1　和積標準形への変形

例 1　p.100 命題 3　・1 のいくつかの論理式の和積標準形への変形

1. $A \vee (A \wedge B) \to (A \vee A) \wedge (A \vee B)$
2. $A \wedge (A \vee B)$　は和積標準形
3. $\neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B$

例 2　p.101 の例 $\neg Z \wedge (X \Rightarrow Y \vee \neg U) \to \neg Z \wedge (\neg X \vee (Y \vee \neg U))$

例 3　命題 3　・3 の証明をかねて

1. $\neg(\neg A \wedge \neg B) \to \neg\neg A \vee \neg\neg B \to A \vee B$
2. $A \Rightarrow B \ \to \ \neg A \vee B$
3. $\neg(A \wedge \neg B) \to \neg A \vee \neg\neg B \to \neg A \vee B$

例 4

カッラの発言 :「アンナが人魚ならば私は女神」であるか「ビアンカが天使ならばアンナが人魚」かどっちかよ。

「アンナが人魚」を X,「ビアンカが天使」を Y,「カッラ（私）が女神」を Z とおくと

$$(X \Rightarrow Z) \vee (Y \Rightarrow X)$$

$$X \Rightarrow Z \to \neg X \vee Z$$

$$Y \Rightarrow X \to \neg Y \vee X$$

$\vee$ の結合律よりカッラの発言の和積標準形は

$$\neg X \vee Z \vee \neg Y \vee X$$

すなわちカッラの発言 :アンナが人魚でないか、私が女神か、ビアンカが天使でないか、アンナが人魚か、どれかなのよ。

例 5

ダイアナの発言 :「アンナが赤いドレスを着てビアンカが青いドレスを着るのならば、カッラは黄色いドレスを着ないんだって」

エリザベスの発言 :「それだったら、もしアンナが赤いドレスを着なくてカッラが黄色いドレスを着たら、ビアンカは青いドレスを着るのね」

ダイアナ再び :「私そんなこと言ってない !」

「アンナが赤いドレスを着る」、「ビアンカが青いドレスを着る」、「カッラが黄色いドレスを着る」をそれぞれ P, Q, R とおく。

ダイアナ :$P \wedge Q \Rightarrow \neg R$

エリザベス（「それだったら」の部分は抜かす）$\neg P \wedge R \Rightarrow Q$

これらはそれぞれ

$$\neg(P \wedge Q) \vee \neg R \to (\neg P \vee \neg Q) \vee \neg R$$

$$\neg(\neg P \wedge R) \vee Q \rightarrow (\neg\neg P \vee \neg R) \vee Q \rightarrow (P \vee \neg R) \vee Q$$

ダイアナ ：「アンナが赤いドレスを着ないか、ビアンカが青いドレスを着ないか、カッラが黄色いドレスを着ないか、どれかは起こる」

エリザベス ：「それだったら、アンナが赤いドレスを着るかビアンカが青いドレスを着るか、カッラが黄色いドレスを着ないか、どれかは起こる」

ここでエリザベスの 「それだったら」は、ダイアナの発言を受けて、 「それが正しいならば」ということである。ダイアナが 「そんなこと言ってない」というのは、自分の発言が正しいからといってエリザベスの結論が正しいとは限らない、という意味である。

さて、二人のうちどちらが正しいでしょうか ？

例 6

ダイアナ ：「月が泣くと星が降るんだって」

エリザベス ：「それだったら、月が泣いて星が降らない、ってことはないわね」

ダイアナ ：$T \Rightarrow H$ これを D とおく。

エリザベス ：$D \Rightarrow \neg(T \wedge \neg H)$

$$\neg T \vee H$$

$$\neg(\neg T \vee H) \vee (\neg T \vee \neg\neg H)$$

$$(\neg\neg T \wedge \neg H) \vee (\neg T \vee H)$$

$$(T \wedge \neg H) \vee (\neg T \vee H)$$

$$(T \vee \neg T \vee H) \wedge (\neg H \vee \neg T \vee H)$$

エリザベス ：「月が泣くか月が泣かないか星が降るのね。そして、星が降らないか月が泣かなかないか星が降るんだわ」

これって、理解できます ?!

2 和積標準形による恒真性の判定

1 節の例で恒真かどうかの判定、恒真でないときには反例 (その論理式を偽にするような真理値の組) を与える。ひとつの基本和 S にある命題変数 (たとえば P) について $P, \neg P$ の両方が現れるときに、P と $\neg P$ の組を (ここでのみ) 双対ということにする。また、このとき S は排中律をもつ、という。

例 1 ：

1. 基本和は $A \vee A, A \vee B$ で、どちらにも双対がない。したがって恒真でない。反例はたとえば $v(A) = F, v(B) = F$。

2. 恒真でない。反例 $:v(A) = F, v(B) = F$
3. 恒真でない。反例 $:v(A) = T, v(B) = T$

例 2 :恒真でない。反例 $:v(U) = T, v(x) = T, v(Y) = F, v(A) = T$

例 3 :

1. 恒真でない。反例 $:v(A) = v(B) = F$
2. 反例 $:v(A) = T, v(B) = F$
3. 同上

例 4 : $\neg X, X$ が双対であるから、恒真

例 5 :ダイアナの発言が真になるのは $v(P) = F, v(Q) = F, v(R) = F$ のどれか一つは成り立つ。

エリザベスの発言が真になるのは $v(P) = T, v(Q) = T, v(R) = F$ のどれか一つは成り立つ。

$v(P) = F, v(Q) = F, v(R) = F$ のときダイアナの発言は真である。このときエリザベスの発言は偽になる。したがって 「ダイアナのいうことが正しければ、エリザベスの結論が成り立つ」は恒真ではない。 「そんなこと言ってない」というダイアナの発言が正しい。

注 :「ダイアナの発言 $\Rightarrow$ エリザベスの結論」という論理式の和積標準形を作って恒真性を判定することもできる。ちょっと長い論理式になるので、省略した。各自試みてください。

例 6 :第一基本和は双対 $T, \neg T$ をもち、第二基本和は双対 $\neg H, H$ をもつ。したがって恒真。つまり 「ダイアナの発言が正しいのならば、エリザベスの結論は正しい」。