

干渉

2 光束干渉

平面波の干渉

同じ周波数と同じ偏光を持つ2つの平面波

$$u_1 = A_1 \exp(i\omega t - i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + i\phi_1), \quad u_2 = A_2 \exp(i\omega t - i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + i\phi_2) \quad (1)$$

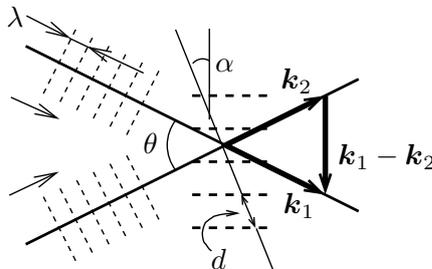
を重ね合わせて得られる波 $u = u_1 + u_2$ の強度を考える。ただし、 $A_1 > 0, A_2 > 0$ とし、位相は ϕ_1, ϕ_2 であらわす。周波数と同じなので強度の時間変化は無いが、波数ベクトルの向きが異なるので強度の空間変化はあり干渉パターンが生じる。強度は $|u|^2$ に比例するので $|u|^2$ を求める。

$$|u|^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + (\phi_1 - \phi_2)], \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \quad (2)$$

第3項は干渉パターンをあらわすが、それは波数ベクトル \mathbf{k} を持つ平面波の形をしている。この波は周波数がゼロであり空間中を伝播しないので、 \mathbf{k} の符号には意味が無い。空間に分布している干渉縞はこの波数ベクトルに垂直でその間隔は波長 $2\pi/|\mathbf{k}|$ に等しい。スクリーンや写真フィルム面に映った干渉縞を観測する場合、 \mathbf{k} のその面に平行な成分が観測される。したがって面上の干渉縞の間隔 d は、

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta/2) \cos \alpha} \quad (3)$$

ここで、 θ は \mathbf{k}_1 と \mathbf{k}_2 との間の角度、 α はベクトル $(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ が平面に対してなす角、 λ は光の波長。

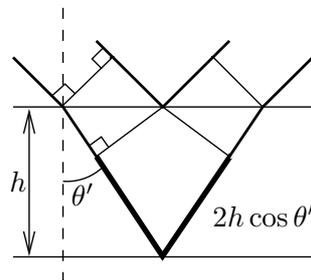


2つの平面波による干渉縞のできかた

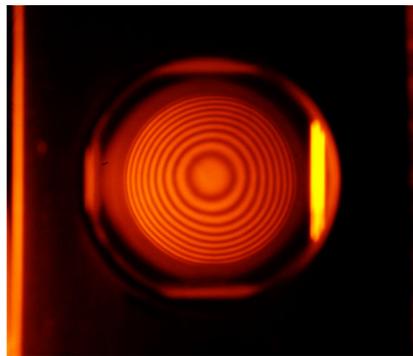
膜による干渉

平行平板による反射

可視光に対するガラスの反射率は数パーセントなので、空気中のガラス板による反射光のほとんどは表面で1回反射したものと裏面で1回反射したものである。これらの間の位相差 δ は板の厚さ h , ガラス中の波長 λ' , ガラス中の屈折角 θ' によって、 $\delta = (4\pi h/\lambda') \cos \theta' - \pi$. (表面での反射で位相が反転するので π が必要)。入射角がゼロに近い場合は、屈折率を 1.5 とすると、各面からの反射光の強さは入射光の約 4% であるので、干渉によって強め合うと反射光全体では約 16%、弱め合うとほとんどゼロになる。



膜による干渉



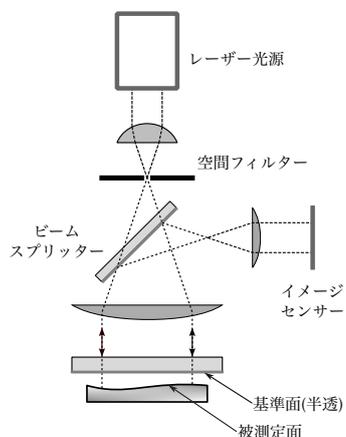
厚さ 3mm のガラス板による干渉 (Na D 線)

膜による干渉の見え方

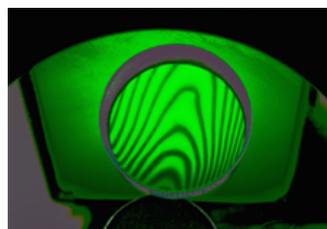
厚さの様な膜を真上から単色の点光源で照らして反射光を真上でスクリーンに映すか望遠鏡で観察すると、同心円状の干渉縞になる。これは中心からの距離が角度に対応するからである。また、広い単色光源で照らして肉眼で観察すると、瞳からガラス面に降ろした垂線がガラス面と交わるころを中心とする同心円またはその一部よりなる干渉縞が見える。この場合は見る向きが角度に対応する。

厚さが場所によって異なる膜で単色の平行光線を反射して得られる各干渉縞は膜の厚さが一定の等厚線になる。広い光源を使い遠くから観測する場合にもほぼ同じものが得られる。たとえばガラスの平面に凸レンズの凸面を接すると両者の間に空気の層ができる。この層による干渉縞を観測す

ればレンズ面の曲率や欠陥を測定することができる (Newton リング)。Fizeau の干渉計は平行光線を使って等厚干渉縞を精密に測定するものである。



Fizeau 干渉計



コンピューター用ディスクとガラス平板間の空気膜による等厚干渉縞 (波長 546.1nm の光源使用)

反射防止膜

空気とガラスの間に両者の屈折率の相乗平均に等しい屈折率の物質の層を設けると、空気との境界の反射率とガラスとの境界の反射率が等しいので、干渉で弱め合う条件では反射光がほとんどゼロになる。これは最も単純な無反射コーティング。振幅反射係数の符号が同じため π の位相ずれが無いので、入射角がゼロの場合、最も薄い無反射コーティングの厚さは (波長/4)。

構造色

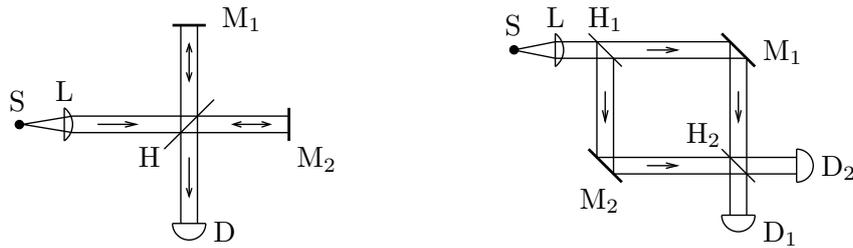
シャボン玉の色は 1 層の膜による白色光の反射であるが、生きものが作る多層膜での反射で色が生じるものもある (下図)。コロイド溶液やオパールなどでは微粒子による結晶構造によって色が生じることがある。このような色は周期的空間構造によるものであり、総称して「構造色」という。



一枚貝が作る炭酸カルシウムの多層膜による構造色

Michelson 干渉計と Mach-Zehnder 干渉計

ハーフミラーとミラーを組み合わせて位相差を自由に調節できるようにした干渉計の基本形としては、Michelson 干渉計と Mach-Zehnder 干渉計とがある。図の S は光源、H, H₁, H₂ はハーフミラー、M₁, M₂ はミラー、D, D₁, D₂ は検出手段である。平行光線を得るためのレンズ L も描いてあるが、必ずしも平行光線を使用するとは限らない。



Michelson 干渉計 (左) と Mach-Zehnder 干渉計

Michelson 干渉計において M_1 の H による鏡像を M_1' とすると、光源 S からの光が M_2 と M_1' で反射して D に到達するとみなすことができるので、 M_2 と M_1' を裏面および表面とする膜での反射と同じである。しかし、鏡を移動することによってこの膜の厚さや表面の傾きを連続的に変えることができる。

Michelson 干渉計は、Michelson と Morley による光速不変性の発見で有名だが、他に、地震波や重力波の検出に必要な非常に小さな変移を測るのに使われたり、微細なスペクトル構造を測定するのに使われたりしている。

Mach-Zehnder 干渉計は調節可能箇所が多いので、光束の配置を自由に選んで干渉させることができる。光路は一方通行なので光路中に入れた透明媒質の微小な屈折率変化や流体の流速分布を測るのに都合がよい。また、Michelson 干渉計と違い、干渉計の全体が回転しているとその角速度によって位相差が変わる。これは Sagnac(サニャック) 効果といい、ジャイロスコープに使われる。

Fourier 変換分光法

Michelson 干渉計でミラーの一つの位置を動かすと 2 つの光路を通ってくる光の到達時間の差 τ が変わる。光源が必ずしも単色ではない場合でも、重ね合わせられた光の強度の時間平均には光源の振幅の自己相関関数 $\Gamma(\tau)$ が含まれることが言える。 τ は到達時間の差である。

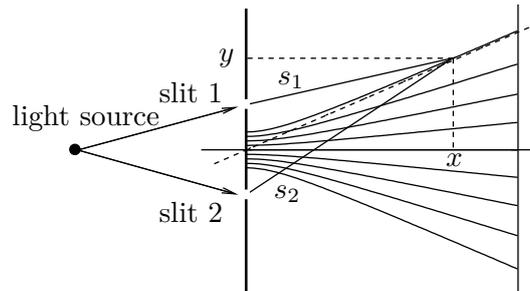
Wiener-Khinchine の定理によれば、振幅の自己相関関数の Fourier 変換によってスペクトル強度が得られる。逆に、スペクトル強度の分布によって干渉縞の変化が決まる。形式的には次のような関係が成り立つ。

$$\Gamma(\tau) \propto \int \overline{u(t-\tau)u(t)} dt = \int e^{i\omega\tau} |u(\omega)|^2 d\omega \quad (4)$$

単色光の場合は τ をいくら大きくしても干渉が見られるはずだが、実際にはスペクトルの広がりによってその広がり逆数程度以上の τ では干渉が見えなくなる。また、複数の線スペクトルの集まりよりなる光源では τ を変化させると線スペクトルの間隔に対応して周期的に干渉が現れたり消えたりする。そこで、干渉縞の変化によってスペクトルの構造を知ることができる。この原理ははじめ Michelson らによって原子の発光スペクトルの微細構造を調べるのに使われた。現在行なわれている Fourier 変換分光法は、ミラーを動かしながら干渉光強度の変化を記録し、それに Fourier 変換を行うことによってスペクトルを得るもので、主に赤外領域に使われる。

Young の二重スリットの実験

Young が行なったように、2本の平行な細いスリットを開けた板で単色光を遮ると背後に縞模様のパターンがあらわれる。一方のスリットを塞ぐとそのようなパターンはあらわれないので、このパターンは波の干渉によるものであることがわかる。



2つのスリットを通った光の干渉

2つのスリットでの光の位相は等しいとし、各スリットとスクリーンの後ろの任意の点との距離を s_1, s_2 とすると、この点で両方のスリットからの光の位相が一致して強めあうなら、 $s_2 - s_1 = n\lambda$ が成り立つ (n は整数、 λ は光の波長)。このような点はスリットの位置を焦点とする n でラベル付けされた双曲線群を形成する。スリットから離れた場所での干渉パターンは双曲線の漸近線によって決められる。それはスリットの中点を通り、方向は

$$\sin \theta_n = \frac{n\lambda}{h} \quad (5)$$

で決まる。ただし、スリット面の法線との間の角度を θ_n 、スリットの間隔を h としている。この最も簡単な証明は次のとおり。スリットの中点を原点とし、スリット面に垂直に X 軸、両スリットを結ぶ方向に Y 軸をとって座標をあらわすと、 $s_1^2 = x^2 + (y - h/2)^2$ 、 $s_2^2 = x^2 + (y + h/2)^2$ から $y/s_0 = n\lambda/h$ 。ここで $s_0 = (s_1 + s_2)/2$ は原点からの距離とほとんど等しいので、上の式が得られる。双曲線の Y 軸切片が $n\lambda/2$ であることも使えば、双曲線の方程式は次の形で得られる。

$$y^2 = x^2 \tan^2 \theta_n + \frac{h^2 \sin^2 \theta_n}{4} = 0 \quad (6)$$

双曲線の離心率 ϵ は漸近線の方で決まり、 $\epsilon = 1/\sin \theta_n$ となる。公式にあてはめ、片方のスリットの位置を原点とする極座標 (r, ϕ) であらわすと次のようになる。

$$r = \frac{(h/2)(1 - \sin^2 \theta_n)}{\sin \theta_n - \cos \phi} \quad (7)$$

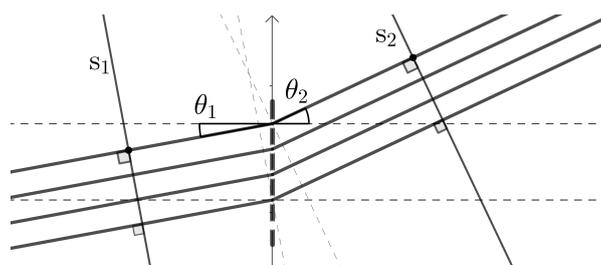
方位角 ϕ は y 軸の方向を基準にして測る。

多光束干渉

2 光束干渉においては干渉光強度の変化はサイン的であるが、多数波を重ね合わせる多光束干渉ではいろいろな波の重ね合わせになるので、組み合わせ方によっていろいろな干渉パターンを得ることができると考えられる。2つの基本的な組み合わせとして、回折格子と共振器がある。共振器には Fabry-Perot 型共振器とリング共振器がある。これらはいずれも特定の波長や位置にすどいピークを持つバンドパスフィルター (BPF、帯域通過フィルター) としての性質を持っている。

回折格子 (grating)

N 個のスリットが等間隔に開いた平板で平面波を遮ったときに背後の十分遠くで観測される光の強度を計算する。光の波数を k , スリットの間隔を h , スリット面の法線方向を基準として測った観測点の方向を θ_2 , 同じく光源の方向を θ_1 とする。



回折格子の等間隔のスリットを通る光路

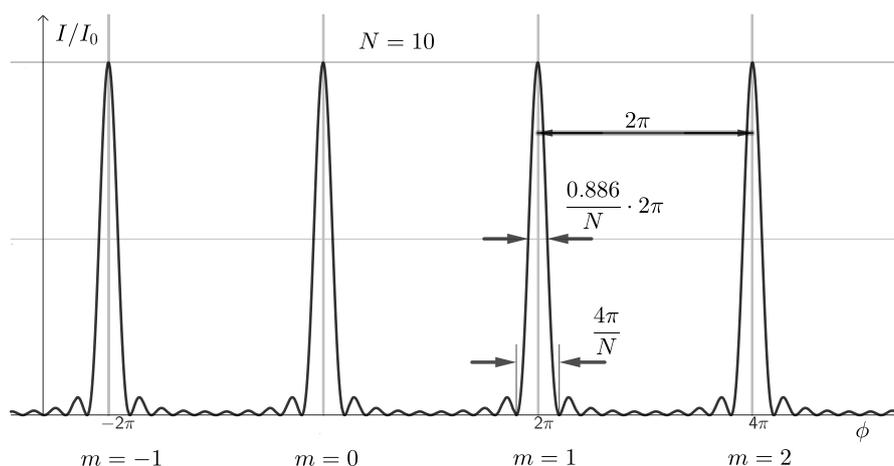
下端のスリットをスリット 0 とし順に番号付けると、スリット n を通る光の位相は、スリット 0 を通る光に対して

$$n\phi = knh(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \quad (8)$$

となる。ここで $\phi = kh(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$ は隣り合ったスリットを通る光の位相差である。どのスリットを通る光も観測点で同じ強さ I_0 を持つとすると、 N 個のスリットからの寄与を重ね合わせて得られる光の強さは、

$$I = I_0 \left| \sum_{n=0}^{N-1} \exp(in\phi) \right|^2 = I_0 \frac{\sin^2(N\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)} \quad (9)$$

I を ϕ に対してプロットすると、たとえば下図のような強度分布が得られる。スリットが 2 つの場合と違ってピークが細い。次数 m の最大ピークの位置は $\phi_m = 2\pi m$ となる。



回折強度分布 ($N = 10$)

$\Delta_\phi = \phi - \phi_m = \phi - 2\pi m$ を使えば, (9)は m に関係なく次のように書ける。

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\Delta_\phi/2)}{\sin^2(\Delta_\phi/2)} \quad (10)$$

各ピークの近傍で $|\Delta_\phi| \ll 2\pi$ であれば, $\sin(\Delta_\phi/2)$ を $\Delta_\phi/2$ で近似することができるので,

$$I = I_0 N \left(\text{sinc} \left(\frac{N\Delta_\phi}{2} \right) \right)^2 \quad (11)$$

N が十分大きいなら, 各ピークは幅がピークの間隔よりも十分狭くなり独立した sinc 関数になる。

この近似のもとで, これらのピークの半値全幅は f.s.r. (free spectral range, 最大ピークの間隔) の約 $0.886/N$ 倍と計算される。f.s.r. を半値全幅で割った値をフィネス (finesse) と呼び, 約 $1.13N$ になる。同じことは周波数、波数、 $\sin \theta_1, \sin \theta_2$ のいずれを横軸にとっても成り立つ。

m 次のピークの相対分解能をピークの幅とピークの位置の比であらわすとだいたい $1/mN$ となる。これは横軸が波長の場合でも成り立つ。

周波数であらわした f.s.r. (周波数を変えたときに繰り返し現れる最大ピークの間隔) の逆数は $T = h(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)/c$ となる。これは隣り合った 2 つのスリットを通った光が観測点に到着する時間の差である。単位インパルスを入力すると, 観測点では時間 NT の間に時間間隔 T で同じ強さのインパルスがアウトプットされる。これは周期 T の周期的インパルスと長さ NT の矩形関数の積である。 $m = 0$ のピーク近傍の sinc 関数はこの矩形関数の強度スペクトルである。

なお, 最も大きいサブピークの強度は最大ピークの約 4.5% で, N にほとんどよらない。

Fabri-Perot 型共振器

ファブリ-ペロー共振器は反射率が 1 に近い 2 つの平行な半透鏡でできていて, この中にある時間光を閉じ込めて共鳴を起こすようにしたもので, 回折格子と同様にシャープなフィルターとして利用される。内部が空気か真空中で間隔を変えて共鳴周波数を変えることができるようにしたものや, 1 枚のガラス板の両面に反射膜を付けた固定式のものがある。後者は普通, エタロン板と呼ば

れる。ガラス板の片面に反射膜、透明膜、もう1枚の反射膜を順に重ねて作ったものは、反射膜の間隔の小さいものができる。これは普通、干渉フィルターと呼ばれる。

この共振器に入った光は内部で反射を繰り返した後に外に出てくるが、これはゼロ、2、4、... といろいろな反射回数の光の重ね合わせになる。反射回数に比例して位相が遅れることと、反射率が高いので非常にたくさんの成分が重ね合わせられることから、透過光の強度分布は回折格子と似たものになる。しかし、項数が無限であることにより、原理的にはサブピークは存在しない。ピークの幅は反射回数の増加による減衰によって決まる。実際には面の平行からのずれや吸収によるロスが幅を広げる原因になる。

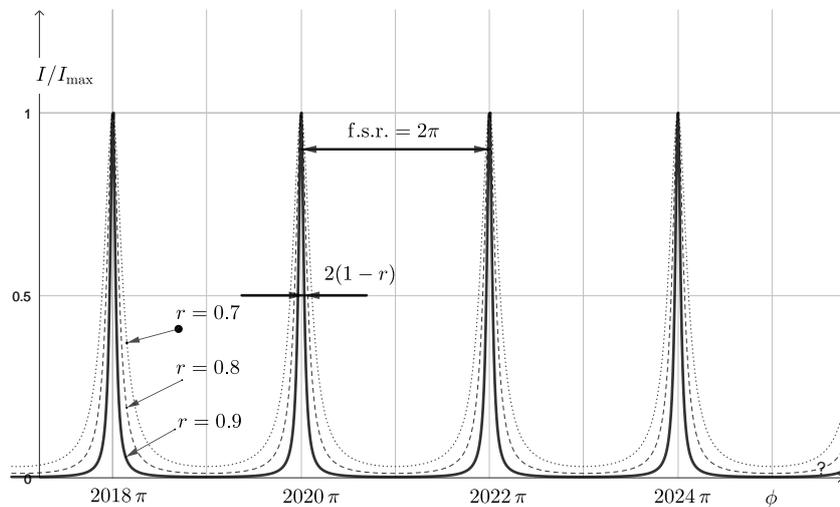
$2n$ 回反射して出て来る光の複素振幅を $a_0 r^n \exp(in\phi)$ ($0 < r < 1$) とすると、透過光の強さ分布は次のようになる。

$$I = I_0 \left| \sum_{n=0}^{\infty} r^n \exp(in\phi) \right|^2 = \frac{I_0/(1-r)^2}{1 + [2\sqrt{r} \sin(\phi/2)/(1-r)]^2} \quad (12)$$

$\Delta\phi = \phi - 2\pi m$ とすると、 $|\Delta\phi| \ll 2\pi$ においては次のように近似できる。

$$I \cong \frac{I_0/(1-r)^2}{1 + (\Delta\phi/a)^2} \quad \left(a = \frac{1-r}{\sqrt{r}} \right) \quad (13)$$

多数回反射しながら共振器内部に光がとどまっているような場合を考える。2回の反射での減衰が小さいので、 $1-r \ll 1$ 。この場合も前のように、 m 次のピーク $\phi = \phi_m = 2\pi m$ のまわりで上の近似式を使って計算すると、半値全幅は $2(1-r)$ 、フィネスは $\pi/(1-r)$ と求められる。



ファブリ-ペロー共振器の透過光強度分布

上の近似式は $\phi = 2\pi m$ に単独のピークを持つローレンツ関数である。これは、1往復時間を時間の単位としたとき、周波数 m 、振幅減衰率 a の減衰振動 $f(t) \propto \exp(-at + 2\pi mti)$ のフーリエスペクトル強度になっている。

周波数であらわした f.s.r. の逆数は、反射面の間を光が1往復するのに要する時間である。これを求めるには、面の間隔と屈折率の積を光速度で割ればよい。

エタロン板や干渉フィルターの透過周波数は本来固定されているが、膜による 2 光束干渉の場合と同じく傾けると高周波側へずれる。この性質は微調整に使われる。角度 α ラジアン ($\alpha \ll 1$) だけ傾けると、透過周波数は $1 + \theta^2/2$ 倍になる。直観的には傾けると波長は長くなりそうだが、実際には短くなる。傾けると光が横に逃げてロスが増え分解能が下がる。フィネスの大きいものはその影響が大きいので、少ししか傾けることはできない。

周波数分解能

絶対的な周波数分解能を上げるには、回折格子では大きなものを使うしかない。大雑把に言って、回折格子面の幅を光が通過するのに必要な時間の逆数が回折格子の周波数分解能になるからである。ファブリ-ペロー共振器の場合は、光を内部に閉じ込めておくことのできる時間で周波数分解能が決まるから、材質の選択や加工精度の向上次第でサイズによらず分解能を上げることが可能である。

問題

ファブリ-ペロー共振器（ファブリ-ペロー干渉計）は透過性のある2つの反射鏡を平行に向かい合わせてキャビティを構成したものであり、反射鏡を透過した入射波は内部で繰り返し反射するようになっている。共鳴条件が満たされるときに内部の波の振幅が最大になり、トータルの透過率が最大になる。

反射鏡1から反射鏡2へ進む進行波の複素振幅を u とし、これが1往復後に u' になるとする。往復距離は l 、波の波数は k とし、簡単のため反射鏡の反射係数はともに r ($r > 0$) とする。すると、振幅変化と位相の遅れのため、

$$u' = r^2 e^{-ikl} u \quad (14)$$

となる。波が外から供給されないと、往復にかかる時間 l/c の間に進行波の振幅 $|u|$ は $|u'| = r^2 |u|$ となる。 $0 < r < 1$ であるから、何度も往復する間にキャビティ内の進行波は消えてしまう。

問1 1往復で振幅が10%小さくなるとして、振幅が半分以下になる回数を数値で答えよ。

問2 $0 < 1 - r^2 \ll 1$ とすると、振幅が $1/e$ 倍になる時間 τ は

$$\tau = \frac{l}{c(1 - r^2)} \quad (15)$$

で近似できることを示せ。これはこのキャビティの緩和時間である。

ヒント $(r^2)^n = e[-1]$, $\tau = n(l/c)$, $0 \leq x \ll 1 \Rightarrow \log(1 - x) \cong -x$

反射鏡1からキャビティ内に複素振幅 u_s の進行波を供給すると、往復後の波にこれが加算される。それによって波が減衰しないで一定に保たれるには、 $u' + u_s = u$ となればよい。

問3 u_s を供給することによって $u \neq 0$ が一定に保たれているとき、次の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{u}{u_s} = \frac{1}{1 - r^2 e^{-ikl}} \quad (16)$$

問4 上の式の絶対値の2乗はキャビティ内の進行波強度 I と供給されている波の強度 I_s の比になる。この計算を行なって次の式を導出せよ。ヒント $|z|^2 = z\bar{z}$, $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

$$\frac{I}{I_s} = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 \frac{kl}{2}} \quad (17)$$

上の式に反射鏡 1 と反射鏡 2 の強度透過率 $T_1 = T_2 = 1 - r^2$ を掛けると、この共振器のトータルの強度透過率 T になる。

$$T = \frac{(1 - r^2)^2}{(1 - r^2)^2 + 4r^2 \sin^2 \frac{kl}{2}} \quad (18)$$

問 5 $\sin^2 \frac{kl}{2}$ のゼロ点 $kl = 2\pi m$ (m は整数) で上式は最大値 1 になる。これは m 次の共鳴点である。各共鳴点の近くでは、 $|kl - 2\pi m| \ll 1$ として \sin 関数を $\pm(kl - 2\pi m)$ で近似すると、次のようになることを示せ。これは半値半幅 $W_{H\psi}$ のローレンツ関数である。

$$T = \frac{1}{1 + \left(\frac{kl - 2\pi m}{W_{H\psi}}\right)^2}, \quad W_{H\psi} = \frac{1 - r^2}{r} \cong 1 - r^2 \quad (19)$$

ここで、 r は 1 に非常に近いとした。

ヒント $|x| \ll 1 \Rightarrow \sin(2n\pi + x) = \sin x \cong x$, $\sin((2n + 1)\pi + x) = -\sin x \cong -x$

問 6 角周波数 ω は $\omega = ck$ である。上式は次のようにも書けることを示せ。

$$T = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \Omega_m}{W_{H\omega}}\right)^2}, \quad \Omega_m = \frac{2\pi c}{l} m, \quad W_{H\omega} \cong \frac{1}{\tau} \quad (20)$$

角周波数に対する半値半幅 $W_{H\omega}$ は (15) 式で表される緩和時間の逆数になっている。一般的に成立する周波数分解能と緩和時間の関係の一例である。