平成 16 年度 ~ 平成 18 年度科学研究費補助金
(基盤研究 (B)(2))
研究成果報告書

研究課題　不連続関数の計算可能性—そのパラダイムを目指して—

課題番号　１６３４００２８

は　し　が　き

研究組織　（職名は平成１８年１０月現在で記入）

研究代表者	八杉　満利子	(京都産業大学理学部教授)
研究分担者	辻井　芳樹	(京都産業大学理学部教授)
研究分担者	山田　修司	(京都産業大学理学部教授)
研究分担者	森　隆一	(京都産業大学理学部教授)
研究分担者	小田　秀典	(京都産業大学経済学部教授)
研究分担者	林　晋	(京都大学大学院文学研究科教授)
研究分担者	立木　秀樹	(京都大学大学院人間・環境学研究科助教授)
研究分担者	山崎武	(東北大学大学院理学研究科助教授)
研究分担者	鈴木秀幸	(東京大学生産技術研究所助教授)
海外共同研究者	Brattka, Vasco	(ケープタウン大学数学・応用数学科準教授)
海外共同研究者	Hertling, Peter	(ドイツ連邦軍大学ミュンヘン情報学部教授)

研究経費

平成１６年度	3,100 千円
平成１７年度	2,300 千円
平成１８年度	2,200 千円
総計	7,600 千円

研究発表

以下に本研究課題と関連のある, 研究代表者・分担者および海外共同研究者による, 研究成果の主なものを, 発表論文 (査読有) , 著書, 口頭発表に分けて記載する. これらのうち, 他の研究費の補助も同時に受けているものも含む. また, 直接当科学研究費補助金によらない成果で, 内容が関連あるものも含む.

(1) 論文

1. Mariko Yasugi, Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii, The effective sequence of uniformities and its limit: as a methodology in computable analysis, Annals of the Japan Association of Philosophy of Science, to appear.
2. Hayashi, S., Can proofs be animated by games?, Fundamenta Informaticae 77 (2007), pp.1-13, in print.
3. Vasco Brattka and Ruth Dillhage, On computable compact operators on Banach spaces, Electronic Notes in Theoretical Computer Science 167 (2007), Elsevier.
4. Hayashi, S., Mathematics based on Incremental Learning -Excluded middle and Inductive inference-, Theoretical Computer Science 350 (1), 2006, pp. 125-139.
5. Vasco Brattka, nd Atsushi Yoshikawa. Towards computability of elliptic boundary value problems in variational formulation, Journal of Complexity, 22(6):858-880, 2006.
6. Peter Hertling, A sequentially computable function that is not effectively continuous at any point, Journal of Complexity 22(2006), 752-767.
7. Y.Tsujii, M.Yasugi and T.Mori, Sequential computabilities of a function - diagonal space and limiting recursion -, CCA2004 Proceedings, Electronic Notes of Theoretical Computer Science 120(2005),187-199.
8. M.Yasugi and Y.Tsujii, Computability of a function with jumps-Effective uniformity and limiting recursion-,Topology and its Applications (Elsevier Science), 146-147(2005), 563-582.
9. Mariko Yasugi, Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii, Effective sequence of uniformities and its effective limit, CCA2005 Proceedings (Informatik Berichte 326-7/2005 CCA 2005 Second International Conference on Computability and Complexity in Analysis, FernUniversi"at in Hagen), 301-318.
10. Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii, Mariko Yasugi, Fine computable functions and effective Fine convergence, CCA2005 Proceedings (ibid.), 177-198.

11. Mariko Yasugi, Yoshiki Tsujii, Takakazu Mori, Sequential Computability of a Function - Effective Fine Space and Limiting Recursion -, Journal of Universal Computer Science 11-12(2005), 2179-2191. http://www.jucs.org/
12. Susumu Hayashi, Can proofs be animated by games?, TLCA 2005, Lecture Notes in Computer Science 3461(2005), 11-22.
13. Hideki Tsuiki, Streams with a bottom in functional languages, Lecture Notes in Computer Science 3444(2005), 201-216.
14. Hideki Tsuiki, Real Number Computation with Committed Choice Logic Programming Languages Journal of Logic and Algebraic Programming, 64, pp.61-84, 2005.
15. Suzuki Hideyuki, Double rotations, Discrete and Continuous Dynamical Systems 13(2005), 515-532.
16. Vasco Brattka and Ruth Dillhage, Computability of the spectrum of self-adjoint operators, Journal of Universal Computer Science, 11(12):1884-1900, 2005.
17. Vasco Brattka, Effective Borel measurability and reducibility of functions, Mathematical Logic Quarterly, 51(1):19-44, 2005.
18. Vasco Brattka and Matthias Schroder, Computing with sequences, weak topologies and the axiom of choice, Lecture Notes in Computer Science 3634(2005),462-476.
19. Peter Hertling, Is the Mandelbrot set computable?, Math. Logic Quarterly, 51(1):5–18, 2005.
20. Peter Hertling, A Banach-Mazur computable but not Markov computable function on the computable real numbers, Annals of Pure and Applied Logic, 132(2-3):227–246, 2005.
21. Akama, Y., Berardi, S., Hayashi, S., Kohlenbach, U., An arithmetical hierarchy of the law of excluded middle and related principles, 19th IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS 2004), 14-17 July 2004, Turku, Finland, Proceedings. IEEE Computer Society 2004, pp.192-201.
22. Tsuiki Hideki, Compact metric spaces as minimal-limit sets in domains of bottomed sequences, Mathematical Structures in Computer Science 14(6) (2004), 853–878.
23. Hideki Tsuiki, Dyadic subbases and efficiency properties of the induced $0, 1, \perp^{\omega}$-representations, Topology Proceedings, 28(2), pp.673-687, 2004.
24. Suzuki Hideyuki et al., Complex behaviour of a simple partial-discharge model, Europhys. Lett. 66(2004), 28-34.

25. Yamazaki Takeshi et al., Uniform versions of some axioms of second order arithmetic, Mathematical Logic Quarterly 50-6(2004), 587-593.
26. Vasco Brattka, On the Borel complexity of Hahn-Banach extensions, 120 of Electronic Notes in Theoretical Computer Science 120 (2004), 3-16.
27. Vasco Brattka et al., Computability in linear algebra. Theoretical Computer Science, 326(1-3):187-211, 2004.

(2) 著書

1. 山崎武, ″逆数学と 2 階算術″,「ゲーデルと 20 世紀の論理学 3 」(田中一之編　東京大学出版会)
2. 林晋, 八杉満利子, ″不完全性定理 (ゲーデル著)″ 訳・解説, 岩波文庫 (2006), 309 ページ.
3. 八杉満利子, ″２０世紀後半の記憶–数学のなかの構成と計算 ″,「ゲーデルと２０世紀の論理学 １ 」(田中一之編 東京大学出版会)　第三部 第 2 章 (2006), 182-214.
4. 山田修司, 翻訳「四元数と八元数」(J. H. Conway, D. A. Smith 著) 培風館 2006 年.

(3) 口頭発表

1. 立木秀樹, フラクタル 2 次元立体のスウド ク的色づけ, ２００７年 1 月, 冬の LA シンポジウム (RIMS 研究集会：計算機科学の理論とその応用) 京都大学数理解析研究所.
2. 立木秀樹, Formal Ball 空間の Lawson 位相と距離空間の双曲位相の関係 (with 服部泰直), ２００６年　１２月, General Topology シンポジウム. 愛媛大学知的財産本部
3. Hideki Tsuiki, Lawson Topology of the space of formal balls and the hyperbolic subbase (With Yasunao Hattori), August 2006, Dagstuhl Seminar 06341,Computational Structures for Modelling Space, Time and Causality, Dagstuhl, Germany
4. 八杉満利子・森隆一・辻井芳樹, Sequential computability of a function -effective Fine space and limiting recursion-, 日本数学会２００６年度年会 (４月, 東京).
5. Vasco Brattka, Tutorial on Computability and Complexity in Analysis CCA2006 November 2006(Florida).
6. Mariko Yasugi, Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii, Effective sequence of uniformities and its effective limit, CCA2005 (Kyoto University) August 2005.
7. Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii and Mariko Yasugi, Effective Fine-convergence

of Fine-computable functions, CCA2005 (Kyoto University) August 2005.

8. Vasco Brattka, Some Aspects of computable functional analysis, CCA2005 Kyoto August 2005, invited talk.
9. Peter Hertling, Computable analysis via representations, Satellite Seminar lecture, CCA2005 Kyoto August 2005.
10. Peter Hertling, A sequentially computable function that is not effectively continuous at any point, CCA2005 Kyoto August 2005.
11. Hideki Tsuiki, Streams with a Bottom in Functional Languages (with Keiji Sugihara), April 2005, ESOP 2005: The European Symposium on Programming Edinburgh, U.K.
12. Susumu Hayashi, Can proofs be animated by gamess?, TLCA 05 at Nara, Japan, April 2005 invited by Seventh International Conference on Typed Lambda Calculi and Applications
13. 森隆一・辻井芳樹・八杉満利子, 自己相似性をもつファイン連続関数, 日本数学会　２００５年度年会（岡山大学）9月 2005.
14. Hideyuki Suzuki, Complex behavior of a simple partial discharge model, International Symposium on Complexity Modelling and its Applications, Tokyo, Japan, December 2004.
15. 鈴木秀幸, 合原一幸,「部分放電モデルと二重回転写像」, 符号化と力学系ワークショップ, 大分, 2004 年 9 月.
16. Y.Tsujii,M.Yasugi,T.Mori, Sequential computability of a function - Diagonal computability and limiting recursion -, The 6th Workshop on Computability and Complexity in Analysis (CCA2004) (Academy Leucorea, Wittenberg, Germany) August 2004.
17. 辻井芳樹・八杉満利子・森隆一, Sequential computability of a function - diagonal space and limiting recursion-, 日本数理科学協会年会論理数学分科会 (大阪府立大学) 9 月 2004.
18. 八杉満利子・辻井芳樹・森隆一, Effective sequence of uniformities, 日本数学会秋季総合分科会（北大）9 月 2004.
19. Hideki Tsuiki, Dimensional Properties of Domains, August- September 2004, Workshop Domains VII, TU Darmstadt, Germany.

目 次

1 研究の背景と目的 **7**

2 研究の経緯と目標の達成度 **9**

3 研究途上において得られた重要な新知見 **11**

3.1 実効的一様位相化と極限再帰性 11
3.2 実効的 Fine 収束関数列 12
3.3 極限計算可能数学と, その体系 12
3.4 関数解析における計算可能性 13
3.5 実数の構造 13
3.6 反例の構成 14
3.7 工学・経済学における現象 14
3.8 計算の実現 15
3.9 フラクタル図形 15

4 付記：会議録 **16**

5 資料 **20**

1　研究の背景と目的

まず本研究の背景を簡略に述べる.

離散構造上の計算可能性の概念は Turing, Church 等により確立され, その後,Grzegorczyk 等により, 実数 (連続体) 上の連続関数の計算可能性の概念が確立されている. しかし, 科学技術計算においては,Walsh 関数系や Heaviside 関数, あるいは tan 関数などの不連続関数の計算可能性も考察する必要がある. このため実数上の不連続関数の計算可能性の概念の確立が計算論の重要な課題となっており, Blum,Shub,Smale の, 有理関数の反復の計算複雑度理論 (BSS 理論), Pour-El,Richards による関数空間を使う理論 (Pour-El 理論), Weihrauch による型 2 Turing 機械理論, 当研究グループによる実効的一様空間理論, 極限計算理論, 実効的 Fine 距離空間理論, Σ^0_1-排中律を使う理論, など多数の理論が提唱され研究されてきた. これら諸理論の関係は一部分を除いて未解明であった.

本研究の目的は, 実数関数について, いくつかの計算可能性理論の間の相互関係を明らかにし, 離散構造上や連続関数の場合に匹敵する, ある種の不連続関数の計算可能性理論のパラダイム建設にあった. 科学技術計算において重要な不連続関数の多くは, Heaviside 関数や Walsh 関数のように, 孤立した例外点においてのみ不連続な関数である. さらにその多くは区分的連続関数である. そのような関数の計算の問題点は孤立点における関数値の計算であり, その本質は (離散構造上の) 再帰的関数にどのような原理を追加するか, という一点である. 我々はその原理として再帰的関数の極限を値とする, Gold による極限再帰的関数を提案し, これを使った極限計算可能性理論を構築した. すなわち, 関数値の計算において, 再帰的入力に対して極限再帰的な出力がある場合に, しかも有理数列の収束率に関してのみ, 極限再帰性を認める場合に, 極限計算可能と呼ぶことにした. 区分的連続性を特徴づける概念としてこの事実は分かりやすい. 実際に研究を進める過程で, 区分的連続性をもたない多くの関数についても, このように限定された極限再帰関数の使用による理論が構築できることが判明した.

他方先行する研究において, 不連続点をもつ関数の計算可能性を, その定義域 (実数) の位相を変えることによって, 新しい位相空間における連続関数の計算可能性に帰着させることを試みていた. 実際には不連続点を孤立点とする一様位相の導入である. 数学的にはこの方法が最も自然である. そのためにこの方向の研究を進め, 多くの事例を示し, ある種の自然な条件のもとでの極限計算可能性と一様位相における連続関数としての計算可能性の同値性を証明して, 後者を不連続関数の計算可能性のパラダイムとして提案したい, というのが主な目的であった.

他方極限計算可能性は計算論的な観点からは本質的な特徴づけといえる. また極限再帰性と Σ^0_1-排中律は同値であり, 後者は数学における計算可能性問題の論理的な基礎付けとして有効である. したがってこれらの方法についてもそ

の理論を展開することを考えた.

さらに関数解析的手法やアナログ計算との関係なども視野に入れていた. 今回はこれらと上記諸理論との詳細な関係までは予定しなかったが, これらによる計算可能性問題の研究も進めることにしていた. これらは上記の理論よりも強いものと思われる.

本研究の特色は以下のものである. 不連続関数の計算問題の方法論を総合的に扱う研究は他にほとんど無く, 本研究独特のものである. 一様位相化による連続関数の計算可能性と極限計算可能性という表面上異なる原理の同値性への着目は, 独創的な発想である. これらはそれぞれ個々の手法としても他ではほとんど扱われてこなかった. さらにそれらを関数空間的手法やアナログ計算による手法との関係で見る, ということもされてこなかった.

離散構造上の計算可能性理論では, 数多くの計算可能性概念の同値性証明が Church-Turing thesis の提唱と受容の重要な原動力となった. その後実数上の連続関数についての Grzegorczyk による計算可能性の定義も多くの事例によってその妥当性が立証された. 本研究の期待できる成果の第一は, このような同値性証明の区分的連続関数版であった. 実際には区分連続性をはるかに超える不連続関数にも適用できるものであることが判明した. その結果は, 不連続関数の既存の諸計算可能性理論に統一的見解を与えるという, 極めて重要な意義をもつ. さらに, より複雑な不連続関数についての Pour-El 理論 (関数空間的手法) と論理的原理の関係の比較によって, 計算に関する数学の構造と論理の関係の解明という独特の意義をもつ.

上述のように,Pour-El 理論,BSS 理論,Weihrauch による型 2 Turing 機械理論, 実効的一様空間論・極限計算理論・実効的 Fine 距離空間論等の, 多くの重要な先行研究が存在し, 国内外で当研究グループを含む多くの研究者が関連した研究を進めてきた. 当申請課題は, これらの研究の統一を目標にした, 画期的な研究である.

2　研究の経緯と目標の達成度

以上の背景, 目標, 意義をもって始めたプロジェクトであり, その主要目標はほぼ達成された. 実際には当初の予想である区分的連続関数をはるかに超えた関数族にも一様位相による手法が適用可能であることが判明した. それらの関数については無限個の縮小写像をベースにした自己相似写像による特徴づけなど予想外の知見も得られた. 計算可能性についての論理的階層も明らかになった. 多くの具体例について (なんらかの理論による) 計算可能性が示され, 不連続関数についての計算可能性理論の有用性が保証された.

将来へ続く新しい研究の端緒も得た. 無限個のベースによる自己相似写像との関連,Walsh-Fourier 解析の実効化, などは今後ただちに着手・発展させる予定である. また, アナログ計算可能性との関連はまだ準備段階であるが, 研究協力者を得て, 今後発展するものと予想される.

以下で各年度における, 研究組織構成員による研究内容の概要を述べる. なお, 研究成果は, 当研究課題による補助金のみの補助を受けたものと, 他の研究費からもあわせて補助を受けたものとがある. 海外研究協力者の成果も含めた詳細と新知見については次節で述べる.

平成１６年度　まず Fine-空間からの実数値実効的一様連続関数の " Fine-列計算可能性 " とユークリッド位相における " 極限再帰的列計算可能性 " の同値性の証明に成功した (辻井・八杉・森). 後にこの結果の, Fine-位相における実効的連続関数 (一様でない連続性) への拡張にも成功し, さらに,Fine-位相における実効的連続関数列の族が実効的極限に関して閉じていることが証明された (森・辻井・八杉). また, 海外共同研究者の Hertling の結果および Brattka のアイディアをもとにして, 関数の Fine-列計算可能性から, ある種の実効的連続性を示すことができた (八杉・辻井・森).

ドメイン理論の手法による結果としては, 任意のコンパクト距離空間が極小極限要素の集合として, 共通のω-代数的ドメインに埋め込まれることが示され (立木), またある種の距離空間とグレーコードの関係の研究も行われた (立木・山田).

逆数学の立場からは, たとえば“ weak weak Koenig ' s lemma " の一様化 ,“ Σ^0_1-separation " の一様化“ weak Koenig ' s lemma " の一様化の三者の同値性証明がなされた (山崎). これは極限再帰性理論の別な側面として重要である. 極限再帰性理論の解釈として, ゲームセマンティックスの応用が可能であることが分かった (林). これは山崎の結果とも関係が深い.

応用分野での計算可能性問題に関連しては, アナログ計算の応用において, 放電の諸現象のモデルを構築できた (鈴木他). ゲーム理論において, ゼロサムゲームにおいて追加情報が利得におよぼす影響についての考察が行われた (小田他).

平成１７年度　異なる不連続点をもつ関数列とその極限の計算可能性を扱う

ために,“ 列交差性をもつ実効的一様位相列 ” の理論を提案し, 理論の意義を基礎づける多くの関数列の例を構成した (八杉・森・辻井). 一様位相の一つである Fine 位相における連続関数について, 一様位相における列計算可能性と極限再帰関数による列計算可能性の同値性を証明した. またこの証明のために, 実数列のユークリッド位相における計算可能性と Fine 位相における“ 弱計算可能性 ” の関係の一般論を展開した (八杉・辻井・森).

Fine 位相上で展開される Walsh 解析における計算可能性問題の一環として, Fine 計算可能関数が実効的収束について閉じていることの証明, 局所一様連続でない Fine 計算可能関数の Brattka による例の一様計算可能近似列の構成, Brattka 関数の一般化, その自己相似性証明, そのハウスドルフ次元の計算, などを実行した (森・辻井・八杉).

実数・実数列に関する計算概念および実際の計算方法は現在でも重要な課題である. 実数を 0 と 1 にボトムを加えて表現する方法がある. そのような文字列の関数型言語での入出力についての考察を行った (立木他). さらに“ 効率的二分部分基 ” と孤立点をもたない距離空間の関係の研究も行われた (立木・山田).

極限再帰関数をベースにした計算可能性については, それと同値な強さの排中律と極限再帰関数を基礎にした学習理論とを関連づけた (林).

不連続関数 double rotation の simple rotation への変換アルゴリズムを提示し, パラメータ空間における自己相似的構造の存在を示した (鈴木他).

その他, 一様位相列の一般論,Moore のアナログ計算可能性と一様位相における計算可能性との関連など, 次へのステップの基礎も築いた.

平成 18 年度　前年度に着手した実効的一様位相列とその実効的極限の一般的な理論を完成させるとともに, その理論を計算可能解析学における一つの方法論として思想化した (八杉・森・辻井). また, 前年度に着手した Fine 計算可能関数列の実効的 Fine 収束に関する理論および Bratta 関数等のフラクタル性についての理論を完成させた (森・辻井・八杉). これらの結果は, 前年度までの成果に加えて, 実効的一様位相化の手法の重要性の保証となるものである. さらに Brattka 関数のような複雑な関数の近似グラフの作成により, その本質を視覚化できた.

他方の重要な手法である極限再帰関数の証明アニメーションへの応用についての議論が整理された (林).

その他,Fine 空間での解析学である Walsh-Fourier 解析の実効化,Brttka 関数がその一例である相互再帰図形や縮小写像の無限個のシステムによる再帰図形の Hausdorff 測度および Hausdorff 次元の評価についても研究が進んだ. これらは最終年度における研究であるために, 未だ出版にはいたっていない.

3　研究途上において得られた重要な新知見

3.1　実効的一様位相化と極限再帰性

当研究課題の主テーマは, ある種の不連続な実数関数の計算原理を求めることである. すなわち, 計算可能点での関数値の計算が何らかの計算原理で実行されることを明らかにすることである. そのために 1 点でなく計算可能な点列に対する関数値列の計算の原理を求める. 自然な方法として提案したのが, 関数の定義域の位相を変え, 不連続点または不連続点を端点とする区間を互いに孤立させ, 一様位相を導入すること, および再帰的入力列に対して出力列の条件をゆるめた極限再帰性の 2 理論である. 前者の方法では, ユークリッド位相では不連続な関数が一様位相では連続になり, したがって不連続関数の計算可能性問題が一様位相における連続関数の計算可能性問題に帰着される. 後者は計算可能実数列, すなわち再帰的有理数列によって再帰的収束率をもって近似される実数列, の入力に対して, 関数値列として弱い意味の計算可能列を認めるものである. すなわち, 再帰的有理数列で近似されるが, 収束率としては極限再帰関数も認める.

ここで注意すべきことは, 我々は弱い意味の計算可能列の領域で解析学を構築するのではない. 入力はあくまでも通常の計算可能列であり, それに対する関数値の計算がどのような機構であるか, を観察するのが目的なのである.

上記の 2 理論をここではそれぞれ実効的一様位相化および極限再帰性と呼ぶことにする. 後者が前者を導くことは, 仮定なしに示される. 逆は区分的に連続な関数については示される. したがって区分的連続関数については, 見かけ上全く異なる概念である両理論が同値であることが明らかになった. 区分的連続関数は不連続関数のうちでも普遍的な関数族であり, 人間が容易に計算したりグラフを描いたりするものである. この意味で実効的一様位相化および極限再帰性は, それぞれ不連続関数の計算可能性問題における一つの基本原理とみなすことができる. とくに, まず不連続点における関数値を計算して, 連続な部分には連続関数の計算可能性を適用する, という人の知的行為の表現という我々の観点からは, 実効的一様位相化における連続関数としての計算可能性こそ, 不連続関数の計算問題のパラダイムとしてふさわしいものである. その適用範囲は広く, たとえば $\mathrm{Brattka}$ 関数のように一見粉々なグラフをもつ関数が Fine 連続関数になる. 定義域の一様位相化は関数ごとに定義できるので, 多大な自由度がある.

他方極限再帰性は Σ^0_1-排中律との同値性など, 不連続関数の計算の論理的構造解明に適している.

さらに, 互いに異なる不連続点をもつ関数列について, 各関数にとって自然な実効的一様位相を与えて実効的一様位相列を構成し, その実効的極限位相において関数列の収束を論じた. 解析学においては関数列の極限が重要な意味をもつが, 実効的一様位相化はその役にも耐えられることが分かった.

この項目は主に論文 1, 7, 8, 9, 11 による.

3.2 実効的 Fine 収束関数列

不連続関数で数学的な理論を作っているものに, Walsh-Fourier 解析学の基礎である Fine 距離位相がある.jpg などへの応用もあり, 三角関数を基礎にする Fourier 解析に対して,Walsh 関数系という階段関数族を基礎にしている. これに関して,Fine 連続関数列の Fine 収束による極限について詳細な検討をし, その実効化を行った. 連続関数および関数列の収束に関しては複数の定義があるが, 実効化のために適当な定義を採用しなくてはならない. Fine 距離空間が実効的可分であることを使うのが自然であり, それによって Fine 連続関数の族が実効的 Fine 収束について閉じていることを示すことができた. 他の定義の実効化が可能であるか, などは今後の課題である.

Fine 局所一様連続でなく Fine 連続な関数の具体例は一種の自己相似写像であることを明らかにした. すなわち無限個の縮小写像による自己相似写像として定義できる. 特殊な場合には 2 個の縮小写像による相互再帰写像になる. これらは新しい概念であり, フラクタル図形が本来計算アルゴリズムによって定義されることとも関連して, 今後研究を進めるべき新しい方向を示唆している.

この項目は主に 10 による.

3.3 極限計算可能数学と, その体系

実効的一様位相化と極限再帰関数による収束率の手法のある条件下での同値性についてはすでに触れた. 他方極限再帰関数を認めたときの数学の展開, 極限再帰関数をもつ関数族による構成的数学の解釈, 構成的数学の上での極限再帰性と論理的原理, 実際には Σ^0_1- 排中律との同値性, などの成果も得られた. 実際不連続関数の関数値計算を Σ^0_1-排中律の中で展開することは, 先行する研究課題の中で実行済みである.

Σ^0_1-排中律に関する考察から, 思いがけない成果も得られた. すなわち, 構成的数学の上での諸排中律と 2 重否定の除去などの原理との関係が明らかにされた. Σ^0_1-排中律と他の準構成的な諸原理との関係を明らかにすることは, 将来解析学における計算可能性の分析をするために重要である.

極限再帰関数による数学と学習理論との関係, 極限再帰関数の証明アニメーションへの応用, なども研究が進んだ. このことから将来不連続関数の計算可能性問題を, 学習理論の枠組みで再構築したいと考えている.

数学史的に, 極限再帰性に相当する手法と再帰性に相当する手法の対比が１９世紀末の Hilbert の不変式論に現れている. その状況の解明もあわせて行った.

逆数学と極限再帰関数による数学には密接な関係がある. これに関しては, 次のような考察が行われた. 高階算術における逆数学において , いくつかの古典的結果の高階版が示された . とくに, より一般的な形のボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理とスースリン作用素の存在の同値性が示せた . また, RCA_0 に " collection " を加えても Π^1_1 文に関して証明できるものが変わらないことも示された . さらに, 完備可分距離空間より一般的な位相空間に関する逆数学を調べている . また, いくつかのランダム性の分類とその逆数学への適用の研究を始めた . 実数上の不連続な性質と関わりがあるものと予想される.

この項目は主に 2, 4, 12, 21, 25, 著書 2 によっている.

3.4 関数解析における計算可能性

関数空間論の実効化は, 不連続関数の計算可能性問題の統一的扱いとして, 非常に有効である. 不連続点における関数値の計算, という問題を除けば, 最も豊富な成果をあげるものである. 当研究課題に続くテーマの一つとして, この手法による計算可能性を元にして関数値計算の計算原理を求めることがある. すなわち関数空間のノルムの特性から問題となる収束率の特徴付けを行うことができると考えている. その意味でも関数解析的手法による計算可能性・不可能性の事実の蓄積は重要である.

これに関しては以下のような結果を得た. Banach 空間におけるコンパクト作用素, 一様有界定理, 楕円境界値問題, 等についての計算可能性証明 ; 非可分な Banach 空間における計算可能性の扱い (通常は実効的に可分な空間しか扱っていないので, 新しい分野である); 自己共役作用素のスペクトルの計算可能性 ; 関数の実効的可測性など関数解析学における重要な概念の計算可能性 ; Hahn-Banach 拡張のボレル複雑度. なお, 多少趣を異にして, 線形代数における計算可能性の研究も進んだ.

この項目は主に 3, 5, 16, 17, 18, 26, 27 による.

3.5 実数の構造

連続体上の計算可能性問題の基礎は実数の計算可能性である. 数学的にはそれは合意ができている. しかし実数の表現にまで関わる場合には, 様々な手法があり, それぞれに実数の見方, 観点がある. また, 極限再帰収束率のように, 通常の計算可能性よりも複雑な計算可能性もある. これらに関しては次のような研究が行われた.

位相空間の 0 , 1 , ボトム無限列での表現について , 計算概念 , ドメイン理論 , 位相空間の概念の 3 つの方向から考察した. 計算的には , ボトムの位置の値を飛ばしながら計算するマシン (IM2 マシン) の考えを , 関数型言語で実

現する方法についての考察である. ドメイン理論的には，表現に現れるボトムの個数とドメインの次元との関係について調べた. 位相的には，その表現に対応するサブベースを考え，その性質について調べた.

極限再帰収束率を認める出力についてはすでに述べた. Fine 位相での計算可能性問題では, 実数・実数列について, ユークリッド位相での計算可能性と Fine 位相での弱い意味での計算の関係が必要となった. Fine 位相での計算可能性はユークリッド位相での計算可能性よりも厳密に強い条件である. これに関して弱い意味の Fine 計算可能性と, 従来から研究されていた右計算可能性とが同値であることが分かった. それらはユークリッド計算可能性よりも厳密に弱い条件である.

この項目は主に 11, 13, 14, 22, 23 による.

3.6 反例の構成

解析学の実効化において, 実効化可能性の証明は当然大切である. 解析学の多くの主要概念, 主要定理が実効化されるからこそ計算可能性を考慮した解析学が意味をもつのである. しかしまた実効化不可能な事例こそは, 古典的な数学と計算概念との差異の具体的な証拠になる.

たとえば点列計算可能でありながら実効的に連続な点がない関数例, Banach-Mazur 計算可能でありながら計算可能実数上でも Markov 計算可能でない関数の例, などが構成された.

この項目は主に 6, 20 による.

3.7 工学・経済学における現象

純粋に数学の枠組みだけで計算可能性理論を展開することは可能であり, 実際多くの場合そのようにしているが, 計算可能性を問題にすること自体, 実際に計算を実行する世界との関連なくしては価値が半減する. その意味で, 数学からは多少離れた分野での関連研究は重要であり, それらとの相互連絡に勤めている. 今期はたとえば次のような知見を得た.

１次元の区分等長な不連続写像である, 二重回転写像という写像族が提案された. 二重回転写像のダイナミクスは, 適切な区間上で誘導変換を考えることにより, 他の二重回転写像もしくは回転写像のダイナミクスに帰着できることを示した. この性質は多次元の Euclid アルゴリズム的なアルゴリズムにより記述され, 二重回転写像のパラメータ空間内に自己相似的な構造を生み出している. このような非線形力学系は計算モデルとして重要であり, 後述のフラクタル図形の項目とも密接に関連している.

二重回転写像は単なる数学の概念ではない. 部分放電の最も単純な決定論的モデルであるコンデンサーモデルは, その単純なみかけに反して複雑にふ

るまう. このモデルが二重回転写像に帰着され，この写像の持つ自己相似的な構造が，モデルの複雑なふるまいを生み出していることが示された. この結果は, 現実の部分放電の複雑なふるまいに対して一つの説明を与えるものである.

経済学関連では, 技術と消費需要が不比例的に変化し続ける多部門成長経済の一般的描写を得た. これは一般的に逆問題といわれるものの一種で, 一般化逆行列を使って記述する. 逆問題で計算可能性が保存されるか, は, 個々のケースについて調べるしかなく, 上記研究は問題定義として重要である.

この項目は 15, 24 および続行中の研究による.

3.8 計算の実現

当研究課題は理論展開を目標としているが, 計算可能性を問題にする以上, 具体的な関数などでは効率の良い計算・描画が望まれる. 実際の計算・描画によって理論の内容の検証や推測が可能になる. たとえば Brattka 関数のように粉々で近似関数列が定義域の場所によっては容易には本来の関数値に収束しない例がある. このような関数の近似描画を, 2 進有理点では逐次値が正確に決定されるという関数の特性を利用して実行した. その結果グラフのフラクタル性が明らかになった.

また, 自明な Jones 多項式を持つ非自明な結び目を，コンピュータを用いて発見する，という試みのために, ハードとプログラムの編成を工夫した.

この項目は未出版の原稿によるものであり, 研究続行中である.

3.9 フラクタル図形

Fine 局所一様連続でなく Fine 連続な関数の構成法は一種の自己相似写像であることを明らかにした. 古典的な定義がそのまま計算可能なものになっている. このような現象は, 複雑な関数の例の構成の本質であると考えられる.Fine 連続関数の場合には, 2 個の縮小写像による相互再帰定義になっている. また, 無限個の縮小写像を基にしたフラクタル図形も定義され, 現在その次元などの調査中である. これらは通常の数学としても新しい分野である.

立体フラクタル図形については，シェルピンスキー四面体を拡張し，フラクタル次元が 2 で位相次元が 1 であるものについて調べた. また,Mandelbrot 集合の計算可能性問題についても研究が進んだ.

この項目は 10, 19 によるとともに, 現在研究続行中である.

4　付記：会議録

研究組織の構成員は定期的に小規模な勉強会を開き, e-mail で連絡し, セミナーに出席し, たえず研究連絡を行った. 海外研究協力者は年一回セミナー講演および研究連絡によって, 貴重な知見を提供された. 多くの研究協力者からもセミナー講演などによって貴重な知見の提供を受けた. とくに吉川敦氏と鴨浩靖氏は研究分担者と同様に研究に参加された. 中戸川孝治氏からは数学史・数理哲学の観点から種々の教示を受けた. また, セミナーにおいては様々な分野の研究者に依頼して, 研究の中心課題からは多少距離のある話題も提供していただいた. 研究の幅広い発展にはこのような知的刺激が不可欠だからである. 事実, そのような話題において活発な質疑応答があり, 相互の研究に有効であった.

ここに当該研究費による研究会 (CC-Seminar) の記録を記す.

研究会はセミナー講演と, 討論などによる研究連絡から成り立っている. ここでは講演記録のみ記す. なお, 当課題によるセミナーは " CC-セミナー " (Computability on the Continuum) と名づけている. セミナーは, 研究組織構成員および研究協力者間の研究連絡のためではあるが, すべて公開であり, 関連メーリングリスト等に案内を送っている. 広く関連分野の研究者からの知見を求めるとともに, 当研究課題による研究成果を周知させるためである.

平成１６年度

- ２００４年１２月１１日・１２日　キャンパスプラザ京都

Takakazu Mori: Effective convergence of Fine computable functions

V. Brattka: The Hahn-Banach Theorem and its Impact on Computable Analysis

S. Hayashi: LCM and games

P. Hertling: Topological Complexity of Zero Finding for Continuous Functions

M. Yasugi: Effective sequence of uniformities

P.Hertling: Is the Mandelbrot set computable?

T. Yamazaki: Some results on higher order reverse mathematics

A. Yoshikawa: Questions and problems from a naive observer of the field

H.Kamo: Computability of Urysohn's Universal Metric Space

- ２００５年２月２１日　京都産業大学第３研究室棟会議室

鴨浩靖: Urysohn による万有距離空間の構成方法の実効化理論

河村彰星: アナログ計算の理論の変遷

- ２００５年３月１１日　京都産業大学第３研究室棟会議室

西澤清子: カオス理論における最近の展開, とくにカオスの定義から導かれる重要な帰結

森隆一: 無限個の縮小写像をベースにした自己相似集合の構成

- ２００５年３月１６日　京都産業大学第３研究室棟会議室

山田修司: Nabutovski and Weinberger papaer の解説

平成１７年度

- ２００５年７月２９日　京都産業大学第３研究室棟会議室

吉川敦:Pour-El &Richards 流，または Weihrauch 流の計算可能性と Riesz の表現定理

- ２００５年８ 月２５− ２９日　京都大学大学院人間・環境学研究科

（国際会議 CCA2005 およびそのサテライトセミナーと共催）

•• ８月 25- 26 日　サテライトセミナー (CC-セミナー)

Peter Hertling: Computable analysis via representations

Takashi Kohno: Design of neuromorphic hardwares

Mariko Yasugi, Atsushi Yoshikawa: Computable versions of basic theorems in functional analysis

Norbert Müller: Implementing exact real numbers efficiently

Andrej Bauer: Realizability as connection between constructive and computable mathematics

Martin Escardó: Compactness in topology and computation

•• ８月２７− ２９日　CCA2005　（研究組織構成員の講演）

Vasco Brattka（招待講演）: Some aspects of computable functional analysis

Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii, Mariko Yasugi: Fine computable functions and effective Fine convergence

Mariko Yasugi, Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii: Effective sequence of uniformities and its effective limit

Peter Hertling: A sequentially computable function that is not effectively continuous at any point

- ２００６年１月２０日　京都産業大学第３研究室棟会議室

吉川敦：Riesz-Frechet および Lax-Milgram の定理の計算可能性解析学版とその応用

- ２００６年２月２４日　京都産業大学第３研究室棟会議室

飯塚新司：Effective continuities on effective topological spaces

平成１８年度

- ２００６年８月２４日　京都産業大学第３研究室棟会議室

米田薫 :（Walsh 解析の紹介）

- 　２００６年１０月７日（土）　京都産業大学第３研究室棟会議室

Martin A. Ziegler：Real Hypercomputation and Continuity

- ２００６年１１月６日　京都産業大学第３研究室棟会議室

Wilfried Sieg : Automated search for normal proofs

- ２００６年１１月１１日 (土) − １２日　京都大学文学研究科

(Hilbert 研究とのジョイントセミナー　)

(当研究組織構成員および当科研費の招聘研究者の講演)

Wilfried Sieg: Existential Axiomatics

Susumu Hayashi: Hilbert's notebooks I

Susumu Hayashi: Hilbert's basis theorem, Solvability, and LCM

Susumu Hayashi: Hilbert's notebooks II

Wilfried Sieg: Church without dogma: axioms for computability

- ２００６年１１月２４日− ２５日　京都産業大学第３研究室棟会議室

(CC and LCM 合同セミナー：当科研費および萌芽研究による)

Yoshiki Tsujii, Takakazu Mori and Mariko Yasugi: Fractals defined by infinite contractions

Hideki Tsuiki: SUDOKU coloring of 2-dimensional Fractal Solids

Yoriyuki Yamagata: A sequent calculus for Limit Computable Mathematics

Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii and Mariko Yasugi: Fine convergence and continuous Convergence

Satoshi Kobayashi: Game Semantics for Limit Computable Mathematics

Sobei H. Oda: Neuroeconomics

Vasco Brattka (with Dillhage): Computability of Compact Operators

- ２００７年2月１９− ２０日　京都産業大学第３研究室棟会議室

(CC and LCM 合同セミナー：当科研費および萌芽研究による)

Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii and Mariko Yasugi: Integral of Fine Computable functions

Yoriyuki Yamagata: Game Interpretation of Cut and Modus Ponens in Limit Computable　Mathematics

Hideki Tsuiki and Yasunao Hattori: Lawson Topology of the space of formal balls and the hyperbolic topology of a metric space

Atsushi Yoshikawa: On computability of Galerkin approximations

Mariko Yasugi, Takakazu Mroi and Yoshiki Tsujii: The effective sequence of uniformities and its limit as a methodology in computable analysis

Peter Hertling: Computability and non-computability of the topological entropy of shifts

Ayahei Haitani: What Students Learn from Market Experiments and What They Don't

追記：国際会議 CCA2005 （ The Second International Conference on Computability and Complexity in Analysis)への貢献(詳細は http://cca-net.de/cca2005/ を参照)

組織委員(当研究組織構成員は*で明示): Hiroyasu Kamo, *Takakazu Mori, Izumi Takeuti, *Hideki Tsuiki (chair), *Yoshiki Tsujii, *Mariko Yasugi

謝辞　本研究課題遂行においては、各方面の研究者の協力を得た。ご多忙のところ講演を引き受けていただき、また様々なテーマについての討論によって貴重な意見の提供を受けた。国際会議やシンポジウムなどの開催者にも、発表の機会を負っている。さらに京都産業大学の総合研究事務室の皆様からは、科研費申請時からいろいろな形で支援を受け、複雑な書類作成その他の事務手続きを処理していただいた。我々が無事研究活動を終えることができたのは、これら多くの方々のおかげである。ここに感謝の意を表したい。

5　資料

以下, いくつか典型的な論文および講演記録を掲載する.

1. 文献 1 Mariko Yasugi, Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii, The effective sequence of uniformities and its limit: as a methodology in computable analysis, Annals of the Japan Association of Philosophy of Science, to appear.
2. 文献 2 Hayashi, S., Can proofs be animated by games?, Fundamenta Informaticae 77 (2007), pp.1-13, in print.
3. CC-Seminar 2006 年 11 月 24-25 日講演内容　Vasco Brattka and Ruth Dillage, Computability of compact operators on computable Banach spaces with bases.
4. 文献 6 Peter Hertling, A sequentially computable function that is not effectively continuous at any point, Journal of Complexity 22(2006), 752-767.
5. CC-Seminar 2006 年 11 月 11-12 日講演内容　Susumu Hayashi, Logical analysis of Hilbert's solvability principle.
6. 文献 10 Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii and Mariko Yasugi, Fine computable functions and effective Fine convergence, CCA2005 Proceedings (Informatik Berichte 326-7/2005 CCA 2005 Second International Conference on Computability and Complexity in Analysis, FernUniversi"at in Hagen), 177-198.
7. 文献 11 Mariko Yasugi, Yoshiki Tsujii, Takakazu Mori, Sequential Computability of a Function - Effective Fine Space and Limiting Recursion -, Journal of Universal Computer Science 11-12(2005), 2179-2191.
8. 文献 14 Hideki Tsuiki, Real Number Computation with Committed Choice Logic Programming Languages Journal of Logic and Algebraic Programming, 64, pp.61-84, 2005.
9. CC-Seminar 2005 年 8 月 25-26 日講演記録 Peter Hertling, Computable Analysis via Representations, 国際会議 CCA2005 サテライトセミナー（チュートリアル）,