1. 次の写像 f のうち、線形写像であるものの番号を挙げよ。

$$\text{(a)}\quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x^2 + y^2$$

$$\text{(c)}\quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x + y \qquad \text{(d)}\quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x + y + 1$$

答え　(a), (c)

2. 次の行列を B とする. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

B で定義される 2 次元空間における線形写像 $f(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ 、標準基底 $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e_2}\}$、基底 $\mathbf{u} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ が与えられているとき、次の問いに答えよ。

(a) $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)$ を求めよ。

(b) 行列 $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 C^{-1} を求めよ。

(c) 基底 $\mathbf{e}$ と $\mathbf{u}$ に関する f の表現行列 A を求めよ。

答え (a)　$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $(f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)) = B = CA$　ゆえに

$$A = C^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 1 \\ \frac{-1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

3. 次の連立１次方程式 Eq を考える。

$$x + y - z = 5$$

$$y + z = 2$$

$$x + 2y = 7$$

(a) Eq の拡大係数行列 D を求めよ。
(b) D の階段行列 K を求めよ。
(c) K の階数を求めよ。
(d) Eq の解を求めよ。

答え (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) 2

(d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. A は行列 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。
(a) A の固有方程式を求めよ。
(b) A の固有値を求めよ。
(c) A の固有値の一つ（どちらでもよい）に対する固有ベクトルを求めよ。

答え (a) $(1-\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

(b) $\lambda_1 = 1 + 2i, \quad \lambda_2 = 1 - 2i$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

λ_1 について

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

または $= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$