代数学・幾何学Ｂ ４章 線形写像-その２

八杉　満利子*
京都産業大学・理学部

目 次

1　基底と表現行列

p.73, 4.4 基底と表現行列

直交とは限らない座標系の話

定義 1.1 （一般的な基底）($n = 3$ で説明する） 1) $\mathbf{R}^3$ の任意の "１次独立なベクトルの組 "$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ を $\mathbf{R}^3$ の "基底 "という。このとき $\mathbf{R}^3$ は $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ で生成される（張られる）という。$\mathbf{R}^3 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ と書く。

2) もし $i \neq j$ のときには $\mathbf{v}_i$ と $\mathbf{v}_j$ が直交していれば、$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ を直交基底と呼ぶ。

3) 各 i について $\|v_i\| = 1(= \sqrt{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)})$ であるならば、正規基底という。

4) 2) と 3) が成り立つとき、正規直交基底と呼ぶ。

注：　なぜ基底というのか？任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ は、ある実数の組 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ によって

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3$$

と書けるからである。

例：$n = 2$ で、

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

が正規直交基底であることを確かめよ。（これらが１次独立で、直交していて正規であることを示す。）

---

*２００３年後期

定義 1.2 （１次結合の記法）３個のベクトルの組 $\{\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3\}$ と 3×2 行列 $A=(a_{ij})$ について、

$$(\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3)A :=$$

$$(a_{11}\mathbf{u}_1+a_{21}\mathbf{u}_2+a_{31}\mathbf{u}_3 \quad a_{12}\mathbf{u}_1+a_{22}\mathbf{u}_2+a_{32}\mathbf{u}_3)$$

（右辺は二つのベクトルの組、それを右辺のように略記する。）

定理 1 （p.74, 定理 4.2）$n=2, m=3$ で説明。$\mathbf{R}^2$ の基底 $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$、$\mathbf{R}^3$ の基底 $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ が与えられているとき、$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ が線形写像であるとする。このとき f のこれらの基底による表現行列 A は次の条件を満たす 3×2 行列である。

$$(f(\mathbf{v}_1)\ f(\mathbf{v}_2)) = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3)A$$

（上の定義を参照）ゆえに、

$$A=(\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3)^{-1}(f(\mathbf{v}_1)\ f(\mathbf{v}_2))$$

と書ける。

証明：教科書に一般の場合が示してある。ここでは $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2$ として示す。$\mathbf{x}=x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2$ と書ける。

$$f(\mathbf{x})=x_1f(\mathbf{v}_1)+x_2f(\mathbf{v}_2)$$

ゆえに、$f(\mathbf{v}_1)$ と $f(\mathbf{v}_2)$ が決まればよい。

$$f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2)\in\mathbf{R}^3=\langle\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3\rangle$$

であるから、

$$f(\mathbf{v}_i)=a_{1i}\mathbf{u}_1+a_{2i}\mathbf{u}_2+a_{3i}\mathbf{u}_3$$

と書ける。ゆえに $A=(a_{ji})_{j=1,2,3;i=1,2}$ によって

$$(f(\mathbf{v}_1)\ f(\mathbf{v}_2)) = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3)A$$

注：上の証明から A は基底によって異なることがわかる。

例：2×2 で。$\mathbf{R}^2$ の基底として、正規直交基底 $\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ をとる。$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ は、$\frac{\pi}{4}$ 回転し、$\sqrt{2}$ 伸ばす写像とする。このとき

$$f(\mathbf{e}_1)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=1\mathbf{e}_1+1\mathbf{e}_2$$

$$f(\mathbf{e}_2)=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=(-1)\mathbf{e}_1+1\mathbf{e}_2$$

ゆえに

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(f(\mathbf{e}_1)\ f(\mathbf{e}_2)) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

練習問題 4.4.1　上の例で、$\mathbf{R}^2$ の基底を

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とするときに f の表現行列を求めよ。

補助定理 1 (補題 4.1：p.74)　$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ が１次独立ならば $c \in \mathbf{R}^3$ について次の (1), (2) は同値である。

(1)　$(\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3)\mathbf{c} = 0$

(2)　$\mathbf{c} = \mathbf{0}$

証明は p.74 にある。教室では $n = 3$ の場合に説明。

補助定理 2 (補題 4.2：p.75)　$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ が１次独立で、$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ が３個のベクトルの組、また A が 3×3 正方行列、さらに

$$(\mathbf{v}_1\ v\mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3) = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3)A$$

であるときに、次の (1), (2) は同値である。

(1)　$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ が１次独立

(2)　A が正則行列　　　(4.1)

証明は一般の n 次元で p.75 に示されている。教室では $n = 3$ の場合で説明。補題 4.1（系 2）と、教科書の定理 3.14（正則性の必要十分条件）を使う。

問題 4.4(p.75)（基底の変換と正則性）$\mathbf{R}^3$ の基底 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ を基底 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ に変換する変換行列を P とする。このとき P は正則である。(P が正則とは $|P| \neq 0$ のこと。p.27）

証明は p.128 にある。基底は１次独立である、ことと、補題 4.2 を使う。

例：$n = 2$ で。$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする。

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

これを解くと、$a = 1, b = \frac{-1}{2}, c = \frac{1}{3}, d = \frac{2}{3}$、したがって

$$|P| = | \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} | = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \neq 0$$

練習問題 4.4.2 ほかに二つの基底の例を作って P が正則になることを確かめてみる。また、基底にならない例でどうなるか調べてみる。また、他に例を作ってみる。

定理 2 （定理４．３、p.75: 表現行列の間の関係式） （$n = 3$ で記す） $\mathbf{R}^n$ における二つの基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ と $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ との間の基底の変換行列 P、すなわち、

$$(\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3) = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3)P$$

となる P が存在して、正則である。（問題４．４）このとき、任意の線形変換 $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ のそれぞれの基底による表現行列をそれぞれ F, G とすると、それらの間には

$$G = P^{-1}FP$$

という関係式が成り立つ。

証明は p.74 に一般の場合にしてある。教室では $n = 2$ のときに証明する。

例題４．１０、p.76、は読んでおくこと。

注：一般の n 次元のベクトル等の表記に、たとえば $\{\mathbf{u}_i\}$ と書く。これは $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ を略して書いている。

定理 3 （定理４．４、p.77：基底の間の変換によるベクトルの変換）二つの基底 $\{\mathbf{u}_i\}, \{\mathbf{v}_i\}$ の間の変換 P：

$$(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)P$$

について、ある位置ベクトルの $\{\mathbf{u}_i\}$ による座標を $\mathbf{x}$、$\{\mathbf{v}_i\}$ による座標を $\mathbf{y}$ とするとき、$\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$。

逆に $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$ が成り立っているときに $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は上のような座標になる。

証明は p.77 にある。一通り読んでおくこと。補題 4.1 を使う。

演習問題４（pp.81-82；解答は pp.128-129）

教室でいくつか解答。なお、4.7-4.9 は、この HP に解答があります。