代数学・幾何学Ｂ ４章 線形写像ーその３

八杉　満利子*
京都産業大学・理学部

目 次

1　直交変換

4.5 直交変換（pp.78-81）

p.78

剛体運動：空間において物体の形を変えないで動かすこと

平行移動、回転、裏返し、の組み合わせ

平行移動：座標軸に対して角度は不変（図 p.78)。あるベクトル $\mathbf{b}$ について

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

（任意のベクトル $\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} + \mathbf{b}$ に写す。）

回転：原点と剛体の各点を結ぶ直線がすべて同じ角度 θ だけ変化（例題 4.6,pp.67-69）

$$\mathbf{x} \mapsto P_1\mathbf{x}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

裏返し：原点を通る直線 $l = \{t\mathbf{a}\}$ に対して鏡像になる（例題 4.7,pp.70-71)。ただし、

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とする。

$$\mathbf{x} \mapsto P_2\mathbf{x}$$

$$P_2 = E - \frac{2}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

*２００３年後期

定義 1.1 （直交行列）行列 A の各列（行）ベクトルの長さが 1 で、異なる二つの列（行）ベクトルが直交する（内積が 0）とき、A は直交行列という。（すなわち、これらの列ベクトルは正規直交基底である。）

単位行列は直交行列である。

問題 4.5 上記の二つの行列 P_1, P_2 は、直交行列であることを示せ。

証明：$P_1 : \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

$$(\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix})$$

$$= \cos\theta \times (-\sin\theta) + \sin\theta\cos\theta = 0$$

（行ベクトルについて確かめよ）P_2 : 黒板で途中まで；残りは自分で。

定義 1.2 1) $A = (a_{ij}) : n \times n$ のとき、${}^tA = (b_{ij}) = (a_{ji})$ を A の転置行列という。（p.25）

2) （直交行列の別定義）$A : n \times n$ が直交行列とは、

$${}^tAA = A{}^tA = E$$

のことをいう。すなわち、$A^{-1} =^t A$ である。

例 P_1 はこの意味で直交行列：

$${}^tP_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$${}^tP_1P_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

演習問題 P_2 が直交行列であることを確かめよ。

命題 1.1 （直交定義の同値性） 正方行列が直交行列であることの、二つの定義は同値である。

この証明は次の定理（定理 4.5, p.79）の後で行う。

定理 1 （定義 1.2 による直交行列の性質:定理 4.5,p.79）直交行列 $A = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_n)$ について、次の性質 (1) と (2) が成り立つ。

(1) $|A| = \pm 1$

(2) A の列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ は $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底をなす。

証明は p.79 に詳しくある。教室で説明。

命題 1.1 の証明：$n = 2$ で説明する。$A = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2)$ （ここで $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は縦ベクトル）とおくと、${}^tA = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$ と書ける（ここで $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は横ベクトル)。行列 A が定義 1.1 の意味で（列ベクトルについて）直交とすると、

$$
{}^tAA = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E
$$

逆に行列 A が定義 1.2 の意味で直交であれば、定理 1.1(2) により、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は正規直交基底である。

例題 4.11　$\mathbf{R}^3$ における二つの正規直交基底

$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ と $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ について、$\{\mathbf{a}_i\}$ から $\{\mathbf{b}_i\}$ への（基底の）変換行列 P（p.75, 問題 4.4 によりそのような正則な行列 P が存在する）は直交行列である。

解 (pp.79-81 に一般の n 次元で詳しく示している)

$$
\mathbf{b}_i = p_{1i}\mathbf{a}_1 + p_{2i}\mathbf{a}_2 + p_{3i}\mathbf{a}_3
$$

$$
(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = (\Sigma_{k=1}^3 p_{ki}\mathbf{a}_k, \Sigma_{l=1}^3 p_{lj}\mathbf{a}_l)
$$

$$
\Sigma_{k=1}^3 \Sigma_{l=1}^3 p_{ki}p_{lj}(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_l) = \Sigma_{k=1}^3 p_{ki}p_{kj}
$$

なぜならば、$l = k$ のとき $(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_l) = 1$; $l \neq k$ のとき $(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_l) = 0$。これは $\{\mathbf{a}_k\}$ が正規直交基底だからである。

$i = j$ のときに 1、$i \neq j$ のときに 0 の値をとる実数の列を「クロネッカのデルタ」と呼び、$\delta_{ij}, i, j = 1, \cdots, m$ と表す。すなわち、$\delta_{ii} = 1$、$i \neq j$ のときに $\delta_{ij} = 0$。これを使うと、

$$
(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_l) = \delta_{kl}
$$

と表される。同じく $\{\mathbf{b}_j\}$ についても

$$
(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = \delta_{ij}
$$

である。ゆえに

$$
\Sigma_{k=1}^3 p_{ki}p_{kj} = \delta_{ij}
$$

ところで $\Sigma_{k=1}^3 p_{ki}p_{kj}$ は ${}^tPP$ の (i,j) 要素である。したがって ${}^tPP = E$ となり、P は直交行列である。

定義 1.3 （直交変換）$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ が線形写像でり、正規直交基底に対する f の表現が直交行列であるときに、f を直交変換という。

定理 2 （直交変換の不変性：p.80, 定理 4.6）f が直交変換であるという性質は、$\mathbf{R}^n$ の正規直交基底の取り方に依存しない。（基底をどのようにとっても、剛体運動であることに変わりない、ということを表す。）

証明は p.80 にあるとおり。等式の計算だけである。二つの正規直交基底について例題 4.11 により、その間の変換行列 P は直交行列である。また、定理 4.3 により異なる基底についての表現行列は一方から他方へ P を使って変換できる。直交行列の逆行列、および積も直交行列であることを使うと、一方が直交ならば他方もそうなる。（教室で計算する。）

定理 3 （内積の不変性）直交変換 f については内積は変わらない。すなわち

$$(f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

（剛体運動では角度も長さも不変であることを表す。）

証明は pp.80-81 に。簡単。

例題 4.12 f が線形変換のとき、次の (1) と (2) は同値である。

(1) $(f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$

(2) $\|f(\mathbf{a})\| = \|\mathbf{a}\|$

ベクトルのノルム（長さ）の密接な関係を思い出せば、納得するであろう。

証明は p.81 のとおり。教室で示す。ノルムが内積のルートであることと、f が線形写像であること、内積が線形作用素であることを使う。

演習問題 4 のうち、直交変換に関係するのは、4.10-4.13 である。どれも直交変換、転置行列、行列式、の定義を知っていれば等式の計算で示すことができる。教室では 4.10,4.12 を概説する。

付録 F が直交変換を表す行列であるとき、

$$(F\mathbf{a}, F\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, ({}^tF)F\mathbf{b})$$

であることを示す。簡単のために 2 次元で証明する。一般に $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1, x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1, y_2 \end{pmatrix}$、$F$ は正規直交行列、であるとき、

$$(F\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} =^t FY)$$

を示せばよい。

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

とする。

$$F\mathbf{x} = \begin{pmatrix} f_{11}x_1 + f_{12}x_2 \end{pmatrix} f_{21}x_1 + f_{22}x_2;$$

$$(F\mathbf{x}, y) = (f_{11}x_1y_1 + f_{12}x_2y_1) + (f_{21}x_1y_2 + f_{22}x_2y_2)$$

$$(f_{11}x_1y_1 + f_{21}x_1y_2) + (f_{12}x_2y_1 + f_{22}x_2y_2)$$

$$^tFy = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{11}y_1 + f_{21}y_2 \\ f_{12}y_1 + f_{22}y_2 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{x},^t Fy) = (x_1ff_{11}y_1 + x_1f_{21}y_2) + (x_2f_{12}y_1 + x_2f_{22}y_2)$$

$$(f_{11}x_1y_1 + f_{21}x_1y_2) + (f_{12}x_2y_1 + f_{22}x_2y_2)$$

$$(F\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

以上により

$$(F\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x},^t F\mathbf{y}).$$