# 皆さんの問題

２００３年度「集合と論理」受講者作成：解答編

平成 15 年 7 月 4 日

## 1　構文の問題（括弧をはずす・つける）

1.

$$X \lor Y \lor Z \lor Y \land (X \lor \neg Z) \Rightarrow \neg(\neg X \lor \neg Y)$$

2.

$$(\neg A \lor B) \Rightarrow A) \land C$$

3.

$$X \land Y \lor Z \lor \neg X \land (Y \lor Z)$$

## 2　文章の論理化・論理パズル

4.

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg(P \land \neg Q)$$

$$(P \lor \neg P \lor \neg Q) \land (\neg Q \lor \neg P \lor Q)$$

ちなみに、これは恒真。

5.

$$A : D \land C \Rightarrow E$$

$$B \equiv A \Rightarrow (C \land \neg E \Rightarrow \neg D)$$

場合分けで確かめよう。$v(A) = T$ とする。このとき $B$ の結論 $G : C \land \neg E \Rightarrow \neg D$ が $T$ のことを示す。
Case 1. $v(E) = T$. このとき $v(\neg E) = F$. ゆえに $v(G) = T$.
Case 2. $v(E) = F$. このとき $v(A) = T$ であるためには、$v(D) = F$ または $v(C) = F$. 前者ならば、$v(\neg D) = T$. 後者ならば $v(C \land \neg E) = F$. ゆえに $v(G) = T$.
したがって、C さんの発言は正しい。

6.

$$(S \Rightarrow G) \Rightarrow (\neg G \Rightarrow \neg S)$$

中央の $\Rightarrow$ の結論は前提の対偶だから、全体は恒真。和積標準形にして確かめてみるとよい。

7.

$$(C \Rightarrow N) \Rightarrow (\neg N \Rightarrow \neg C)$$

6 と同じく、恒真。

8.

$$A : H \Rightarrow I$$

$$B : \neg H$$

$$C : A \wedge B \Rightarrow \neg I$$

(i) $\neg I \Rightarrow \neg H$

(ii)

$A$ も $B$ も正しいとする。したがって $v(B) = v(\neg H) = T$、ゆえに $v(H) = F$. このとき $v(I)$ が何であっても $v(A) = T$. とくに $v(I) = T$、すなわち $v(\neg I) = F$ のときもそう．このとき $v(C) = F$. ゆえに C さんの発言は正しいとはいえない。

9.

$$(P \Rightarrow (Q \vee S)) \Rightarrow \neg(Q \wedge S))$$

の前提を基本和にすると、$\neg P \vee Q \vee S$. 結論を基本和にすると、$\neg Q \vee \neg S$. ゆえに問題は $v(\neg P \vee Q \vee S) = T$ のとき、$v(\neg Q \vee \neg S) = T$ か？ということになる。たとえば $v(Q) = v(S) = T$ のとき、前者は $T$, 後者は $F$ となるので、恒真ではない。

## 3 恒真性と和積標準形

10. 基本和 $L_1, L_2, L_3$ をそれぞれ次のものとする。

$$L_1 : (Y \vee \neg Z \vee \neg Z); L_2 : (Y \vee \neg Y \vee X); L_3 : (\neg X \vee Y \vee Z \vee \neg X)$$

(1) $L_2$

(2) $L_1 : \quad v(Y) = F, v(Z) = T; L_3 : v(X) = T, v(Y) = v(Z) = F$

11.

$$(\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee X) \wedge (Y \vee X) \wedge (Y \vee \neg Y)$$

12.

$$G' \equiv (\neg X \vee X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee X \vee Z)$$

$$\wedge(\neg Z \vee X \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee X \vee Z)$$

13.

$$(\neg X \vee Y \vee \neg X) \wedge (\neg Y \vee Z \vee \neg X)$$

14.

$$(\neg A \vee B \vee B) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg A)$$

恒真ではない。

15.

$$(\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (b \vee a) \wedge (b \vee b)$$

16.

$$(X \vee Y \vee \neg X) \wedge (X \vee Y \vee \neg Y)$$

恒真。

17.

$$\neg a \wedge (\neg B \vee \neg C)(\neg A \vee B \vee C) \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge C$$

18.

$$(\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$$

19.

$$\neg(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$$

この恒真性は一目でわかる。あえて和積標準形にするならば

$$(\neg A \vee B \vee A) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg B)$$

20.

$$(\neg X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (Y \vee X) \wedge (Y \vee Y)$$

21.

$$(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y)$$