしても「終わりなきプロセス」とその先の飛躍のイメージが要であり、再帰関数の場合から本質的な拡張になっている。数学的な相違は計算のプロセスが有限回で終了するかどうか、ということであるが、終了しない場合の特性は初等関数 $\longrightarrow$ 原始再帰関数 $\longrightarrow$ 再帰関数までの各段階の相違とは本質的に異なっている。$\cdots$ が空間的にも時間的にも実感され、さらに $\cdots$

も消え去る虚の場所・時間があり、その先に飛躍して無限遠点がある。

終わりなき計算、無限遠点、時間・空間の広がり、という表現をしたが、実際のイメージでは時間がかかっているわけではない。当然無限回の計算をしているわけでもない。空間的広がりも大きなものではなく、虚の部分に凝縮される。

11 計算の想像：その仕組み

本稿で取り上げている問題の発端は、解析学における計算可能性であり、本稿ではとくにある種の不連続関数の値の計算方法について、それを人（私）が計算と認めることができるのはなぜか、という問に対して何らかの答えを求め、その手がかりを探す準備をしているのであった。「計算と認めることができる」のは論理的な必然ではなくて、いわば心象風景として自然な計算プロセスが存在し得る、ということである。そのような問題を探求するためには、まず問を賢明に設定しなければならない。その手がかりとして、ある種の計算プロセスの「イメージ」を言語化することを試みた。

我々の計算可能性研究は通常の解析学のなかでの活動なので、解析学研究における諸々のイメージを説明できるような人の知的能力を基本にして、その延長として離散構造上の計算のイメージをも包括する能力の記述が求められる。

ここで数学、とくに解析学の枠組みのなかでの再帰関数および極限同定による計算のイメージについて整理しておきたい。

まず数学の「真の理解」となる「イメージング」は、何らかの「構図」に関する意識の作用と考えられる（cf. 6 節）。解析学においては数列の収束など「内在的な動き」を伴う。「内在的動き」とは、実際にはイメージが動くとは限らないが、「動き」という想念を伴い、必要なときには動きのイメージも可能、という意味である。

この枠組みのなかで離散的な計算には「計算過程」という動きが必ず内在している。再帰関数の計算では同じまたは類似の（計算）プロセスの反復と停止性が特徴である。反復は数学では $\cdots$ と表現されることが多いが、それに対応する動きを伴うイメージがわく場合もあり、また反復の式そのものに対応する静止状態のイメージの場合もある。極限同定は反復は $\cdots$ に対応することが多く、その先に何もない虚の部分と飛躍した無限遠点がある。さらに正解を無限遠点を通して観察できる。

これらのイメージを可能にする能力を想像力と呼んで、今後それによって一貫した説明が可能かどうかを検証していきたい。想像力は当然数学の場面に限定されないものであるが、少なくともここでは抽象的な事物の想像力を問題にする。したがって外的経験が基になるのではなく、まず思考があり、それが経験となって想像が可能になると思われる。

12　おわりに

問題解決に近づくために、想像力・構想力（Imagination, Einbildungskraft）に関するいくつかの文献にあたってみた。直接に数学あるいは計算に言及するもの、抽象性が高く効用（創造性など：[2]）の少ない想像について論じているものとは限らないが、今後それらを指針として目標に向かいたい。

[7] によれば、「たとえばりんごの一部を見てその部分的情報に多くのものを補填して「りんご」の知覚を得る。これも想像力の働きである」という。この場合の想像力は外界とのつながりにおいて作用するもので、内的な抽象性の高い対象の想像についてはさらに考察が必要である。

[7] ではさらに「とくにカントによる想像力の図式化機能（Schematismus）の考え方の影響としての M. ジョンソンの場合には（[4]）経験、合理性、意味、認識などの哲学的問題群に新たな見地から解決を与えるために、従来の哲学が「命題」や「概念」を機軸としてきたのに対して、図式化の能力としての想像力とその所産である「イメージ図式」（image schema）から出発する。イメージ図式は一般的で抽象的な認知の構造にほかならない。さらに、イメージ図式は視覚という感覚様相には限定されない点にも注意すべきである」と述べている。数学を対象とする想像にはこの図式化が重要な意味をもつ。

[4] では、「私のイメージ図式はカントに影響を受け、カントのスキーマの概念のちょっとした変形である」と述べ、カントの (A142, B181) と (A140, B179) に言及している。

カントの対応する箇所はここでは引用しないが、原始再帰性のコンパクトな把握など、私が具体例について記述しようとした状況は (A140,B179)（[5]）で「図式」と名づけられているもので説明できると考えている。このなかで内在的な動きおよび無限遠点への飛躍をどう規定するは今後の課題である。

(A141,B180) で、三角形一般の概念の図式を例に挙げている。「三角形というもの」はどこにもなくても、三角形の定義が分かれば人は三角形をイメージできる。その能力が数学および計算の想像を支えるものであり、原始再帰関数の計算式の一般形が与えられればその計算過程あるいは計算の仕組み全体（構図）をイメージできることに通じる。

(A142,B181) で生産的構成力の経験的能力である形象と感性的概念の図式について論じている。形象と図式が数学的構図も含むより広い範囲のイメージ構成の基盤を示すものではないだろうか。

[1] では、カントの数学の哲学の主要な課題への回答が、「数学とは「概念に対応する直観をアプリオリに描く」操作である「構成（Konstruktion）」に由来し、基づく知である」であった、という。主要な課題とは、「なぜ数学は普遍的で確実で明証的でありえているのか」と「経験知や哲学知といった他の認識と数学知は、何故、そしてどのような点で異なるのか」である。本稿の課題は数学の普遍性でも確実・明証性でもなく、それらは承知の上で個人が数学を「真に理解する」仕組みおよびそのなかでの計算に関わる考察であ

る。しかし数学が基本になっているので、まず、カントのこの定義が現代の数学に合致するか、を、[1] を参考に検証し、数学 $\rightarrow$ 再帰的計算 $\rightarrow$ 極限同定、の一貫した認識基盤を検討していきたい。

参考文献

[1] 出口康夫, 「構成・かしか・アルゴリズム
-カント数学論のコンテキストと現代性-」, 「京都学派の伝統とカント」
抜刷 (2005), 1-35.

[2] I. Dilman, *Imagination*-I, Proceedings of the Aristotelian Society Supplementary 41(1967), 19-36.

[3] E.M. Gold, *Limiting recursion*, JSL, 30-1(1965), 28-48.

[4] Mark Johnson, *The body in the mind*,
http://www.arch.columbia.edu/Projects/Courses/Image.schemata/johnsoncenter.html

[5] イマヌエル・カント　原佑訳, 「純粋理性批判　上」, 平凡社ライブラリー, 2008.

[6] Marian B. Pour-El and Jonathan I. Richards, *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag, 1989.

[7] 菅野盾樹, 「想像力」(”講談社版『哲学の木』に掲載予定 ”)
http://www33.ocn.ne.jp/ homosignificans/symbolnoumi/content/works/papers/imagination2.html

[8] 八杉満利子,　「不連続関数の極限計算可能性ー意義と問題点」, 科学基礎論研究　第１００号 vol.30, No.2(2003), 13-18.

[9] 八杉満利子, 「連続体上の計算概念について-再帰関数を超えるもの-」,
哲学論叢　第３５号 (2008), 199-209.

[10] M.Yasugi, V.Brattka and M.Washihara, *Computability aspects of some discontinuous functions*, Scientiae Mathematicae Japonicae (SCMJ) Online, vol.5 (2001), 405-419.

[11] *Imagery and Imagination*, The Internet Encyclopedia of Philosophy,
http://www.iep.utm.edu/i/imagery.htm