

p.60, 問題 3.4

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{O} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \sum_{(p_1, p_2, \dots, p_n)} \varepsilon(p_1, p_2, \dots, p_n) a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

ただし、 (p_1, p_2, \dots, p_n) は、 $(1, 2, \dots, n)$ の順列、 $\varepsilon(p_1, p_2, \dots, p_n)$ は転倒数による符号 (p.44 参照)。A の形から次のようになっている。(それぞれが正方行列なので、 n は偶数である。 $n = 2m$ とする。)

$i \geq m + 1, p_i \leq m$ ならば、 $a_{ip_i} = 0$ (すなわち \mathbf{O} の部分)。

$i \geq m + 1$ のとき $p_i \leq m$ ならば、このような (p_1, p_2, \dots, p_n) については、 $i \leq m$ ならば $p_i \geq m + 1$ である (順列だから)。したがって

$$\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & A_{22} \end{pmatrix}\right)$$

これが $\det(A_{11})\det(A_{22})$ であることは、p.45, 例題 3.4 を繰り返し使うことで、示される。詳細は省略。 $n = 4$ くらいで、実際に計算してみてください。