


# 根付き木写像と多重ゼータ値\*

田中立志† (京都産業大学)

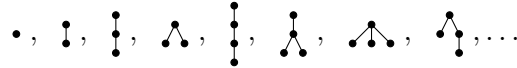
## 概要

Connes-Kreimer による rooted tree のホップ代数に基づいて、二変数非可換多項式環上の写像たちを構成する。この写像たちは多重ゼータ値の間の線形関係式を導く。

## 1 Connes-Kreimer による rooted trees のなす Hopf 代数 (復習)

閉路を持たない連結な有限 (有向) グラフを木 (tree) と呼ぶ。Tree であって、根 (root) と呼ばれる特別な頂点を持つものを根付き木 (rooted tree) と呼ぶ。すべての辺 (edge) が root から離れる向きに向き付けられている、という性質で root は特徴付けられる。平面構造を持たない根付き木 (non-planar rooted tree) とは、rooted tree であって、各頂点から出ている辺に順序関係がないものをいう。図に表すとき root を一番上を書くことにすると、たとえば、 は区別しない。

以後、(rooted) tree と言えば平面構造を持たない rooted tree とする。たとえば、



などが rooted tree である。

Tree の disjoint union を森 (forest) と呼ぶ。Forest が生成する  $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間を  $\mathcal{H}_{CK}$  とおく：

$$\mathcal{H}_{CK} := \sum_{f:\text{forest}} \mathbb{Q}f.$$

$\mathcal{H}_{CK}$  は自由な可換  $\mathbb{Q}$ -代数になる。(積は disjoint union. 積の単位元は empty forest  $\mathbb{I}$ .)

$\mathcal{T}$  を、すべての rooted trees が生成する  $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間とする。 $\mathbb{Q}$ -線形写像  $B_+ : \mathcal{H}_{CK} \rightarrow \mathcal{T}$  を、 $B_+(\mathbb{I}) := \bullet$  と、forest に対してはそれを構成している rooted trees のすべての root を別の新たな点 (これが新たな root になる) につなげるものとして定義する。たとえば、

$$B_+(\bullet \wedge \bullet) = \bullet \wedge \bullet, \quad B_+(\bullet \cdots - 2 \bullet \bullet) = \bullet \wedge \bullet - 2 \bullet \bullet$$

などとなる。この  $B_+$  を接ぎ木作用素 (grafting operator) と呼ぶ。任意の rooted tree  $t$  に対して、 $t = B_+(f)$  となる forest  $f$  がただ一つ存在することがわかる。(  $f$  は  $t$  の root を取り除いたもの.)

Grafting operator を用いて、 $\mathcal{H}_{CK}$  上に余積 (coproduct)  $\Delta : \mathcal{H}_{CK} \rightarrow \mathcal{H}_{CK} \otimes \mathcal{H}_{CK}$  を、

$$\Delta(fg) = \Delta(f)\Delta(g) \quad (f, g \in \mathcal{H}_{CK}),$$

および rooted tree  $t = B_+(f)$  に対して

$$\Delta(t) := t \otimes \mathbb{I} + (id \otimes B_+) (\Delta(f))$$

で定義する。 $\Delta$  は余可換 (cocommutative) ではないが、余結合的 (coassociative) である。

Counit や antipode も定義でき (詳細は略す)、これらによって

**定理 1** ([CK]).  $\mathcal{H}_{CK}$  は Hopf 代数になる。

\*組合せ論サマースクール 2018 予稿集用

†email: t.tanaka@cc.kyoto-su.ac.jp

## 2 Rooted tree maps

$\mathcal{H}_{\text{CK}}$  から二変数非可換多項式環  $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y \rangle$  へのある作用を構築する.  $M : \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  を, テンソルを忘れる (非可換積にする) 写像とする:  $M(v \otimes w) := vw$ . また,  $u \in \mathfrak{H}$  に対して,  $R_u : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  を,  $u$  を右からかける写像とする:  $R_u(w) := wu$ .

まず empty forest  $\mathbb{I}$  を  $\mathfrak{H}$  上の恒等写像とみなすことにする. このとき, 次を得る.

**定理/定義 2** ([T]). 任意の forest  $f (\neq \mathbb{I})$  に対し,  $\mathbb{Q}$ -線形写像  $f : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  (同じ記号  $f$  で表すことにする) を, 以下の4条件で定義することができる:

- i)  $f = \bullet$  のとき,  $f(x) = -f(y) = xy$ ,
- i')  $(B_+(f))(u) = R_y R_{x+2y} R_y^{-1} f(u)$ ,
- i'')  $f = gh$  ( $g, h \neq \mathbb{I}$ ) のとき,  $f(u) = g(h(u))$ ,
- ii)  $f(wu) = M((\Delta(f))(w \otimes u))$ .

ただし,  $u \in \{x, y\}$ ,  $w \in \mathfrak{H}$ .

筆者はこの写像  $f$  を 根付き木写像 (rooted tree map) と呼んでいる. よい性質が (証明できていないものも含めて) いくらか見つかっているが, 本稿では, 次の節に述べるもの以外は省略する.

## 3 多重ゼータ値と rooted tree maps

$n$  を正の整数とする. 多重ゼータ値 (multiple zeta values, MZV) とは, 正の整数  $k_1, k_2, \dots, k_n$  ( $k_1 > 1$ ) からなるインデックス  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  に対して, 以下の級数で定義される実数である.

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}.$$

$\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$  は  $\mathfrak{H}$  の部分環になる.  $\mathbb{Q}$ -線形写像  $Z : \mathfrak{H}^0 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $Z(1) = 1$  および

$$Z(x^{k_1-1} y x^{k_2-1} y \dots x^{k_n-1} y) = \zeta(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (k_1 > 1)$$

で定義する. MZV の間の  $\mathbb{Q}$ -線形関係式を見つけるのは,  $\ker Z$  の元を見つけることに相当する.

以下の定理にあるように, rooted tree maps は多重ゼータ値の関係式を誘導することがわかる.

**定理 3** ([T]). 任意の rooted tree map  $f (\neq \mathbb{I})$  に対し,  $f(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$ .

例. たとえば, rooted tree map  $\blacktriangle : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  による  $xy \in \mathfrak{H}^0$  の像は,

$$\blacktriangle(xy) = x^4 y + x^3 y^2 - 4x^2 y^3 - 2xyx^2 y - 3xyxy^2 - xy^2 xy + 2xy^4$$

と計算される. これを  $Z$  でうつすと 0 になるわけなので, 以下の関係式を得る.

$$\zeta(5) + \zeta(4, 1) - 4\zeta(3, 1, 1) - 2\zeta(2, 3) - 3\zeta(2, 2, 1) - \zeta(2, 1, 2) + 2\zeta(2, 1, 1, 1) = 0.$$

講演では, rooted tree maps の他の性質や, 実験により観察されていることなどをいくつか紹介したいと思っている.

## 参考文献

- [CK] A. Connes, D. Kreimer, *Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry*, Commun. Math. Phys. 199 (1998), 203-242.
- [T] T. Tanaka, *Rooted tree maps*, arXiv:1712.01029.