代数学・幾何学B 2003 レポート１・４章

担当：八杉；　配点：１０点

問題１ $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を $\mathbf{R}^2$ の二つのベクトル、f は

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

となる２次元の写像であるとする。（以下で、計算は Mathematica 等を援用してよい。）

(1)　$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ が $\mathbf{R}^2$ の基底であること（互いに１次独立であること）を示せ。

(2)　これらのベクトルは互いに直交しないことを示せ。

(3)　$f(\mathbf{x})$ が線形写像（変換）であることを示せ。

(4)　f の基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ に関する表現行列 B を求めよ。

(5)　配布したプリントを参考に、平面に好きな図を描き（プリントと同じでもよい）、その図の f による像を描画せよ（Mathematica を使用）。

解答　(1)　２次元における二つのベクトルが基底とは、(a) それらの１次結合で２次元空間のベクトルをすべて表現できることである。これと同値な条件として、(b) 互いに独立であることあるいは (c) 外積（の面積）が 0 でないこと、などがある。どの性質でもよい。(a): 任意のベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ について

$$\mathbf{a} = k\mathbf{u}_1 + l\mathbf{u}_2$$

とおいて、k, l について解けることを示せばよい。答えは $k = \frac{b+a}{3}$, $l = \frac{a-2b}{3}$。

(b)　$k\mathbf{u}_1 + l\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ ならば、$k, l = 0$ となることを示す。

(c)　$2 \times (-1) - 1 \times 1 = -3 \neq 0$

(2)　内積が 0 でないことを示す。$2 \times 1 + 1 \times (-1) = 1 \neq 0$

(3)　$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$; $f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$ を示す。または、$f(k\mathbf{x}+l\mathbf{y}) = kf(\mathbf{x}) + lf(\mathbf{y})$　を示す。（線形性から派生するいくつかの性質もあるが、それでは不十分。定義にしたがって計算すれば問題なくできる。）たとえば

$$v(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1+2x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_2 \\ y_1+2y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_1+2x_2+y_1+2y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ (x_1+y_1)+2(x_2+y_2) \end{pmatrix}$$

(4) これは p.74 の定理 4.2 の応用で、あとは計算のみです。しかし $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ において、定義域の $\mathbf{R}^2$ の基底と値域の $\mathbf{R}^2$ の基底に何をとるか、ということですが、私の意図は定義域のほうは $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ で、値域のほうは $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ でした。しかし問題からははっきりそれが読み取れなくて、迷ったり悩んだりした人もいたと思います。すみませんでした。評価は、上の組み合わせ以外に、定義域と値域を逆にしたもの、両方とも $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ にしたもの、どれでも正解にしています。（$\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ が全く使われないものは題意に反します。）

上の順に解答だけ書いておきます。

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{-2}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) 略

問題 2 3 次元直交行列の例を一つ作り、実際に直交行列であること（すなわち、$A^{-1}={}^tA$ となること）を示せ。（計算は計算機援用でよい。）

解答 答えは無数に可能です。3 次元の標準基底 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ を互いの角度を保存し（長さを変えないで）変換、つまり原点のまわりに回転させることに相当します。簡単なのは、基底の一つはそのままにして、後の二つを回転させる方法です。これは計算を楽にしてくれます。でも全体を回転させて成功した人もいました。乾杯！

ここには簡単な例を挙げておきます。$\mathbf{e}_3$ を固定して、$x-y$ 平面を θ 度だけ回転させる：

$\mathbf{e}_1$ を $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ へ、 $\mathbf{e}_2$ を $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ へ

したがって $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tA=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

${}^tA\cdot A=E$ はコンピュータ援用でも手計算でもよい。$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ を使う。