集合と論理：証明

八杉満利子

目 次

1　命題論理・命題３・１（p.100）

いくつかの等式の証明。真理値が T になるのが等式の左右で同値であることを示せばよい。

1. 交換律　$v(A \vee B) = v(B \vee A)$

   $$v(A \vee B) = T \leftrightarrow v(A) = T \text{ または } v(B) = T \leftrightarrow v(B) = T \text{ または } v(A) = T$$

   日本語の「または」が順序交換であることを使っている。
2. 分配律　$v(A \wedge (B \vee C)) = v((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

   $$v(A \wedge (B \vee C)) = T \leftrightarrow v(A) = T \text{ かつ } v(B \vee C) = T$$

   $$v(B \vee C) = T \leftrightarrow v(V) = T \text{ または } v(C) = T$$

   したがって左辺が T であることは

   $$v(A) = T \text{ かつ } v(B) = T \text{ または } v(A) = T \text{ かつ } v(C) = T$$

   これは右辺が T であることと同値である。
3. 排中律

   $$v(A \vee \neg A) = T \leftrightarrow v(A) = T \text{ または } v(\neg A) = T$$

   $$\leftrightarrow v(A) = T \text{ または「} v(A) = T \text{ でない」}$$

   $v(A) = T$ であるかないかどちらかであるから、これはつねになりたつ。

4. 条件文

$$v(A \Rightarrow B) = T \leftrightarrow v(A) = F \text{ または } v(B) = T$$

$v(A) = F$ のとき、$v(A \wedge B) = F$ なので、$v(A) = v(A \wedge B)$
$v(B) = T$ のとき、$v(A \wedge B) = v(A)$ はあきらか。

2　命題３・３ (p.103)

命題３・３のいくつかの等式を示す。左右が T になるのが同値であればよい。

$$v(A \vee B) = v(\neg(\neg A \wedge \neg B))$$

$v(A \vee B) = T \leftrightarrow v(A) = T, v(V) = T$ の少なくとも一方が成り立つ
$v(\neg(\neg A \wedge \neg B)) = T \leftrightarrow v(\neg A \wedge \neg B) = F$
$\leftrightarrow v(\neg A) = T$ かつ $v(\neg B) = T$ ではない
$\leftrightarrow v(\neg A) = F, v(\neg B) = F$ の少なくとも一方がなりたつ
$\leftrightarrow v(A) = T, v(B) = T$ の少なくとも一方がなりたつ
以上より右辺が T であることと左辺が T であることは同値である。

$$v(A \Rightarrow B) = v(\neg A \vee B)$$

$v(A \Rightarrow B) = T \leftrightarrow v(A) = T$ のとき $v(B) = T$ （$v(A) = F$ のとき $v(B)$ は T でも F でもよい）
$v(\neg A \vee B) = T \leftrightarrow v(\neg A)T, v(B) = T$ のすくなくとも一方がなりたつ
$\leftrightarrow v(A) = F, v(B) = T$ の少なくとも一方がなりたつ
$\leftrightarrow v(A) = T$ のとき $v(B) = T$（$v(A) = F$ のとき $v(B)$ はどちらでもよい）
以上より右辺が T であることと左辺が T であることは同値。

$$v(\neg\neg A) = v(A)$$

$v(\neg\neg A) = T \leftrightarrow v(\neg A) = F \leftrightarrow v(A) = T$

命題３・３を使った会話
○
「私のこと好き？」
「好きでないこともないんだけど」
「それって、好きっていうこと？」
「 **･･･** 」
これは微妙ですね。「好きでなくない」は論理的には「好き」なのですが、実際には微妙なニュアンスで否定しているのかも！論理のおけいこのときに

うっかり「好きでなくもない」などといったら「好き」になってしまうから気をつけて。

◯

「明日晴れないか、またはピクニックに行くの」

「それって雨が降るっていうこと？ピクニックには行くの、行かないの？」

「だから、もし明日晴れたらピクニックに行く、ってことよ。晴れるか雨が降るか、そんなこと知らないわよ」

◯

「アンナがピンクのドレスを買わないか、ビアンカがブルーのドレスを買わないか、どちらかということはないの」

「誰が何を買うの、それとも買わないの？」

「アンナがピンクのドレスを買って、ビアンカがブルーのドレスを買う、ってことよ」

「高くつくわ」

3　意味論 (p.106)

恒真な論理式の例

$$X \vee X; X \Rightarrow X; A \Rightarrow X \vee X; X \wedge X \Rightarrow A$$

ここで X, A は任意の論理式

一般につねに $v(A) = v(B)$ であるとき $A \Rightarrow B$ は恒真。したがって 100 ページの等式の左右のどちらかを $\Rightarrow$ の左に、他方を右に書けば恒真。たとえば

$$A \vee B \Rightarrow B \vee A; (A \vee B) \wedge (A \vee C) \Rightarrow A \vee (B \wedge B)$$

$$A \vee (A \wedge B) \Rightarrow A; A \Rightarrow A \vee (A \wedge B)$$

恒真でなくて、充足可能な例

X が任意の命題変数であるとき、

$X; X \vee X : v(X) = T$ とすれば真、$v(X) = F$ とすれば偽になる。

$\neg X : v(X) = T$ とすれば偽、$v(X) = F$ とすれば真になる。

$X \vee Y \Rightarrow \neg X : v(X) = F$ にすれば全体は真。$v(X) = T, v(Y) = T$ とすれば全体は偽。

矛盾である例（恒真に $\neg$ をつければ必ず矛盾）

$X \wedge \neg X; \neg(X \vee \neg X); \neg(A \vee (A \wedge B) \Rightarrow A)$