Duality for multiple zeta values and related topics (survey)

田中立志*

概 要

（Euler-Zagier 型の）多重ゼータ値の間に成り立つ関係式についてこれまでに知られている結果を概説し, 双対公式周辺の問題を中心にいくつか問題提起をする.

1 序

正の整数 $k_1, \ldots, k_l$ $(k_1 \geq 2)$ からなるインデックス $(k_1, \ldots, k_l)$ に対し, （Euler-Zagier 型の）**多重ゼータ値 (multiple zeta value, MZV)** とは以下の収束級数で定義される実数である：

$$\zeta(k_1, \ldots, k_l) = \sum_{m_1 > \cdots > m_l > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_l^{k_l}}.$$

条件 $k_1 \geq 2$ によりこの級数は絶対収束し, ある実数値を定める. $k_1 + \cdots + k_l (=: k)$, n, $\sharp\{i | k_i \geq 2\}$ をそれぞれ MZV の**重さ (weight)**, **深さ (depth)**, **高さ (height)** と呼ぶ. 深さが 1 の MZV は Riemann ゼータ関数の正整数点での値（**Riemann ゼータ値**）となる.

MZV $\zeta(k_1, \ldots, k_l)$ は次の Drinfel'd 反復積分表示を持つことが知られている：

$$\zeta(k_1, \ldots, k_l) = \underbrace{\int_0^1 \frac{dt}{t} \int_0^t \frac{dt}{t} \cdots \int_0^t \frac{dt}{t}}_{k_1 - 1} \int_0^t \frac{dt}{1-t} \cdots \underbrace{\int_0^t \frac{dt}{t} \cdots \int_0^t \frac{dt}{t}}_{k_l - 1} \int_0^t \frac{dt}{1-t}.$$

積分の変数変換 $(t_1, \ldots, t_k) \longrightarrow (1 - t_k, \ldots, 1 - t_1)$（$t$ の添え字は単に変数変換の際, 変数の順序を逆順にすることを示すものである）を行うことで, 多重ゼータ値の**双対公式**（定理 2）を得る.

重さ k の MZV が生成する $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間には**調和積**（あるいは**級数シャッフル積**）および**シャッフル積**（あるいは**反復積分シャッフル積**）と呼ばれる 2 通りの積構造が入る. 前者は級数表示からくる積構造であり, 和の領域の適当な分割により MZV の積は MZV の線形和として記述されるというものである. たとえば

$$\begin{aligned}\zeta(p)\zeta(q) &= \left(\sum_{m>0} \frac{1}{m^p}\right)\left(\sum_{n>0} \frac{1}{n^q}\right) \\ &= \left(\sum_{m>n>0} + \sum_{n>m>0} + \sum_{m=n>0}\right) \frac{1}{m^p n^q} = \zeta(p,q) + \zeta(q,p) + \zeta(p+q)\end{aligned}$$

*九州大学大学院数理学研究院. mailto: t.tanaka@math.kyushu-u.ac.jp

などである．後者は反復積分表示からくる積構造であり, 反復積分の積は反復積分の線形和になるという Ree [21] の一般的な定理に基づくものである．たとえば

$$
\begin{aligned}
\zeta(2)\zeta(2) &= \left(\int_0^1 \frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{1-t_2}\right)\left(\int_0^1 \frac{dt_3}{t_3}\int_0^{t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}\right) \\
&= \int_0^1 \frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{1-t_2}\int_0^{t_2}\frac{dt_3}{t_3}\int_0^{t_3}\frac{dt_4}{1-t_4} + \int_0^1 \frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_3}{t_3}\int_0^{t_3}\frac{dt_2}{1-t_2}\int_0^{t_2}\frac{dt_4}{1-t_4} \\
&\quad + \int_0^1 \frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_3}{t_3}\int_0^{t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}\int_0^{t_4}\frac{dt_2}{1-t_2} + \int_0^1 \frac{dt_3}{t_3}\int_0^{t_3}\frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{1-t_2}\int_0^{t_2}\frac{dt_4}{1-t_4} \\
&\quad + \int_0^1 \frac{dt_3}{t_3}\int_0^{t_3}\frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_4}{1-t_4}\int_0^{t_4}\frac{dt_2}{1-t_2} + \int_0^1 \frac{dt_3}{t_3}\int_0^{t_3}\frac{dt_4}{1-t_4}\int_0^{t_4}\frac{dt_1}{t_1}\int_0^{t_1}\frac{dt_2}{1-t_2} \\
&= 2\zeta(2,2) + 4\zeta(3,1)
\end{aligned}
$$

など, 微分形式の順序をそれぞれ保つシャッフル（トランプのシャッフルと同じ）全体をわたる和となり, MZV の積は再び MZV の和となる．これらの 2 通りの積で線形和に書き下したものは必ず異なったものになっている．（シャッフル積で書き下したものは深さが一定の MZV の和となるが, 調和積では深さが異なる MZV の和となる.）これらの積構造により MZV が生成する $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間は代数となる．その代数は一般に **MZV 代数 (MZV algebra)**, あるいは 2 通りの ‘シャッフル積’ 構造を持つことから**複シャッフル代数 (double shuffle algebra)** と呼ばれている．

重さ k の MZV が生成する $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を

$$
\mathcal{Z}_0 = \mathbb{Q},\ \mathcal{Z}_1 = 0,\ \mathcal{Z}_k = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_l=k \\ n\geq 1, k_1\geq 2, k_2,\ldots,k_l\geq 1}} \mathbb{Q}\zeta(k_1,\ldots,k_l)
$$

と定義する．先述の MZV の積構造により $\mathcal{Z}_k \cdot \mathcal{Z}_l \subset \mathcal{Z}_{k+l}$ が成り立つことが分かる．また, この $\mathcal{Z}_k$ に関して Zagier [29] による以下の次元予想が有名である．

予想 1 (**Zagier の次元予想**, 1994)**.** $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k$. ただし, 数列 $\{d_k\}$ は $d_0 = 1, d_1 = 0, d_1 = 1, d_k = d_{k-2} + d_{k-3}\ (k \geq 3)$ で与えられる．

重さ k の MZV は全部で 2^{k-2} 個あるが, この次元予想は空間としては d_k 次元であるといっている．d_k は 2^{k-2} と比べて大変小さいため, それだけ沢山の線形関係式があることを示唆している．また, Goncharov [7] や寺杣 [27] により, 以下のことが示されている．

定理 1 (Goncharov, 寺杣)**.** $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$.

これにより, MZV の間に沢山（各重さ k ごとに少なくとも $2^{k-2} - d_k$ 個）の線形関係式が成り立つことが証明されたことになる．さらに, MZV 代数の直和予想と言うものもある．（たとえば [6] 参照.）

予想 2 (**直和予想**)**.** $\sum_{k\geq 0} \mathcal{Z}_k = \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{Z}_k$.

すなわち, 異なる重さの MZV の間には関係式は存在しないだろうというものである．両予想とも MZV の $\mathbb{Q}$ 上の線形独立性などの問題を孕んでおり, 極めて難しい予想であると思われている．

本稿では, これまでに研究された MZV の間に成り立つ具体的な関係式族について, その代表的なものを, M. Hoffman による MZV の代数的定式化のことばを用いて述べ, ‘関係式族の関係’（とりわけ双対公式周辺）に関する問題をいくつか提起する．

2　Hoffman による代数的定式化

Hoffman [10] により導入された, MZV の代数的定式化について述べる.
2 変数非可換多項式環 $\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$ の部分環 $\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^0$ をそれぞれ

$$\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}^1 \colon = \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y \supset \mathfrak{H}^0 \colon = \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$$

とする. $z_k = x^{k-1}y$ $(k \geq 1)$ とおく. $\mathbb{Q}$-線形写像 $Z \colon \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ を $Z(1) = 1$ および

$$Z(z_{k_1} \cdots z_{k_l}) = \zeta(k_1, \ldots, k_l) \quad (k_1 \geq 2)$$

で定める. MZV の関係式を具体的に記述するということは $\ker Z$ の元を具体的に書き下すということにほかならない.

3　代表的な関係式

3.1　双対公式

$\mathfrak{H}$ 上の反自己同型 $\tau \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を $\tau(x) = y,\ \tau(y) = x$ とする. このとき, MZV の双対公式は以下で述べられる.

定理 2. $(1-\tau)(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$.

この双対公式の証明はいくつか知られているが, 最も古典的なものは第 1 節にも書いたように MZV の反復積分表示において変数変換を行うことで示される. ([16] も参照.)

例 1. $x^2y \in \mathfrak{H}^0$ に対して, $(1-\tau)(x^2y) = x^2y - xy^2$ より, $\zeta(3) = \zeta(2,1)$ を得る.

【関係式の個数表】

重さ	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
双対公式	1	1	4	6	16	28	64	120	256	496	1024

3.2　大野関係式

非負整数 j に対し, $\mathbb{Q}$-線形写像 $\sigma_j \colon \mathfrak{H}^1 \to \mathfrak{H}^1$ を

$$\sigma_j(z_{k_1} \cdots z_{k_l}) = \sum_{\substack{\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_l = j \\ \epsilon_1, \ldots, \epsilon_l \geq 0}} z_{k_1+\epsilon_1} \cdots z_{k_l+\epsilon_l}$$

で定義する. ただし $z_k = x^{k-1}y$ $(k \geq 1)$ である. このとき, MZV の大野関係式は以下で述べられる[1].

定理 3 (大野 [19])**.** 任意の非負整数 j に対し, $\sigma_j(1-\tau)(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$.

大野関係式は, $j = 0$ のとき上記の双対公式, $j = 1$ のときは Hoffman 関係式 ([9]), また任意の正整数 k に対し $Z(\sigma_j(1-\tau)(z_k)) = 0$ であることは Granville [8] や Zagier（未出版の原稿）によりはじめて示されその後何度も再証明されている和公式と呼ばれる関係式を導く, 大きな関係式族である.

[1] ここでの表記は [13] における表記に準ずる.

例 2. 非負整数 j と $x^2y \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\sigma_j(1-\tau)(x^2y) = \sigma_j(x^2y - xy^2) = x^{j+2}y - \sum_{a+b=j} x^{a+1}yx^by$$

より,

$$\zeta(j+3) = \sum_{a+b=j} \zeta(a+2, b+1)$$

を得る. これは重さ $j+3$, 深さ 2 の和公式である.

【関係式の個数表】

重さ	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
大野関係式	1	2	5	10	23	46	98	199	411	830	1691

3.3 巡回和公式

Hoffman-大野 [11] にて証明された MZV の巡回和公式は, 田中-若林 [26] の中で ‘ポアソン代数’ を参考に代数的に定式化されたので, それについて紹介する. n を正の整数とする. $\mathfrak{H}$ の $\mathfrak{H}^{\otimes(n+1)}$ への作用 $\diamond$ を

$$a \diamond (w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}) = w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes aw_{n+1},$$
$$(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}) \diamond b = w_1 b \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}$$

$(a, b, w_1, \ldots, w_{n+1} \in \mathfrak{H})$ で定義する. $\mathbb{Q}$-線形写像 $\mathcal{C}_n \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}^{\otimes(n+1)}$ を

$$\mathcal{C}_n(x) = x \otimes (x+y)^{\otimes(n-1)} \otimes y,$$
$$\mathcal{C}_n(y) = -x \otimes (x+y)^{\otimes(n-1)} \otimes y$$

および

$$\mathcal{C}_n(ww') = \mathcal{C}_n(w) \diamond w' + w \diamond \mathcal{C}_n(w') \quad (w, w' \in \mathfrak{H})$$

で定義する. 写像 $\mathcal{M}_n \colon \mathfrak{H}^{\otimes(n+1)} \to \mathfrak{H}$ を $\mathcal{M}_n(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}) = w_1 \cdots w_{n+1}$ とし, $\rho_n = \mathcal{M}_n \mathcal{C}_n$ とする. また, $\check{\mathfrak{H}}^1$ を, 語 1 と $z_{k_1} \cdots z_{k_l}$（ただし, ある番号 q に対し $k_q > 1$）で生成される $\mathfrak{H}^1$ の部分代数とする. このとき, 次を得る.

定理 4 (田中-若林 [26])**.** 任意の正整数 n に対し, $\rho_n(\check{\mathfrak{H}}^1) \subset \ker Z$.

この定理の $n=1$ の場合が Hoffman と大野による巡回和公式である.

例 3. $xy \in \check{\mathfrak{H}}^1$ に対して,

$$\begin{aligned}
\rho_2(xy) &= \mathcal{M}_2 \mathcal{C}_2(xy) \\
&= \mathcal{M}_2 \left(\mathcal{C}_2(x) \diamond y + x \diamond \mathcal{C}_2(y) \right) \\
&= \mathcal{M}_2 \left(xy \otimes (x+y) \otimes y - x \otimes (x+y) \otimes xy \right) \\
&= xy(x+y)y - x(x+y)xy = xyyy - xxxy
\end{aligned}$$

より, $\zeta(2,1,1) = \zeta(4)$ を得る.

【関係式の個数表】

重さ	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$n=1$	1	2	4	6	12	18	34	58	106	186	350
$n=2$		1	3	5	11	17	33	57	105	185	349
$n=3$			1	3	7	13	26	48	91	167	319
$n=4$				1	3	7	15	29	58	111	218
$n=5$					1	3	7	15	31	61	122
$n=6$						1	3	7	15	31	63
$n=7$							1	3	7	15	31
$n=8$								1	3	7	15
$n=9$									1	3	7
$n=10$										1	3
$n=11$											1

3.4 （有限）複シャッフル関係式

$\mathfrak{H}^1$ 上の積 $*\colon \mathfrak{H}^1 \times \mathfrak{H}^1 \to \mathfrak{H}^1$ を, $\mathbb{Q}$-双線形性および次の 2 条件により定める.

i) 任意の $w \in \mathfrak{H}^1$ に対して, $1 * w = w * 1 = w$,

ii) 任意の正整数 p, q と任意の語 $w, w' \in \mathfrak{H}^1$ に対して,
$z_p w * z_q w' = z_p(w * z_q w') + z_q(z_p w * w') + z_{p+q}(w * w')$.

この積 $*$ は調和積と呼ばれ, $\mathfrak{H}^1$ 上で結合的かつ可換な積である. 調和積に関する MZV の代数関係式は MZV の級数表示からくる積構造で, 写像 Z が積 $*$ に関して準同型であると言い換えられる.

次に, $\mathfrak{H}$ 上の積 $\shuffle\colon \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を, $\mathbb{Q}$-双線形性および次の 2 条件により定める.

i) 任意の $w \in \mathfrak{H}^1$ に対して, $1 \shuffle w = w \shuffle 1 = w$,

ii) $u, v \in \{x, y\}$ と任意の語 $w, w' \in \mathfrak{H}$ に対して,
$uw \shuffle vw' = u(w \shuffle vw') + v(uw \shuffle w')$.

この積 $\shuffle$ はシャッフル積と呼ばれ, $\mathfrak{H}^1$ 上で結合的かつ可換な積である. シャッフル積に関する MZV の代数関係式は MZV の反復積分表示からくる積構造で, 写像 Z が積 $\shuffle$ に関して準同型であると言い換えられる.

これら 2 つの積で線形に展開したものを等しいとした関係式が以下の複シャッフル関係式である.

定理 5. 任意の $w, w' \in \mathfrak{H}^0$ に対し, $Z(w * w' - w \shuffle w') = 0$.

例 4. $xy * xy = 2xyxy + xxxy$ および $xy \shuffle xy = 4xxyy + 2xyxy$ の差をとれば, $\zeta(4) = 4\zeta(3,1)$ を得る.

注意 1. 調和積の展開式に現れる項数は Delannoy 数として知られている.

【関係式の個数表】

重さ	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
（有限）複シャッフル関係式	0	1	2	7	16	40	92	200	429	902

3.5　正規化された複シャッフル関係式

上記の（有限）複シャッフル関係式を拡張したのが, 井原-金子-Zagier [13] による正規化された複シャッフル関係式である. $\sharp$ を積 $*$ または積 $ш$ を表すものとし, $\mathfrak{H}^1_\sharp$, $\mathfrak{H}^0_\sharp$ をそれぞれ $\mathfrak{H}^1$, $\mathfrak{H}^0$ の積を $\sharp$ と見た可換代数とする. Hoffman [10] や Reutenauer [22] により同型 $\mathfrak{H}^1_\sharp \cong \mathfrak{H}^0_\sharp[y]$ が知られている. 写像 $\mathrm{reg}_\sharp \colon \mathfrak{H}^1_\sharp \to \mathfrak{H}^0$ を多項式としての定数項を取り出す写像とする. すなわち, $\mathfrak{H}^1_\sharp \ni w = w_0 + w_1 \sharp y + w_2 \sharp y^{\sharp 2} + \cdots + w_s \sharp y^{\sharp s} \in \mathfrak{H}^0_\sharp[y]$ であるとき, $\mathrm{reg}_\sharp(w) = w_0$ とする. このとき, 次が成り立つ.

定理 6. $w \in \mathfrak{H}^0,\ w' \in \mathfrak{H}^1$ に対し, $\mathrm{reg}_\sharp(w \,ш\, w' - w * w') \in \ker Z$.

例 5. $xy \,ш\, yxy = 2yxyxy + 4yx^2y^2 + 2xy^2xy + 2xyxy^2$, $xy * yxy = 2yxyxy + yx^3y + xy^2xy + x^2yxy$ より,

$$xy \,ш\, yxy - xy * yxy = 4yx^2y^2 + xy^2xy + 2xyxy^2 - yx^3y - x^2yxy.$$

$yx^2y^2 = x^2y^2 \,ш\, y - xyxy^2 - 3x^2y^3$, $yx^3y = x^3y \,ш\, y - xyx^2y - x^2yxy - 2x^3y^2$ であるから,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{reg}_ш(xy \,ш\, yxy - xy * yxy)\\
&= -4(xyxy^2 + 3x^2y^3) + xy^2xy + 2xyxy^2 + (xyx^2y + x^2yxy + 2x^3y^2) - x^2yxy\\
&= 2x^3y^2 + xyx^2y + xy^2xy - 2xyxy^2 - 12x^2y^3.
\end{aligned}$$

したがって, $2\zeta(4,1) + \zeta(2,3) + \zeta(2,1,2) = 2\zeta(2,2,1) + 12\zeta(3,1,1)$ を得る.

【関係式の個数表】

重さ	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
正規化された複シャッフル関係式	1	3	6	14	29	60	123	249	503	1012

3.6　導分関係式

井原-金子-Zagier [13] では, 正規化された複シャッフル関係式を導くとともに, それに含まれる関係式族として以下の導分関係式を証明した. 正整数 n に対して $\partial_n \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を $\mathfrak{H}$ 上の導分（すなわち $\mathbb{Q}$ 線形写像で Leibniz 則 $\partial_n(ww') = \partial_n(w)w' + w\partial_n(w')$ を満たすもの）を $\partial_n(x) = x(x+y)^{n-1}y$, $\partial_n(y) = -x(x+y)^{n-1}y$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

定理 7. 任意の正整数 n に対し, $\partial_n(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$.

例 6. $xy \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\partial_2(xy) = \partial_2(x)y + x\partial_2(y) = x(x+y)y^2 - x^2(x+y)y = xy^3 - x^3y$$

であるから, $\zeta(2,1,1) = \zeta(4)$ を得る.

注意 2. $\partial_1 = \tau\sigma_1\tau - \sigma_1$ が成立し, これが Hoffman 関係式 ([9]) を与えている. すなわち, 導分関係式は Hoffman 関係式の代数的な拡張（のひとつ）である.

【関係式の個数表】

重さ	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
導分関係式	1	2	5	10	22	44	90	181	363	727	1456	2912

3.7　一般導分関係式

Zagier [28] や金子 [15] において, Connes-Moscovici のホップ代数 ([1]) を参考にして上記の導分関係式の一般化が予想され, 田中 [24] においてその予想が証明された．$c \in \mathbb{Q}$ とする．$\mathbb{Q}$ 線形写像 $\theta^{(c)} \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を $\theta^{(c)}(x) = x^2 + \frac{1}{2}(xy+yx)$, $\theta^{(c)}(y) = y^2 + \frac{1}{2}(xy+yx)$ および $w, w' \in \mathfrak{H}$ に対し

$$\theta^{(c)}(ww') = \theta^{(c)}(w)w' + w\theta^{(c)}(w') + c\partial_1(w)H(w')$$

で定義する．ただし, $\mathbb{Q}$ 線形写像 $H \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ は $\mathfrak{H}$ の語 w に対し $H(w) = \deg(w)w$ とする．さらに正整数 n に対し,

$$\partial_n^{(c)} = \frac{1}{(n-1)!}\mathrm{ad}(\theta^{(c)})^{n-1}(\partial_1)$$

とする．ただし $\mathrm{ad}(\theta)(\partial) = [\theta, \partial] = \theta\partial - \partial\theta$ である．（$c = 0$ のときが上記の導分 ∂_n であることが確かめられる: $\partial_n^{(0)} = \partial_n$.）このとき, 以下が成り立つ.

定理 8. 任意の $c \in \mathbb{Q}$ と任意の正整数 n に対し, $\partial_n^{(c)}(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$.

例 7. $xy \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\partial_2^{(c)}(xy) = (xyyy - xxyy - xyxy)c + xyyy - xxxy$$

と計算される．したがって $\zeta(2,1,1) = \zeta(3,1) + \zeta(2,2)$, $\zeta(2,1,1) = \zeta(4)$ を得る.

【関係式の個数表】

重さ	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
一般導分関係式 ($c \in \mathbb{Q}$ は任意)	1	2	5	10	23	46	98	200	410	830	1679

3.8　川島関係式

川島 [18] では Newton 級数の解析的な性質から MZV の間の関係式を導いている．ここではこれまでの代数的定式化に則して述べる．（[23] も参照.）正整数 p, q および $w, w' \in \mathfrak{H}^1$ に対し, 積 $\dot{*}$ を $z_p w \mathbin{\dot{*}} z_q w' = z_{p+q}(w * w')$ で定義する．また, φ を $\mathfrak{H}$ 上の自己同型で $\varphi(x) = x + y$, $\varphi(y) = -y$ で定まるものとする．このとき, 以下が成り立つ.

定理 9 (川島, 2009)**.** 正整数 m と $w, w' \in \mathfrak{H}y$ に対し,

$$\sum_{\substack{p+q=m \\ p,q \geq 1}} Z\left(\varphi(w) \mathbin{\dot{*}} y^p\right) Z\left(\varphi(w') \mathbin{\dot{*}} y^q\right) = Z\left(\varphi(w * w') \mathbin{\dot{*}} y^m\right).$$

とくに, $m = 1$ のとき

$$L_x\varphi\left(\mathfrak{H}y * \mathfrak{H}y\right) \subset \ker Z$$

が成り立つ．（ただし, L_x は $L_x(w) = xw$ $(w \in \mathfrak{H})$ なる $\mathbb{Q}$ 線形写像である.）これは線形関係式の族であり, 川島関係式の線形部分とも呼んでいるものである.

例 8. $L_x\varphi(y * y) = L_x\varphi(2y^2 + xy) = L_x\left(2(-y)^2 + (x+y)(-y)\right) = L_x(y^2 - xy) = xy^2 - x^2y$ であるから, $\zeta(2,1) = \zeta(3)$ を得る.

【関係式の個数表】

重さ	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
川島関係式の線形部分	1	2	5	10	23	46	98	200	413	838	1713
川島関係式（積は調和積で展開）	1	2	5	12	25	55	113	235	480	977	
川島関係式（積はシャッフル積で展開）	1	3	6	14	29	60	123	249	503	1012	

3.9 アソシエーター関係式

ここではDrinfel'dアソシエーターを形式的に定義する．詳細は [3, 12, 20] などを参照されたい．$\mathbb{C}$ 代数準同型 $g_1\colon \mathbb{C}\langle\langle X,Y\rangle\rangle \to \mathbb{C}[[\xi,\eta]]\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ を $X\mapsto X-\xi,\ Y\mapsto Y-\eta$ で定義する．また, $\mathbb{C}$ 線形写像 $g_2\colon \mathbb{C}[[\xi,\eta]]\langle\langle X,Y\rangle\rangle \to \mathbb{C}\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ を $\eta^q M\xi^p \mapsto Y^q M X^p$ $(p,q\geq 0, M$ は不定元 X,Y で作られる語) と定義する．

$$\Phi^0(X,Y)=1+\sum_{n\geq 1}\sum_{\substack{k_1\geq 2,\\ k_2,\dots,k_n\geq 1}}(-1)^n\zeta(k_1,\dots,k_n)X^{k_1-1}Y\cdots X^{k_n-1}Y\ \ (\in\mathbb{R}\langle\langle X,Y\rangle\rangle)$$

とおくとき, Drinfel'd アソシエーター $\Phi(X,Y)$ は

$$\Phi(X,Y)=g_2\circ g_1(\Phi^0(X,Y))$$

で与えられる．

例 9. Drinfel'd アソシエーターの低次の項は下記のようになる：

$$\begin{aligned}\Phi(X,Y)=1&-\zeta(2)(XY-YX)-\zeta(3)(X^2Y-2XYX+YX^2)+\zeta(2,1)(XY^2-2YXY+Y^2X)\\&-\zeta(4)(X^3Y-3X^2YX+3XYX^2-YX^3)\\&+\zeta(3,1)(X^2Y^2-2XY^2X-2YX^2Y+4YXYX-Y^2X^2)\\&+\zeta(2,2)(XYXY-XY^2X-YX^2Y+YXYX)\\&-\zeta(2,1,1)(XY^3-3YXY^2+3Y^2XY-Y^3X)\\&-\cdots.\end{aligned}$$

定理 10 (アソシエーター関係式 [3])**.** Drinfel'd アソシエーター $\Phi(X,Y)$ は以下を満たす：

i) （group like 元）環準同型 $\Delta\colon \mathbb{C}\langle\langle X,Y\rangle\rangle\to\mathbb{C}\langle\langle X,Y\rangle\rangle\otimes\mathbb{C}\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ を

$$X\mapsto X\otimes 1+1\otimes X,\ \ Y\mapsto Y\otimes 1+1\otimes Y$$

で定義する．このとき, $\Delta(\Phi(X,Y))=\Phi(Y,X)\otimes\Phi(Y,X)$ が成り立つ．

ii) （2 項関係式）$\Phi(X,Y)\Phi(Y,X)=1$.

iii) （6 項関係式）$A+B+C=0$ のとき, $e^{\pi\sqrt{-1}A}\Phi(C,A)e^{\pi\sqrt{-1}C}\Phi(B,C)e^{\pi\sqrt{-1}B}\Phi(A,B)=1$.

iv) （5 項関係式）$\mathbb{C}\langle\langle X_{ij}\rangle\rangle_{1\leq i\neq j\leq 5}$ の同値関係 $\sim$ を以下の 4 つの式で定義する：

– $X_{ij} = X_{ji} \quad \sharp\{i,j\} = 2,$

– $[X_{ij}, X_{ik} + X_{kj}] = 0 \quad \sharp\{i,j,k\} = 3,$

– $[X_{ij}, X_{kl}] = 0 \quad \sharp\{i,j,k,l\} = 4,$

– $\sum_{1\leq j\leq 5, j\neq i} X_{ij} = 0 \quad i = 1,2,3,4,5.$

このとき $\mathbb{C}\langle\langle X_{ij}\rangle\rangle_{1\leq i\neq j\leq 5}/\sim$ において

$$\Phi(X_{34}, X_{45})\Phi(X_{51}, X_{12})\Phi(X_{23}, X_{34})\Phi(X_{45}, X_{51})\Phi(X_{12}, X_{23}) = 1.$$

注意 3. アソシエーターが group like 元であることはシャッフル積に関する MZV の代数関係式に同値である．また, 2 項関係式は MZV の双対公式と同値である．さらに, アソシエーター関係式が正規化された複シャッフル関係式を含んでいることが Deligne-寺杣 [2] や古庄 [4] により, 5 項関係式が 6 項関係式を含んでいることが古庄 [5] によりそれぞれ知られている．

4 課題

第 3 に挙げた MZV の関係式族はそれぞれさまざまな手法を用いて導かれたものであり, 関係式族同士の関係は知られていないものも多い．本節では「関係式族の関係」についてこれまでに知られている事実といくつかの予想についてまとめる．

まず, 以下の予想を述べておく．

予想 3. 正規化された複シャッフル関係式, アソシエーター関係式および川島関係式は, すべて同値だろう．またそれらは MZV の関係式すべてを記述しているだろう．

つまり, これらの 3 つの関係式族はそれぞれ重さ k の MZV 代数の次元を Zagier の予想次元 d_k（定理 1 参照）まで落とすだろうと予想されている．数値計算により, 複シャッフル関係式は重さ 20 まで ([17]), 川島関係式も重さ 12 までは正しいことが（筆者の Risa/asir を用いた計算で）分かっている．アソシエーター関係式が正規化された複シャッフル関係式を含んでいることが Deligne-寺杣 [2] や古庄 [4] により知られていることは先述したが, その逆は未解決である．また, 川島関係式と他の 2 つとの包含関係は全て未解決である．

それ以外の関係式についての包含関係で現在までに知られているものは以下の通りである．

- 有限複シャッフル関係式, 導分関係式（したがって Hoffman 関係式）, 和公式は正規化された複シャッフル関係式に含まれている．
- 双対公式はアソシエーター関係式に含まれている．
- 双対公式, 導分関係式, 和公式は大野関係式に含まれている．
- 大野関係式, 一般導分関係式, 巡回和公式は川島関係式の線形部分に（したがって川島関係式に）含まれている．

ほかにも, 双対公式と導分関係式をあわせた関係式族は大野関係式と同値であることが知られている ([13])．双対公式と一般導分関係式をあわせた関係式族は川島関係式の線形部分に等しいだろうとの予想があるが, これは未解決である．（低い重さのところでは正しいことが Risa/asir を用いた実験か

ら分かっている.）また, 双対公式, 一般導分関係式, 巡回和公式は正規化された複シャッフル関係式に含まれているはずであるが, 未だ解かれていない. ただ, 双対公式については梶川 [14] によって以下の部分的な結果が示されている：

定理 11 (梶川, 2006)**.** 重さ, 深さ, 高さを固定した MZV の和に関する双対公式は導分関係式（したがって正規化された複シャッフル関係式）に含まれている.

これとは別の系列で, 重さ, 深さおよび（高さの代わりに）k_1（インデックスの最初の数）を固定した MZV の和についても同様の主張が正しそうなことが実験により分かっている（[24] 参照）.

参考文献

[1] A. Connes, H. Moscovici, *Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem*, Comm. Math. Phys. **198** (1998), no. 1, 199–246.

[2] P. Deligne, T. Terasoma, *Harmonic shuffle relation for associators*, preprint available at http://www2.lifl.fr/mzv2005/DOC/Terasoma/lille_terasoma.pdf.

[3] V. G. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. 2 (1991), no. 4, 829–860.

[4] H. Furusho, *Double shuffle relation for associators*, preprint, arXiv:math.AG/08080319.

[5] H. Furusho, *Pentagon and hexagon equations*, to appear in Annals of Mathematics.

[6] H. Furusho, *The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Vol 39. no 4. (2003), 695–720.

[7] A. Goncharov, *Periods and mixed Tate motives*, preprint, arXiv:math.AG/0202154.

[8] A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge (1997), 95–101.

[9] M. Hoffman, *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math., **152** (1992), 275–290.

[10] M. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra **194** (1997), 477–495.

[11] M. Hoffman, Y. Ohno, *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, J. Algebra **262** (2003), 332–347.

[12] K. Ihara, M. Kaneko, *Derivation relations and regularized double shuffle relations of multiple zeta values*, preprint.

[13] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. 142 (2006), no. 2, 307–338.

[14] J. Kajikawa, *Duality and double shuffle relations of multiple zeta values*, J. Number Theory **121** (2006), 1–6.

[15] M. Kaneko, *On an extension of the derivation relation for multiple zeta values*, The Conference on L-Functions, 89–94, World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2007).

[16] C. Kassel, *Quantum Groups*, GTM, **155**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[17] M. Kaneko, M. Noro, K. Tsurumaki, *On a conjecture for the dimension of the space of the multiple zeta values*, Software for Algebraic Geometry, IMA 148 (2008), 47–58.

[18] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 755–788.

[19] Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Theory **74** (1999), 39–43.

[20] G. Racinet, *Doubles melanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unite*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. No. 95 (2002), 185–231.

[21] R. Ree, *Lie elements and an algebra associated with shuffles*, Ann. of Math., 68 (1958), 210–220.

[22] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Oxford Science Publications, 1993.

[23] T. Tanaka, *Algebraic interpretation of Kawashima relation for multiple zeta values and its applications*, to appear in RIMS Kôkyûroku-bessatsu.

[24] T. Tanaka, *On the quasi-derivation relation for multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 2021–2034.

[25] T. Tanaka, Risa/Asir による twisted derivation relation の計算と観察, 第 1 回福岡数論研究集会報告集 (2006), 31–36.

[26] T. Tanaka, N. Wakabayashi, *An algebraic proof of the cyclic sum formula for multiple zeta values*, J. Algebra **323** (2010), 766–778.

[27] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. 149 (2002), no. 2, 339–369.

[28] D. Zagier, *Multiple Zeta Values and the Connes-Moscovici Hopf Algebra*, available at http://vivatsgasse7.files.wordpress.com/2007/07/mehran-poster.pdf

[29] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, Progr. Math., 120, Birkhäuser, Basel, 1994.