代数学・幾何学Ｂ　5章 連立1次方程式—その1

八杉　満利子*
京都産業大学・理学部

目 次

1　連立1次方程式と掃きだし法 **1**

2　行列の階数：5.2 節,pp87-90 **2**

1　連立1次方程式と掃きだし法

5.1 節　p.83　3元連立1次方程式

掃きだし法で連立1次方程式を解く：pp 29-30 のおさらい

正方行列 A について A^{-1} が存在するとする。すなわち $AX = E$ となる X が存在する。(この X を A^{-1} と呼ぶ) この等式について、左辺の行列の積を計算し、左右の行列の各要素を等しいとおけば、X の各要素 (変数とみなす) についての方程式ができる。各列についてまとめると3つの変数の連立1次方程式が3個できる。それらについて解けば、X が求まる。すなわち A^{-1} を求めるということは、連立1次方程式を解くことになる。

連立1次方程式の解き方 (I),(II),(III) in p.30

これらは行列の行に対しての基本操作 (I),(II),(III) に対応する。(p.32) 行基本操作によって正方行列の逆行列 (が存在する場合) を求めることができる。

基本操作 (I),(II),(III) は正方行列でなくても可能である。それによって未知数の個数と方程式の個数が同じでない場合の連立1次方程式の解法を与えることができる。

一般に n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する m 個の式からなる連立1次方程式 (Eq) について、

(a)　(Eq) を解くことができるか (変数の値を求めることができるか)?

(b)　解けるとしたら、解は何通りあるか ?(一組とは限らない)

---

*２００３年後期

を調べたい。

その手法として、行列の‘ 階数 ” を導入する。(独立方程式の個数を表す)

例： 変数 x_1, x_2, x_3 （ $n = 3$ ）、 2 個の方程式 $(m = 2)$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$

解 $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -1$ も $x_1 = x_3 = 2, x_2 = 0$ も解。

例： 解のない例

$$x + y = 2; x + 2y = 4; 2x + y = 4$$

定義 1.1 （ 係数行列と階数 ） 1) 連立 1 次方程式を $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ で表すとき A をその連立方程式の係数行列とよぶ。(変数の係数を要素とするから)

2) 行列 A の行 (列) ベクトルのうち 1 次独立なものの最大個数を A の階数とよび、$rankA$ で表す。

ただし、$A = \mathbf{O}$ (零行列) のとき、$rankA = 0$ と定義する。

以上の定義および例が pp.83-86 にあるので、読んでおくこと。

2 行列の階数：5.2 節,pp87-90

$n = 3, m = 2$ で説明

連立 1 次方程式

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

の係数行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$n = 4, m = 3$ の場合の行列の階数

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

1 行目と 2 行目は独立、 3 行目は 1 行目の 2 倍なので独立でない。ゆえに $rankA = 2$。

定理 1 （ 正則変換と階数：定理 5.1,p.87 ） A が $m \times n$ 行列、P が $m \times m$ の正則行列であるとき、次のことが成り立つ。

(1) A の 1 次独立な行ベクトルの個数と PA の 1 次独立な行ベクトルの個数は等しい。(正則変換によって階数は不変である。)

(2) (1) は列ベクトルについても成り立つ。

証明は略 (pp87-88 にある)。

系 1 行基本操作によって行列の階数は不変である。

証明 : 行基本操作は正則な行列による変換で行われる (pp.35-36)。定理 5.1 により正則な行列による変換で階数は不変。

pp.35-36 について教室で簡単なおさらいをする。

例 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (P が正則であることを確かめよ。)

$rankA = 1 \quad PA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad rankPA = 1$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ (rankB = 2) \quad PB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \ (rankPB = 2)$

行列 A に基本操作を繰り返し行って、「階段行列」(A' とする) にできる。このとき A と A' について独立な行ベクトルの個数は同じである。

定義 2.1 (階段行列:pp.88-89) 1 . $m \times n$ が階段行列である、とは、次の条件を満たすことをいう。(p.88 の行列を参照)

(1) ある $k, 1 \leq k \leq m$ について 1 行目から k 行目までのベクトルは $\mathbf{0}$ でない。また、$k+1$ 行目から m 行目までのベクトルはすべて $\mathbf{0}$ である。

(2) $i = 1, 2, \cdots, k$ について、i 行の 0 でない (左から見て) 最初の成分は 1 である。これがその行の q_i 番目とすると、$q_1 < q_2 < \cdots < q_k$ である。

(3) q_i 列は m 次元基本ベクトル $\mathbf{e}_i$ になっている。

2 . 階段行列に変形することを「簡約化」という。

上の定義をベクトルで表すと次のようになる。

(1): $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \cdot \\ \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_{k+1} \\ \cdot \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$ のときに、

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_k \neq \mathbf{0}$$

であり、

$$\mathbf{a}_{k+1} = \cdots = \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

である。

(2) $\mathbf{a}_i = a_{i1} a_{i2} \cdots \ a_{in}$ とすると、$a_{i1} = a_{i2} = \cdots a_{iq_i - 1} = 0; a_{iq_i} = 1$

$$(3)\quad \begin{pmatrix} a_{1q_i} \\ a_{2q_i} \\ \cdot \\ a_{(i-1)q_i} \\ a_{iq_i} \\ a_{(i+1)q_i} \\ \cdot \\ a_{mq_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_i$$

階段行列の求め方　与えられた行列の行に、行基本操作を繰り返し行う。

(I)　定数倍：$\mathbf{a}_i$ を $c\mathbf{a}_i$ で置き換える。(c は定数)

(i 行目のある要素 $b \neq 0$ を 1 にしたいときに $c = \frac{1}{b}$ として掛ける。)

(II)　$\mathbf{a}_j$ を $\mathbf{a}_j + (-c)\mathbf{a}_i$ で置き換える。

(j 行目のある要素を 0 にする。)

(III)　行の置き換え。

(ゼロベクトルになった行を下の移動する。また、(2), (3) になるように行を入れ替える。)

定理 2　(行列の階数) 行列 A の階段行列を A' とすると

$$rankA = rankA' = k$$

なぜならば、行基本操作によって 1 次独立性は不変だからである。(3.4 節の定理 3.6,3.7,3.8 が実質その証明になっている。)

定理 3　(階数の行と列の対称性:定理 5.2, p.89) $rankA = rank^t A$

(すなわち、A の独立な行ベクトルの個数と独立な列ベクトルの個数は同じ。これは階段行列で「1 があってそこまでは 0」というのは行も列も同じであることで示される。)

ゆえに $rankA \leq \min(m, n) = m, n$ のうちの小さいほう

例：p.98, $5.1(1)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$　ゆえに $rankA = 3$

演習問題：A の各行が互いに独立であること、また、列は 3 個が互いに独立で 1 個は他の列で表現できることを確かめよ。

定理 4　(正則性と $rank$：定理 5.3,p.90) n 次正方行列 A に対して、A が正則であることと、$rankA = n$ であることは同値である。

正則ということはすべての行 (列) が互いに独立、ということである。したがって階段行列は単位行列になる。逆も成り立つ。したがって定理の同値性がいえる。

問題 5.1(1), p.90 を教室で。他は自分で。