

# フーリエ変換とスペクトル

## 目次

1	関数空間	2
1.1	関数のノルムと内積	2
1.2	コーシー-シュワルツの不等式	2
1.3	単位インパルス	3
1.4	フーリエ展開	4
1.5	超関数 (distribution)	5
2	フーリエ変換の性質	6
2.1	スケール変更とシフト	6
2.2	微分	7
2.3	パーセバルの公式	7
2.4	合成積の公式	7
2.5	線形時不変システム	9
3	いろいろな関数のスペクトル	9
3.1	単色波・単振動	9
3.2	インパルス関数	10
3.3	周期関数	10
3.4	楕形関数	10
3.5	矩形関数	11
3.6	ローレンツ型関数	11
3.7	ガウス型関数	12
4	フーリエ変換の相補性と最小波束	12
4.1	関数とスペクトルの広がり	12
4.2	相補性の導出	13
5	付録 — 複素積分	14
5.1	極と留数	14
5.2	複素関数	14
5.3	複素積分と留数	14
5.4	微小円弧での積分	15
5.5	1位の極を通過する経路での主値積分	15
5.6	無限に大きくなる経路	16
5.7	複素積分の実関数の積分への応用	17

# 1 関数空間

## 1.1 関数のノルムと内積

複素数値関数  $f(x)$  の絶対値の 2 乗  $|f(x)|^2$  の面積の正の平方根を  $f(x)$  のノルムといい、 $\|f\|$  であらわす。

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx} \quad (1.1)$$

積分が  $\|f\| = 0$  となるのは、 $x$  のとるに足りない (質量が 0 の) 集合を除いて  $f(x) = 0$  であるような場合である。2 つの複素数値関数  $f(x), g(x)$  の内積  $f \circ g$  は次のように定義する。

$$f \circ g = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx \quad (1.2)$$

$\overline{f(x)}$  は  $f(x)$  の共役複素数であり、 $g \circ f = \overline{f \circ g}$ 、 $\|f\| = \sqrt{f \circ f}$  が成り立つ。  $\lambda$  を複素数とすると、

$$(\overline{\lambda} f) \circ g = f \circ (\lambda g) = \lambda (f \circ g)$$

が成り立つ。

$f \circ g$  が実数である場合に限って  $g \circ f = f \circ g$  が成り立つ。特に、 $f \circ g = 0$  なら  $g \circ f = 0$  である。  $f \circ g = 0$  の場合  $f(x)$  と  $g(x)$  は「直交」しているという。  $f(x)$  と  $g(x)$  が直交している場合は、「三平方の定理」

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \quad (1.3)$$

が成り立つが、一般には

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + f \circ g + g \circ f = \|f\|^2 + \|g\|^2 + f \circ g + \overline{f \circ g} \\ &= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\Re(f \circ g) \end{aligned} \quad (1.4)$$

となる。  $\Re(f \circ g)$  は  $f \circ g$  の実部を取ることを意味する。したがって、(1.3) が成り立っていても、 $f \circ g$  の虚部が 0 でない可能性があるので、 $f(x)$  と  $g(x)$  が直交しているとは限らない。

内積は積分で定義されているので、収束を保証するため、関数は無限遠で充分速く 0 に収束するとする。すると次の等式が成り立つ。

$$\left(i \frac{df}{dx}\right) \circ g = f \circ \left(i \frac{dg}{dx}\right) \quad (1.5)$$

これは部分積分をおこなえば確かめることができる。  $i = \sqrt{-1}$  である。

■練習 2次元の複素数ベクトルで、三平方の定理が成り立っても内積が 0 にならない例をいくつか示せ。

## 1.2 コーシー-シュワルツの不等式

次のコーシー-シュワルツの不等式は重要である。

$$\|f\| \|g\| \geq |f \circ g| \quad (1.6)$$

等号が成り立つのは、 $f(x)$  と  $g(x)$  が 1 次従属、すなわち  $af(x)+bg(x)=0$  となるような複素数  $a, b$  がある場合である。これを示そう。

$f(x)=0$  または  $g(x)=0$  の場合は明らかに等号が成り立つ。 $f(x)$  も  $g(x)$  も 0 ではない場合を考えよう。 $\|f\| \neq 0, \|g\| \neq 0$  であるから、

$$u(x) = \frac{1}{\|f\|} f(x), \quad v(x) = \frac{1}{\|g\|} g(x)$$

とすれば、 $\|u\| = \|v\| = 1$  である。 $t = v \circ u$ ,  $w(x) = u(x) - tv(x)$  とすれば、 $v \circ w = v \circ u - t = 0$  となるので、 $w(x)$  と  $tv(x)$  は直交していて、

$$u(x) = tv(x) + w(x)$$

であるので、(1.3)を適用することができ、

$$\|u\|^2 = |t|^2 \|v(x)\|^2 + \|w\|^2, \quad \therefore 1 \geq |t| = |v \circ u|$$

これに  $\|f\| \|g\|$  を掛ければ(1.6)になる。等号が成り立つ場合は  $w(x)=0$ , すなわち  $u(x) = tv(x)$  である。これは  $f(x)$  と  $g(x)$  が 1 次従属な場合である。

### 1.3 単位インパルス

ディラックのデルタ関数  $\delta(x)$  は、点  $x=0$  に集中した面積 1 の関数である。幅が限りなく小さいのに面積が 1 であるので、高さは限りなく高い。 $\delta(x)$  を横に  $\xi$  だけずらして  $\delta_\xi(x)$  とする。すなわち、

$$\delta_\xi(x) = \delta(x - \xi). \tag{1.7}$$

これは点  $x = \xi$  に集中していて面積 1 である。このような関数を単位インパルスという。

$\delta_\xi(x)$  と任意の関数  $f(x)$  の内積は関数値  $f(\xi)$  になる。

$$\delta_\xi \circ f = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) f(x) dx = f(\xi). \tag{1.8}$$

特に、単位インパルスどうしの内積は次のようになる。

$$\delta_\xi \circ \delta_\eta = \delta_\eta(\xi) = \delta(\xi - \eta) \tag{1.9}$$

$\xi \neq \eta$  ならこれはゼロであり、 $\delta_\xi$  と  $\delta_\eta$  は「直交」していることになる。内積を  $\xi$  の関数として見ると、それは  $\xi = \eta$  に集中していて面積は 1 である。この意味で  $\delta_\xi$  は「規格化」されている。

$f(\xi)$  と単位インパルス  $\delta_\xi(x)$  の積の  $\xi$  による総和 ( $\xi$  は連続だから積分になる) は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\xi(x) f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) f(\xi) d\xi = f(x). \tag{1.10}$$

このように、 $\delta_\xi$  から任意の関数が再構成されることを指して「完全」という。そこで、 $\delta_\xi$  は全体として「完全正規直交基底」を成しているという。 $f(\xi)$  を  $\delta_\xi(x')$  と置いてみると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\xi(x) \delta_\xi(x') d\xi = \delta(x - x'). \tag{1.11}$$

これも「完全性」という。

$\delta_\xi$  は自明な正規直交基底であるが、次に、他の正規直交基底であるフーリエ関数系について考える。

## 1.4 フーリエ展開

$x \rightarrow \pm\infty$  で「おとなしい」任意の関数  $f(x)$  に対して、次のフーリエ (Fourier) の積分公式が成り立つ。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \exp(ixy) = f(0). \quad (1.12)$$

積分の順序を変えて次のように書き直してみる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixy) dy \right] f(x) dx = f(0).$$

これを式(1.8)と比較すれば、 $\left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixy) dy \right]$  は  $\delta(x)$  に等しいことがわかる。すなわち、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ixy) dy = \delta(x). \quad (1.13)$$

$\exp(ikx)/\sqrt{2\pi}$  を  $G_k(x)$  と書き、 $G_k$  と  $G_{k'}$  の内積を式(1.13)を使って計算すると、

$$\begin{aligned} G_k(x) &= \frac{\exp(ikx)}{\sqrt{2\pi}}. \\ G_k \circ G_{k'} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i(k' - k)x) dx \\ &= \delta(k' - k). \end{aligned}$$

よって、 $G_k$  は  $\delta_\xi$  と同様の正規直交系になっている。これをフーリエ関数系と呼ぶ。次のように、 $G_k$  は完全でもある。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x) \overline{G_k(x')} dk &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik(x-x')) dk \\ &= \delta(x-x'). \end{aligned} \quad (1.14)$$

式(1.14)から次の反転公式が導かれる(フーリエの積分公式から直接出す方が早い)。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x) [G_k \circ f] dk &= \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G_k(x')} f(x') dx' dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x) \overline{G_k(x')} dk \right] f(x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x') f(x') dx' \\ &= f(x). \end{aligned} \quad (1.15)$$

$f(x)$  の  $G_k$  成分  $G_k \circ f$  をフーリエ成分と呼び、 $\tilde{f}(k)$  と書く。

$$\tilde{f}(k) = G_k \circ f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) f(x) dx \quad (1.16)$$

反転公式(1.15)は次のようにも書ける。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_k(x) \tilde{f}(k) dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) \tilde{f}(k) dk = \overline{G_x} \circ \tilde{f}. \quad (1.17)$$

$f(x)$  から  $\tilde{f}(k)$  への変換はフーリエ展開と言ったり、スペクトル分解と言ったりする。 $f(x)$  から  $\tilde{f}(k)$  への変換とその逆の変換の一方をフーリエ変換といい、もう一方を逆フーリエ変換というが、どちらがどうかはどうでもよい。

■練習 フーリエ変換を続けて2回おこなうと,

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{f}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-ikx) \tilde{f}(k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-ikx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp(-ikx') f(x') \\ &= f(-x)\end{aligned}$$

となることを示せ.

## 1.5 超関数 (distribution)

### 1.5.1 線形汎関数

複素数値関数  $f(x)$  と  $\varphi(x)$  の積の定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad (1.18)$$

を考えよう. この積分の値は複素数になるが,  $f(x)$  を固定し  $\varphi(x)$  をいろいろな関数に変えたとこの積分の値は変化する. したがって, この積分を複素数値関数  $\varphi(x)$  から複素数への変換と見ることができる. 単なる掛け算と積分の線形性を考えれば, この変換が線形であることは自明である.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(a\varphi(x) + b\psi(x))dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi(x)dx$$

関数  $\varphi(x)$  から複素数へ線形変換を「線形汎関数」という. たとえば,  $\varphi(x)$  から  $\varphi(0)$  への変換や,  $\varphi(x)$  から  $\varphi'(0)$  への変換も線形汎関数である. しかし, これらは(1.18)のように積分を使って書き表すことはできない. そのため, 線形汎関数を  $\langle f, \varphi \rangle$  のように書くことにする. (1.18)で表される場合は, 同じ  $f$  を普通の関数の意味にも汎関数の意味にも使って同一視する.

### 1.5.2 関数と超関数

$\varphi(x)$  にいろいろな条件を付けてある程度狭い関数空間に閉じ込めるようにすると, 線形汎関数に微分やフーリエ変換のような操作をかなり自由に行うことができる. これを「超関数 (distribution)」と呼ぶ. この条件は,  $\varphi(x)$  が無限回微分可能であること, および,  $\varphi(x)$  の任意階微分が  $|x| \rightarrow \infty$  において  $x^{-1}, x^{-2}, \dots$  よりも速く 0 に収束することである. このような条件のもとで, 普通の関数の微分の超関数を計算してみると,

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\langle f, \varphi' \rangle$$

よって, 超関数の微分を

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle, \quad \langle f'', \varphi \rangle = \langle f, \varphi'' \rangle, \quad \langle f''', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi''' \rangle, \quad \dots \quad (1.19)$$

と定義する. これによって,  $f(x)$  が普通の関数としては微分可能でない場合でも, 超関数として微分することができる. たとえば, デルタ関数については,  $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$  であるから,

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0), \quad \langle \delta'', \varphi \rangle = \varphi''(0), \quad \langle \delta''', \varphi \rangle = -\varphi'''(0), \quad \dots$$

次に、 $f(x)$  のフーリエ変換  $\tilde{f}(k)$  の超関数を計算しよう (変数は  $k$ )。

$$\begin{aligned}\langle \tilde{f}(k), \varphi(k) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2\pi}} f(x) \varphi(k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2\pi}} \varphi(k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\exp(-ikx)}{\sqrt{2\pi}} \varphi(k)\end{aligned}$$

$\tilde{\varphi}(k)$  は  $\varphi(k)$  のフーリエ変換である。そこで、任意の超関数のフーリエ変換は次のように定義する。

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle \quad (1.20)$$

### 1.5.3 関数列の収束

任意の超関数に対して、それに収束するような普通の関数の列を作ることができる。たとえば、

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \exp(-nx^2), \quad n = 1, 2, \dots$$

とし、変数変換  $x = x'/\sqrt{n}$  によって積分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x'^2) dx' = 1$$

これはよく知られたガウス積分である。また、 $x \neq 0$  なら、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (x \neq 0)$$

すなわち、 $f_n(x)$  は面積 1 を保ちながら  $x = 0$  以外で 0 に収束する。このような関数列はデルタ関数に収束する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x)$$

$f_n(ax)$  の面積は、置換積分によって

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(ax) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x') \frac{dx'}{a} = \frac{1}{a}$$

となるから、 $f_n(ax)$  は  $\delta(x)/a$  に収束する。そのため、

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x) \quad (1.21)$$

である。

## 2 フーリエ変換の性質

### 2.1 スケール変更とシフト

$W > 0$  とし、 $f(\frac{x}{W})$  のフーリエ変換を計算すると、簡単な置換積分によって、

$$\widehat{f\left(\frac{x}{W}\right)} = W \tilde{f}(Wk). \quad (2.1)$$

したがって、 $f(x)$  の横幅を拡大すると  $\tilde{f}(k)$  の横幅は同じ割合で縮小する。このとき副作用として  $\tilde{f}(k)$  は縦に拡大する。これは変数のスケール変換である。

$f(x-D)$  のフーリエ変換を計算すると、

$$\widetilde{f(x-D)} = \exp(-ikD)\tilde{f}(k). \quad (2.2)$$

したがって、 $f(x)$  を横にずらすと  $\tilde{f}(k)$  にはこのずれを振動数とする振動が生じる。これは変数のシフトである。

反対に、 $\exp(iVx)f(x)$  のフーリエ変換を計算すると、

$$\widetilde{e^{iVx}f(x)} = \tilde{f}(k-V). \quad (2.3)$$

$\exp(iVx)$  をラジオ放送の「搬送波」と考えると、これは信号による変調にあたる。

## 2.2 微分

$f(x), f'(x), \dots, f^{(M)}(x)$  がみな可積分関数であれば、 $f(x), f'(x), \dots, f^{(M-1)}(x)$  は  $x \rightarrow \pm\infty$  においてゼロに近づくことが知られている。この場合、 $f^{(M)}(x)$  のフーリエ変換を部分積分で計算することができ、

$$\widetilde{f^{(M)}(x)} = (ik)^M \tilde{f}(k). \quad (2.4)$$

また、 $x^M f(x)$  が可積分であれば、

$$\widetilde{x^M f(x)} = i^M \tilde{f}^{(M)}(k). \quad (2.5)$$

## 2.3 パーセバルの公式

フーリエ変換は正規直交基底の変換であるから「ユニタリー変換」であり内積を保存する。そこで次の Parseval-Plancherel の公式が成り立つ（もちろん積分が収束するとしての話）。

$$\begin{aligned} f \circ g &= \tilde{f} \circ \tilde{g}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\tilde{f}(k)}\tilde{g}(k)dk. \end{aligned} \quad (2.6)$$

特に、 $g=f$  とおくと、

$$\|f\| = \|\tilde{f}\|$$

## 2.4 合成積の公式

$f(x)$  を横に  $Y$  だけずらして縦に  $g(Y)$  倍に拡大して得られる  $f(x-Y)g(Y)$  を  $Y$  に関して足し合わせると  $x$  の関数になる。これを関数の**合成積** (convolution) といい、 $(f * g)$  と書く。

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-Y)g(Y)dY. \quad (2.7)$$

$f(X)$  に単位インパルス  $\delta_{x-Y}(X) = \delta(X - (x - Y))$  を作用させれば、上式の  $f(x - Y)$  が

$$f(x - Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(X)\delta(X - (x - Y))dX$$

のように得られるから、 $X$ - $Y$  平面全体に渡る積分

$$(f * g)(x) = \iint dX dY f(X)g(Y)\delta(X+Y-x) \quad (2.8)$$

で合成積を表すことができる。 $f(X)$ と $g(Y)$ を掛けて作った2変数の関数 $f(X)g(Y)$ をテンソル積という。合成積はテンソル積を $X$ - $Y$ 平面の直線 $X+Y=x$ ( $x$ を定数とする)の上で積分することによって変数を減らしたものである。

2変数関数 $f(X)g(Y)$ のグラフを $X$ - $Y$ 平面で $X$ 方向に $-a$ だけずらすと $f(X+a)g(Y)$ になる。これを直線 $X+Y=x$ の上で積分するのは、関数をずらす代わりに直線をずらして $X+Y=x+a$ とし、その上で積分するのと同じである。したがって、 $f(x)$ を $f(x+a)$ に変えると合成積は $(f * g)(x+a)$ になる。 $Y$ 方向にずらす場合も同じことになる。すなわち、

$$(f(x+a) * g(x))(x) = (f(x) * g(x+a))(x) = (f(x) * g(x))(x+a) \quad (2.9)$$

(2.8)を使って3つの関数の合成積 $((f * g) * h)(x) = \int (f * g)(x-Z)h(Z)dZ$ を計算してみよう。

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= \iint dX' dZ \left( \iint dX dY f(X)g(Y)\delta(X+Y-X') \right) h(Z)\delta(X'+Z-x) \\ &= \iiint dX dY dZ f(X)g(Y)h(Z) \int dX' \delta(X+Y-X')\delta(X'+Z-x) \\ &= \iiint dX dY dZ f(X)g(Y)h(Z)\delta(X+Y+Z-x) \end{aligned}$$

となる。よって結合則 $((f * g) * h) = (f * (g * h))$ が成り立つ。交換則 $(f * g) = (g * f)$ が成り立つのは(2.8)を見るだけでわかる。また、(2.8)は $f$ と $g$ の両方について線形である。これは双線形という。

式(2.8)を使って $(f * g)$ のフーリエ成分を計算してみる。

$$\begin{aligned} \widetilde{(f * g)}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \exp(-ikx) \iint dX dY f(X)g(Y)\delta(X+Y-x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint dX dY \exp(-ik(X+Y))f(X)g(Y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dX \exp(-ikX)f(X) \int dY \exp(-ikY)g(Y) \\ \therefore \widetilde{(f * g)}(k) &= \sqrt{2\pi} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k). \end{aligned} \quad (2.10)$$

すなわち、合成積のフーリエ変換はフーリエ変換の積であらわせる。フーリエ逆変換に関しても同様の計算ができ、積のフーリエ変換はフーリエ変換の合成積であらわせることがわかる。

$$\sqrt{2\pi} \widetilde{(f(x)g(x))}(k) = (\tilde{f} * \tilde{g})(k) \quad (2.11)$$

■練習  $f(x) = \exp(-x^2/2)$ と $g(x) = \exp(-x^2/2)$ の合成積を直接計算せよ。また、上の公式を使い、フーリエ変換と逆フーリエ変換によって $f(x)$ と $g(x)$ の合成積を求めよ。これらの関数のフーリエ変換については12ページを見よ。



## 2.5 線形時不変システム

インプットとして  $x$  の関数  $f(x)$  を与えたときアウトプット  $g(x)$  が

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)f(x-\xi)d\xi \quad (2.12)$$

のように決まるシステムを線形時不変システム (*linear time-invariant system*) と呼ぶ。システムの応答は関数  $u(\xi)$  が決めている。これは合成積  $(u * f)(x)$  に過ぎないので、アウトプットはインプットに対して線形である。また、 $x$  を  $a$  だけずらすと、合成積は  $(u(x) * f(x+a))(x) = g(x+a)$  となるから、 $x$  の原点をどこに取ってもインプットとアウトプットの関係は不変である。

多くの単純な物理系を線形時不変システムとして扱うことができる。たとえば、 $x$  を時刻とし、 $\xi < 0$  で  $u(\xi) = 0$  とすると、(2.12)の  $u(\xi)f(x-\xi)$  は、インプット  $f(x)$  が何らかの過程を経て  $\xi$  だけ遅れて強さが  $u(\xi)$  倍になったものであり、複数のこのような過程が並行して起こっていて、それらの総和がアウトプットされていると考えることができる。

インプットを  $f(x) = \delta(x)$  とした場合、(2.12)から、アウトプットは  $g(x) = u(x)$  になることがわかる。よって、 $u(x)$  はシステムのインパルス応答であると言える。また、単一スペクトルの関数  $\exp(ikx)$  をインプットにすると、

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)\exp(ik(x-\xi))d\xi = \exp(ikx) \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)\exp(-ik\xi)d\xi \\ \therefore g(x) &= \tilde{u}(k)\exp(ikx) \end{aligned}$$

したがって、インパルス応答のフーリエ変換は周波数応答である。

■練習 インパルス応答が、 $x < 0$  のとき  $u(x) = 0$ 、 $x \geq 0$  のとき  $u(x) = \exp(-\gamma x)$  である線形時不変システムを考える。周波数応答  $\tilde{u}(k)$  を計算し、その実部と虚部のグラフを描け ( $k/\gamma$  を横軸にするとよい)。

## 3 いろいろな関数のスペクトル

### 3.1 単色波・単振動

$$\exp(ik_0x) = \sqrt{2\pi}G_{k_0}(x), \quad G_k \circ G_{k_0} = \delta(k - k_0)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \widetilde{\exp(ik_0x)} &= \sqrt{2\pi}\delta(k - k_0), & \widetilde{\exp(-ik_0x)} &= \sqrt{2\pi}\delta(k + k_0), \\ \widetilde{\cos(k_0x)} &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\delta(k - k_0) + \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\delta(k + k_0), & \widetilde{\sin(k_0x)} &= -\frac{i\sqrt{2\pi}}{2}\delta(k - k_0) + \frac{i\sqrt{2\pi}}{2}\delta(k + k_0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

当然であるが、これらの関数のスペクトルは波数  $k = \pm k_0$  に集中している。

### 3.2 インパルス関数

式(1.13)から

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} G_k(x) dk, \quad \therefore \tilde{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.2)$$

これと,  $\delta_\xi(x) = \delta(x - \xi)$ , および公式(2.2)より,

$$\tilde{\delta}_\xi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-ik\xi), \quad \therefore |\tilde{\delta}_\xi(k)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.3)$$

インパルス関数は全ての波数成分を同じ強さで持っている.

### 3.3 周期関数

周期  $L$  の周期関数は  $2\pi/L$  の整数倍の波数のフーリエ成分に展開できる. すなわち,  $f(x)$  を周期  $L$  の関数とし,  $K = 2\pi/L$  とすると,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(iKn x), \quad c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \exp(-iKn x) f(x) dx, \quad K = \frac{2\pi}{L} \quad (3.4)$$

基本の波数  $K$  の整数倍のところのみ制限されているので, このスペクトルは  $k$  を変数とするインパルス関数  $a_n \delta(k - Kn) = a_n \delta_{Kn}(k)$  の集まりと考えることができる. 実際,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) \delta(k - Kn) dk = \exp(iKn x)$$

と(3.4)から,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) \delta(k - Kn) dk = \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikx) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(k - Kn)$$

となるので,  $a_n = \sqrt{2\pi} c_n$  とおけば,

$$\tilde{f}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(k - Kn), \quad a_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \exp(-iKn x) f(x) dx, \quad K = \frac{2\pi}{L} \quad (3.5)$$

### 3.4 楕円関数

単位インパルスの和でできた周期  $L$  の関数を考える. グラフは楕(くし)を歯を上にして置いたものに似ている.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - Ln)$$

この関数は  $x=0, x=\pm L, x=\pm 2L, \dots$  に集中している. フーリエ展開の積分範囲は  $[-L/2, L/2]$  と取ればよいが, この範囲には  $n=0$  のインパルス  $\delta(x)$  しか無い. よって, (3.5)から,

$$\tilde{f}(k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k - Kn), \quad K = \frac{2\pi}{L}, \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - Ln) \quad (3.6)$$

楕形の関数のスペクトルも楕形であり、それらの周期の積は  $KL = 2\pi$  である。次のように、これをより覚えやすく修正することもできる。

$$f(x) = \sqrt{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - Ln), \quad KL = 2\pi \implies \tilde{f}(k) = \sqrt{K} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k - Kn) \quad (3.7)$$

$L = 1$  とし、(3.4)を使って上と同じことをすれば、次のような基本的な式も得られる。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i2\pi nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi nx) \quad (3.8)$$

(3.8)に一般の関数  $f(x)$  を掛けて  $x$  で積分すると、印象的な「ポアソンの和公式」になる。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n), \quad \text{ただし } F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi vx) f(x) dx \quad (3.9)$$

### 3.5 矩形関数

矩形関数  $f_a(x)$  を次のように定義する。

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (-a < x < a \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

$a$  を 0 に近づけると  $x \neq 0$  で 0 になるが、面積は 1 のままなので、デルタ関数に収束するものの例である。sinc 関数  $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$  を使うと、フーリエ変換は

$$\tilde{f}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(ak)$$

$\text{sinc}(ak)$  の最大のピークは  $k = 0$  にあり、その両側の  $k = \pm\pi/a$  で 0 に下がるから、 $\pi/a$  をピークの半幅と考えることができる。 $f_a$  の半幅  $a$  に対して、 $\tilde{f}_a(k)$  の半幅は  $\pi/a$  である。

### 3.6 ローレンツ型関数

$k$  の関数  $\exp(-|k|)$  は左右対称で  $k \rightarrow \pm\infty$  で 0 に収束する。逆フーリエ変換をしてみよう。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|k|) \exp(ikx) dk &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|k| + ikx) dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^{\infty} \exp(-k + ikx) dk + \int_0^{\infty} \exp(-k' - ikx') dk' \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{1}{-1 + ix} - \frac{1}{-1 - ix} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

したがって、

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp(-|k|) \quad (3.10)$$

変数をスケール変換すると、 $a > 0$  の場合、

$$\frac{a^2}{a^2 + x^2} = a \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp(-a|k|) \quad (3.11)$$

左辺の関数はローレンツ型である。この関数のフーリエ変換を積分で求めるには複素積分を使う必要がある。しかし、ここでは逆変換の計算によってフーリエ変換の確認ができています。

### 3.7 ガウス型関数

ガウス型関数は  $f(x) = \exp(-ax^2)$  の形のものである ( $a > 0$ ). 次の積分はよく知られている.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-ax^2) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (3.12)$$

フーリエ変換を計算しよう.

$$\tilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) \exp(-ikx) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 - ikx) dx$$

括弧の中を  $-a(x-b)^2 + c$  の形にすれば,  $\exp(-a(x-b)^2)$  の積分を行えばよいことになる.

$$\tilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right) I, \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-a\left(x + \frac{ik}{2a}\right)^2\right) dx = \int_{-\infty+ik/2a}^{\infty+ik/2a} \exp(-az^2) dz$$

この積分は複素平面の直線  $\Im z = k/2a$  に沿って行うものであるが, 積分路を実軸上に移動しても積分値は変わらない. なぜなら,  $z$  の実部と虚部を  $x, y$  とすると,

$$|\exp(-az^2)| = \exp(-ax^2 + ay^2)$$

より,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \exp(-az^2) = 0$  となり, しかも  $\exp(-az^2)$  は複素平面の有限領域で正則だからである. このような複素積分については, 後の付録で説明している. 以上より,

$$\widetilde{\exp(-ax^2)} = \sqrt{\frac{1}{2a}} \exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right) \quad (3.13)$$

ここで  $c$  をパラメータとする  $x$  の関数  $F(c; x)$  を

$$F(c; x) = \frac{1}{\sqrt{c\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2c^2}\right) \quad (3.14)$$

と定義すると, ノルムとフーリエ変換について, 次のようなシンプルな関係が得られる.

$$\|F(c; x)\| = 1, \quad \widetilde{F(c; x)} = F(c^{-1}; k) \quad (3.15)$$

■練習 (3.12)の左端の積分から右端の積分を求める方法を2通り考えよ.

■練習  $x$  の関数  $F(c; x)$  のグラフの変曲点を求めよ.

## 4 フーリエ変換の相補性と最小波束

### 4.1 関数とスペクトルの広がり

(3.14)の  $F(c; x)$  に(3.12)を適用すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(c; x)|^2 dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x |F(c; x)|^2 dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |F(c; x)|^2 dx = \frac{c^2}{2} \quad (4.1)$$

これらと(3.15)によれば、 $|F(c;x)|^2$  は期待値 0, 標準偏差  $\sigma_x = c/\sqrt{2}$  の正規分布函数,  $\widehat{F(c;x)}$  は期待値 0, 標準偏差  $\sigma_k = 1/(\sqrt{2}c)$  の正規分布函数になっている. 標準偏差  $\sigma$  の正規分布では  $-\sigma < x < \sigma$  の確率は約 68 パーセントであるから,  $F(c;x)$  のパワーの 68 パーセントが  $\pm\sigma_k$  の間のスペクトル領域に集中していることになる.

ガウス型ではない関数についても,  $\sigma_x$  と  $\sigma_k$  を上と同様に定義することができ, それぞれ関数と関数のスペクトルの広がり幅をあらわす. ノルムが 1 の一般の複素数値函数  $u(x)$  では,  $\mu_x, \mu_k, \sigma_x > 0, \sigma_k > 0$  を

$$\begin{aligned}\mu_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x |u(x)|^2 dx, & \mu_k &= \int_{-\infty}^{\infty} k |\tilde{u}(k)|^2 dk \\ \sigma_x^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 |u(x)|^2 dx, & \sigma_k^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (k - \mu_k)^2 |\tilde{u}(k)|^2 dk\end{aligned}\quad (4.2)$$

としたとき,

$$\sigma_x \sigma_k \geq \frac{1}{2} \quad (4.3)$$

が成り立つことを示すことができる, これはフーリエ変換の不確定性関係, あるいは相補性と呼ばれる. 上の等号は  $u(x)$  が次の形である場合にのみ成り立つ.

$$u(x) = F(c; x - x_0) \exp(i k_0 x) \quad (4.4)$$

このとき,  $\mu_x = x_0, \mu_k = k_0, \sigma_x = c/\sqrt{2}, \sigma_k = 1/(\sqrt{2}c)$  となる. このようなものを「最小波束」と呼ぶ.

## 4.2 相補性の導出

文字の節約のため,

$$\hat{k} = -i \frac{d}{dx}$$

とする. これは微分演算子である. 関数は無限遠で 0 になるとする. すると, 部分積分によって

$$(\hat{k}f(x)) \circ g(x) = f(x) \circ \hat{k}g(x)$$

$i$  が付いているため符号は変わらない. このような  $\hat{k}$  の性質をエルミート性という.

(4.2)式で使われている記号と

$$\Delta x = x - \mu_x, \quad \Delta k = k - \mu_k, \quad \Delta \hat{k} = \hat{k} - \mu_k$$

を使おう. (2.4)とパーセバルの公式(2.6)などから,

$$\begin{aligned}\widehat{\hat{k}u(x)} &= k \tilde{u}(k), \\ \mu_k &= \tilde{u}(k) \circ k \tilde{u}(k) = u(x) \circ \hat{k}u(x), \quad \mu_x = u(x) \circ x u(x), \\ \sigma_k^2 &= (\Delta k \tilde{u}(k)) \circ (\Delta k \tilde{u}(k)) = (\Delta \hat{k}u(x)) \circ (\Delta \hat{k}u(x)), \quad \sigma_x^2 = (\Delta x u(x)) \circ (\Delta x u(x))\end{aligned}$$

$\Delta x u(x)$  と  $\Delta \hat{k}u(x)$  にコーシー-シュワルツの不等式を適用する.  $A = \Delta x u \circ \Delta \hat{k}u$  とおくと,

$$\sigma_x \sigma_k \geq |A|, \quad A = \Delta x u \circ \Delta \hat{k}u$$

$A$  の虚部は次のようになる.

$$\Im A = \frac{1}{2i} (A - \bar{A}) = \frac{1}{2i} (\Delta x u \circ \Delta \hat{k}u - \Delta \hat{k}u \circ \Delta x u) = \frac{1}{2i} (u \circ (\Delta x \Delta \hat{k} - \Delta \hat{k} \Delta x) u)$$

ここで  $\hat{k}$  のエルミート性を使っている.  $\Delta x = x - \mu_x$  と  $\Delta \hat{k} = \hat{k} - \mu_k$  を入れてさらに計算すると,

$$\Im A = \frac{1}{2i} (u \circ (x\hat{k} - \hat{k}x)u) = \frac{1}{2i} i = \frac{1}{2}$$

ここでは  $\hat{k}xu = -i \frac{d}{dx}xu$  を計算した. 複素数の絶対値は虚部の絶対値を下回らないから,

$$\sigma_x \sigma_k \geq |A| \geq \frac{1}{2}$$

等号がすべて成立するには, まず, コーシー-シュワルツの不等式において,  $t$  を複素数として,  $\Delta xu(x) = t\Delta \hat{k}u(x)$  が成り立たなければならない. さらに  $A$  の実部が 0 であることも必要であるが, それには  $t$  が純虚数であればよい. すなわち  $\lambda$  を実数とすると,  $\Delta xu(x) = i\lambda\Delta \hat{k}u(x)$ . この条件を満たし無限遠で 0 になる  $u(x)$  が最小波束である. その計算は, 1 階微分方程式を解くだけなので容易である. その結果は(4.4)の形になる.

## 5 付録 — 複素積分

### 5.1 極と留数

たとえば,  $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$  は点  $x=1$  で絶対値が無限大に発散する. これは  $x$  が複素数の値をとるとしても同じである. このような点を「極」という.  $(x-1)f(x)$  は  $x=1$  では発散しないし, いくらでも微分することができる. そこで,  $x=1$  でのテーラー展開を求めると,  $(x-1)f(x) = \frac{1}{3} - \frac{x-1}{9} + \frac{(x-1)^2}{27} - \frac{(x-1)^3}{81} + \dots$  となる. したがって,

$$f(x) = \frac{1/3}{x-1} - \frac{1}{9} + \frac{(x-1)}{27} - \frac{(x-1)^2}{81} + \dots$$

この展開はローラン展開という. 一般に, 極  $a$  でのローラン展開の  $(x-a)^{-1}$  の係数を極  $a$  の「留数」という. 上の例では, 極 1 の留数は  $1/3$  である.

一般にはさらに低次の項があってもよい. 極  $a$  でのローラン展開の  $(x-a)^{-n}$  の項が最低次の項であれば,  $a$  は  $n$  位の極であるという. 1 位の極では,  $f(x)$  に  $x-a$  をかけると発散が治まり, 極限  $\lim_{x \rightarrow a} (x-a)f(x)$  によって留数が得られる. 2 位以上の極でも留数は  $-1$  次項の係数であるが, 求め方はもっと複雑だろう.

### 5.2 複素関数

独立変数  $x$  や式の係数が複素数である場合でも, 上のことは同じである. 極は複素平面上の点であり, 実軸上にあるとは限らない. 留数も実数であるとは限らない. 普通, 複素変数は  $x$  ではなく  $z$  であらわす. 複素関数の微分係数は, 実数の関数と同様,

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (5.1)$$

で定義される.  $h$  は複素平面のあらゆる方向からゼロに近づく. どの方向から来ても同じ極限值が与えられる場合,  $z$  において微分可能である. ある領域全体で微分可能ならその領域で正則であるという. 実数関数の微分や無限級数に関する公式のほとんどは複素関数にも使える.

### 5.3 複素積分と留数

複素平面上の連続曲線  $C$  にそった積分  $\int_C f(z)dz$  を考える. 曲線上の点  $z$  を実数の媒介変数  $s$  の関数と考えると, 積分は具体的に  $\int_{s_1}^{s_2} f(z) \frac{dz}{ds} ds$  と書ける.  $s_1$  と  $s_2$  は  $s$  の初期値と終了値である.

$f(z) = (z-a)^m$  を点  $a$  を取り囲んで一周する閉曲線上で反時計回りに積分する.  $z-a$  を  $\zeta$  と書く.  $\frac{d}{ds}[\zeta^{m+1}] = (m+1)\zeta^m \frac{d\zeta}{ds}$  であるから,  $m \neq -1$  の場合は,  $\int \zeta^m \frac{d\zeta}{ds} ds = \frac{1}{m+1} \zeta^{m+1}$  となる. この場合は, 一周して元に戻ると  $\zeta(s_2) = \zeta(s_1)$  であるから, 周回積分はゼロである.

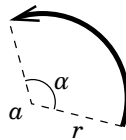
$m = -1$  の場合は, 不定積分は上のような簡単な関数にはならない.  $\zeta$  を偏角  $\theta$  と絶対値  $r$  で  $\zeta = re^{i\theta}$  とあらわすと,  $\frac{d\zeta}{ds} = ire^{i\theta} \frac{d\theta}{ds} + e^{i\theta} \frac{dr}{ds}$  となるから,  $\zeta^{-1} \frac{d\zeta}{ds} = i \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{r} \frac{dr}{ds}$  であり, 次の不定積分が得られる.

$$\int \zeta^{-1} \frac{d\zeta}{ds} ds = i\theta + \log r \quad (5.2)$$

これを使って一周分の積分を求める. 積分路を一周すると  $r$  は元に戻るので第 2 項は消える. しかし,  $\theta$  は一周で  $2\pi$  だけ増加するので, 第 1 項は消えず  $2i\pi$  が残る.

以上の議論から, 極の回りを反時計回りに一周する経路での積分は, その極の留数の  $2i\pi$  倍であることがわかる. もし積分経路の内側に複数の極があるなら, これらすべての極の留数の和をとって  $2i\pi$  倍すれば積分値が得られる.

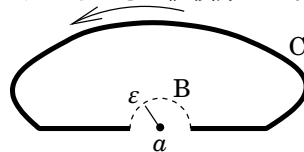
#### 5.4 微小円弧での積分



1 位の極  $a$  を中心とする円弧上での積分を考え, 円弧の半径を小さくしていったときの極限を求める. 円弧の半径を小さくしていくと,  $\zeta^{-1}$  の項が大きくなって主要な項となり, 他の項からの寄与は消えてしまう. したがって, 不定積分 (5.2) から積分値を求めることができる. 円弧が張る角度を  $\alpha$  とすると, 積分路の始点と終点で  $r$  は変わらないが,  $\theta$  は  $\alpha$  だけ変化するので, 積分値は留数の  $i\alpha$  倍となる. 経路の向きが時計回りの場合は負号を付ける.

#### 5.5 1 位の極を通過する経路での主値積分

積分経路の上に 1 位の極があるとする. 極からの距離が  $\varepsilon (\varepsilon > 0)$  以内の部分を除いて積分を行った後で,  $\varepsilon$  をゼロに持っていく. このようにして得られるものを主値積分という.

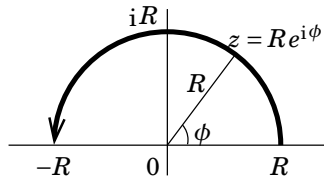


1 位の極  $a$  を通る閉じた反時計回りの積分経路を考え, 内側と経路上には他の特異点はないとし, 極の近くでは経路は直線であると考え. 極からの距離が  $\varepsilon$  以内の部分を取り除いた残りの部分を経路 C とする. 経路の切れている部分を図の点線で示すように半円弧 B でつないでみる. 極が外側に来ようにする. この経路 B は極  $a$  から見て時計回りであり, 円弧の張る角度は  $\pi$  であり, 半径  $\varepsilon$  は小さいので, そこでの積分値は  $-i\pi R_a$  である. ただし,  $R_a$  は  $a$  における留数. B と C よりなる閉じた経路の上にもその内部にも特異点はないから, 全経路での積分値はゼロになる. そこで, 経路 C での積分値は  $i\pi R_a$  でなければならない. これが求める積分値である.

経路が極のところで折れ曲がっている場合も同様に考えて計算すると,  $i\alpha R_a$  となる. ただし,  $\alpha$  は折れ曲

がりの角度である。

## 5.6 無限に大きくなる経路



実軸上の  $R$  ( $R > 0$ ) から  $iR$  を通って  $-R$  に至る半円  $C$  上での積分  $I_R = \int_C f(z) dz$  が  $R$  を大きくした極限でどうなるかを考える。積分経路は  $R$  に比例して長くなるが、関数値が原点からの距離と共に小さくなれば、積分値が有限にとどまるかもしれない。

まず、 $\left| \int_\alpha^\beta F(x) dx \right| \leq \int_\alpha^\beta |F(x)| dx$  を示す。ただし、 $\beta > \alpha$ 、 $F(x)$  は実変数の複素数値関数。 $A = \int_\alpha^\beta F(x) dx$ 、 $\alpha = \bar{A}/|A|$  と置く。実部をとる操作を  $\Re$  であらわす。 $|A|$  は実数であることと、 $|\alpha| = 1$  を使って、 $\left| \int_\alpha^\beta F(x) dx \right| = |A| = \Re[|A|] = \Re[\alpha A] = \Re\left[\int_\alpha^\beta \alpha F(x) dx\right] = \int_\alpha^\beta \Re[\alpha F(x)] dx \leq \int_\alpha^\beta |\alpha F(x)| dx = \int_\alpha^\beta |F(x)| dx$ 。以上。

手始めに、 $|f(z)|$  が (たかだか)  $R^{-2}$  の程度であるとしよう。これは  $|f(z)| \leq MR^{-2}$  ということである ( $M$  は正の定数)。極表示  $z = Re^{i\phi}$  を使うと、 $dz = iRe^{i\phi} d\phi$  であり、 $\phi$  は  $0$  から  $\pi$  まで動く。したがって、 $I_R = \int_0^\pi f(Re^{i\phi}) iRe^{i\phi} d\phi$  と書ける。これに絶対値の積分の性質を適用し、

$$|I_R| \leq \int_0^\pi |f(Re^{i\phi}) iRe^{i\phi}| d\phi \leq \int_0^\pi MR^{-2} R d\phi = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty)$$

$|i| = 1$ 、 $|e^{i\phi}| = 1$  を使った。上の不等式より、 $I_R$  はゼロに収束する。

次に、 $f(z) = g(z)e^{ikz}$  ( $k > 0$ ) という形の関数を考える。この場合は、 $R \rightarrow +\infty$  のとき、 $C$  上での  $g(z)$  の値が一様にゼロに収束するならば、積分値  $I_R$  はゼロに収束する。これはジョルダンの補題として知られている。

**証明**—  $z$  の極表示  $z = Re^{i\phi} = R(\cos\phi + i\sin\phi)$  と絶対値の積分の性質を使って、

$$|I_R| \leq \int_0^\pi \left| g(Re^{i\phi}) e^{ikR(\cos\phi + i\sin\phi)} iRe^{i\phi} \right| d\phi = R \int_0^\pi |g(Re^{i\phi})| e^{-kR\sin\phi} d\phi$$

$g(z)$  が一様にゼロに近づくということは、 $|g(Re^{i\phi})| \leq \epsilon(R)$  と  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \epsilon(R) = 0$  を満たす  $R$  の関数  $\epsilon(R)$  が存在するというのである。したがって、

$$|I_R| \leq \epsilon(R) R \int_0^\pi e^{-kR\sin\phi} d\phi = 2\epsilon(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-kR\sin\phi} d\phi$$

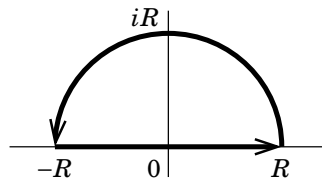
被積分関数は  $\phi = \pi/2$  で折り返して対称であるので、 $\pi/2$  までの積分の 2 倍で求められることを使っている。 $0 \leq \phi \leq \pi/2$  で  $\sin\phi \geq 2\phi/\pi$  であることはたぶん簡単にわかるだろう (たとえばグラフで)。したがって、 $e^{-kR\sin\phi} \leq e^{-2kR\phi/\pi}$  であるから、

$$|I_R| \leq 2\epsilon(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-2kR\phi/\pi} d\phi = \frac{\pi\epsilon(R)}{k} (1 - e^{-kR}) \leq \frac{\pi\epsilon(R)}{k}$$

ここで、最右辺はゼロに収束するので、 $I_R$  もゼロに収束する。—証明おわり



## 5.7 複素積分の実関数の積分への応用



### 5.7.1 ローレンツ型関数

$a > 0$  とし、次の積分を求める。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a dx}{a^2 + x^2}$$

図のような扇形の閉じた経路に沿った  $f(z) = a/(a^2 + z^2)$  の積分を考え、 $R \rightarrow +\infty$  とする。この経路の内部に極  $z = ia$  がある。留数は、 $\lim_{z \rightarrow ia} (z - ia)f(z) = \lim_{z \rightarrow ia} a/(z + ia) = 1/(2i)$  と求められる。これに  $2i\pi$  をかけると、一周分の積分値  $\pi$  が得られる。円弧の部分では  $f(z)$  は  $R^{-2}$  のオーダーであるから、 $R \rightarrow +\infty$  でここでの積分値はゼロに収束する。したがって、残りの線分の部分での積分値は  $\pi$  に収束することがわかる。これが求める積分  $I$  である。

### 5.7.2 sinc 型関数

$a > 0$  とし、次の積分を求める。

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2ix} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{2ix} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{2ix} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{2ix} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax'}}{2ix'} dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{ix} dx \end{aligned}$$

$f(z) = e^{iaz}/iz$  をローレンツ型関数の積分で使ったのと同じ扇形経路で積分する。今度は原点  $z = 0$  に極があり他には無い。 $z = 0$  の留数は  $\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = -i$  である。極は経路の直線部に乗っているため、周回積分は主値積分の意味で留数の  $i\pi$  倍であり、 $\pi$  と求まる。

$g(z) = 1/iz$  とすると、 $f(z) = g(z)e^{iaz}$  という形であり、円弧上では  $|g(z)| = 1/R$  であるから、 $g(z)$  は  $R \rightarrow +\infty$  で一様にゼロに収束する。そこで、ジョルダンの補題によって、円弧部分の積分値もゼロに収束し、直線部分の積分値は全周の積分に等しくなる。したがって求める値は  $\pi$ 。