第 8 回　ポアソン括弧式

理学部　物理科学科　齊藤 国靖

2025 年 6 月 4 日

古典力学におけるポアソン括弧式を導入し，物理量の時間発展や保存量がポアソン括弧式を使ってどの様に表されるかを説明する．特に，ハミルトニアンと保存量のポアソン括弧式は常にゼロであり，量子力学に登場する交換子と同じ役割を果たす点に注目して欲しい．また，ポアソン括弧式の値は正準変換によって不変であることを証明する．

1　ポアソン括弧式

一般化座標と一般化運動量の 2 つの関数 $u(q_i, p_i, t)$, $v(q_i, p_i, t)$ に対し，次の量を導入する．

ポアソン括弧式

$$\{u, v\} \equiv \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i} \tag{1}$$

ここで，右辺の添え字 $i = 1, \ldots, n$ に対してアインシュタインの縮約記法を使っていることに注意しよう．式 (1) の定義により，直ちに

$$\begin{aligned} \{u, u\} &= 0 \ , \\ \{v, u\} &= -\{u, v\} \end{aligned}$$

であることが解る．また，別の関数 $w(q_i, p_i, t)$ を加えて，

$$\{au + bv, w\} = a\{u, w\} + b\{v, w\}$$

であることも示せる．但し，a, b は定数である．また，

$$\{uv, w\} = v\{u, w\} + u\{v, w\}$$

も直接代入することで確かめられる．これらポアソン括弧式の基本的な性質に加えて

ヤコビの恒等式

$$\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} = 0 \tag{2}$$

も便利な関係式である（証明略）．

1.1　交換関係 I

2 つの関数 $u(q_i, p_i, t)$, $v(q_i, p_i, t)$ を具体的に与え，ポアソン括弧式を計算してみよう．まず，

$$u = q_j \ , \qquad v = q_k$$

とした場合，ポアソン括弧式は

$$\{q_j, q_k\} = \frac{\partial q_j}{\partial q_i}\frac{\partial q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial q_j}{\partial p_i}\frac{\partial q_k}{\partial q_i}$$

となる．ここで，一般化座標と一般化運動量は互いに独立なので，

$$\frac{\partial q_k}{\partial p_i} = \frac{\partial q_j}{\partial p_i} = 0$$

である．よって，ポアソン括弧式の右辺の第 1, 2 項はゼロであり，次が成り立つ．

$$\boxed{\{q_j, q_k\} = 0}$$

同様に，

$$u = p_j \ , \qquad v = p_k$$

とした場合，ポアソン括弧式は

$$\{p_j, p_k\} = \frac{\partial p_j}{\partial q_i}\frac{\partial p_k}{\partial p_i} - \frac{\partial p_j}{\partial p_i}\frac{\partial p_k}{\partial q_i}$$

となるが，一般化座標と一般化運動量は互いに独立なので，

$$\frac{\partial p_j}{\partial q_i} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0$$

となる．よって，

$$\boxed{\{p_j, p_k\} = 0}$$

である．つまり，一般化座標同士，一般化運動量同士のポアソン括弧式はゼロであることが解る．

1.2　交換関係 II

次に，

$$u = q_j \ , \qquad v = p_k$$

とした場合，ポアソン括弧式は

$$\{q_j, p_k\} = \frac{\partial q_j}{\partial q_i}\frac{\partial p_k}{\partial p_i} - \frac{\partial q_j}{\partial p_i}\frac{\partial p_k}{\partial q_i} \tag{3}$$

となる．一般化座標と一般化運動量は互いに独立なので，

$$\frac{\partial q_j}{\partial p_i} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0$$

であり，式 (3) の右辺の第 2 項はゼロである．一方，式 (3) の右辺の第 1 項のうち，一般化座標同士の微分と一般化運動量同士の微分はそれぞれ

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} , \qquad \frac{\partial p_k}{\partial p_i} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

である．よって，$i = 1, \ldots, n$ のうち，上記の微分が共にゼロにならないのは $i = j = k$ のときだけである．従って，クロネッカーのデルタを使ってこれを表すと，ポアソン括弧式の右辺第 1 項は

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_i}\frac{\partial p_k}{\partial p_i} = \delta_{jk}$$

となる．なお，添え字 i に対しては和をとっているので，$1, \ldots, n$ までのいずれの値もとれることに注意しよう．以上より，次が成り立つ．

$$\boxed{\{q_j, p_k\} = \delta_{jk} \tag{4}}$$

同様に，

$$u = p_j \ , \qquad v = q_k$$

の場合は

$$\{p_j, q_k\} = \frac{\partial p_j}{\partial q_i}\frac{\partial q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial p_j}{\partial p_i}\frac{\partial q_k}{\partial q_i}$$

であるから，上式の右辺の第 1 項はゼロ，第 2 項は δ_{jk} となり，

$$\boxed{\{p_j, q_k\} = -\delta_{jk}}$$

が成り立つ．もちろん，式 (4) とポアソン括弧式の性質を使って，

$$\begin{aligned} \{p_j, q_k\} &= -\{q_k, p_j\} \\ &= -\delta_{kj} \end{aligned}$$

と考えても同じである．

2　時間発展の表式

関数 $u(q_i, p_i, t)$ の時間に関する全微分

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial u}{\partial t}$$

を考える．上式の右辺の時間微分 $\dot{q}_i, \dot{p}_i$ に正準方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

を代入すると

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

となる．右辺の第 1, 2 項はポアソン括弧式を使って書き直すことができ，次の様に表せる．

ポアソン括弧式による時間発展の表式

$$\frac{du}{dt} = \{u, H\} + \frac{\partial u}{\partial t} \tag{5}$$

ところで，関数 $u(q_i, p_i)$ が時間 t を陽に含まない場合は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

である．このとき，式 (5) は

$$\frac{du}{dt} = \{u, H\} \tag{6}$$

となる．例えば，$u(q_i, p_i) = q_i$ あるいは $u(q_i, p_i) = p_i$ とすると，式 (6) はそれぞれ

ポアソン括弧式による正準方程式

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \ , \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

となる．これはポアソン括弧式を使って正準方程式を書き直したものである[*1]．

また，

$$\{H, H\} = 0$$

なので，$u(q_i, p_i, t) = H$ を式 (5) に代入すると，

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

となる．さらに，ハミルトニアンが時間 t を陽に含まない場合，式 (6) より

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

となる．つまり，エネルギー保存則 $H = \text{const.}$ が得られる．

[*1] 右辺を直接計算しても，正準方程式であることを確かめられる．

3　保存量との関係

関数 $u(q_i, p_i, t)$ が時間的に一定な保存量の場合は

$$\frac{du}{dt} = 0$$

である．このとき，式 (5) より，

$$0 = \{u, H\} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\therefore \{H, u\} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

が成り立つ．さらに，$u(q_i, p_i)$ が時間を陽に含まなければ，次が成り立つ．

保存量の条件

$$\{H, u\} = 0 \tag{7}$$

つまり，ハミルトニアンと保存量のポアソン括弧式はゼロであることが解る[*2]．

ヤコビの恒等式 (2) を使うと，

$$\{H, \{u, v\}\} + \{u, \{v, H\}\} + \{v, \{H, u\}\} = 0 \tag{8}$$

が成り立つ．もし $u(q_i, p_i)$, $v(q_i, p_i)$ が共に時間を陽に含まない保存量であれば，式 (7) より

$$\{H, u\} = \{H, v\} = 0$$

である．よって，式 (8) は

$$\{H, \{u, v\}\} = 0$$

となり，これを保存量に対する**ポアソンの定理**という．

4　正準変換との関係

正準変換によってポアソン括弧式の値はどの様に変化するであろうか．これを説明するため，位相空間内の点を $2n$ 次元ベクトル

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

[*2] 明らかに，保存量は時間に陽に依存しない．

で表そう．また，ハミルトニアン H を一般化座標および一般化運動量で微分したものを

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_n} \\ \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \end{pmatrix}$$

と表す．そこで，$2n \times 2n$ 行列

$$\boldsymbol{J} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & & 0 \\ & \boldsymbol{0} & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \\ -1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & \boldsymbol{0} & \\ 0 & & -1 & & & \end{array}\right)$$

を導入すると，q_i, p_i に対する $2n$ 個の正準方程式は

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \tag{10}$$

と表される（これは代入すれば直ちに確認できる）．

式 (9) と同様に，q_i, p_i を正準変換した新しい変数 Q_i, P_i に対して

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}$$

を導入する．ここで，Q_i, P_i が時間を陽に含まなければ，これらは元の変数 q_i, p_i の関数なので，$\boldsymbol{\zeta}$ の各成分の時間微分は $\boldsymbol{\eta}$ の各成分を介して行われる．つまり，$\boldsymbol{\zeta}$ の i 番目の成分を ζ_i とすると，その時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_i &= \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j}\frac{d\eta_j}{dt} \\ &\equiv M_{ij}\dot{\eta}_j \end{aligned} \tag{11}$$

となる．但し，M_{ij} は $2n \times 2n$ 行列の ij 成分を表し，連続する添え字 $j = 1, \ldots, 2n$ に対してはアインシュタインの縮約記法が適用されている．式 (11) をベクトルと行列の掛け算として書けば

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{\eta}}$$

となる．よって，上式の右辺の $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ に正準方程式 (10) を代入すると

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \tag{12}$$

が得られる．

次に，正準変換の母関数が $F_1(q_i, Q_i, t)$ で与えられた場合，ハミルトニアン H は

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

に変換される（第 7 回参照）．もし母関数 $F_1(q_i, Q_i)$ が時間を陽に含まなければ

$$K = H \tag{13}$$

となり，変換によってハミルトニアンは不変である．一般に，

> 母関数が時間を陽に含まなければ，正準変換後のハミルトニアンは不変である．

このとき，変換後の変数 Q_i, P_i に対する正準方程式は式 (10) と同様に

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\zeta}} &= \boldsymbol{J}\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \\ &= \boldsymbol{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\end{aligned} \tag{14}$$

と表される．但し，式 (13) を用いた．一方，変換後のハミルトニアンは新しい変数 Q_i, P_i の関数であるはずだから，連鎖律により

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \eta_i} &= \frac{\partial H}{\partial \zeta_j}\frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i} \\ &= \frac{\partial H}{\partial \zeta_j}M_{ji}\end{aligned}$$

となる．ここで，M_{ji} は式 (11) にある M_{ij} の添え字を入れ替えたものに等しいから，ベクトルと行列の掛け算で書けば

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}}$$

となる．これを式 (12) に代入すれば

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \tag{15}$$

が得られる．従って，式 (14), (15) を比較すると

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

であることが解る．

行列 $\boldsymbol{J}$ を使うと，ポアソン括弧式 (1) は

$$\{u,v\}_{\boldsymbol{\eta}} = \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}} \tag{17}$$

と書ける．但し，$\{\cdots\}_{\boldsymbol{\eta}}$ は変換前の正準変数による定義であることを表している．実際，

$$\boldsymbol{J}\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial v}{\partial p_n} \\ -\frac{\partial v}{\partial q_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial v}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

なので，式 (17) の右辺は

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}} &= \left(\tfrac{\partial u}{\partial q_1}, \ldots, \tfrac{\partial u}{\partial q_n}, \tfrac{\partial u}{\partial p_1}, \ldots, \tfrac{\partial u}{\partial p_n}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial v}{\partial p_n} \\ -\frac{\partial v}{\partial q_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial v}{\partial q_n} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial u}{\partial q_1}\frac{\partial v}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial q_n}\frac{\partial v}{\partial p_n} - \frac{\partial u}{\partial p_1}\frac{\partial v}{\partial q_1} - \cdots - \frac{\partial u}{\partial p_n}\frac{\partial v}{\partial q_n} \\
&= \frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}
\end{aligned}$$

となり，式 (1) に一致する（アインシュタインの縮約記法を用いた）．正準変換により，二つの関数 $u(q_i,p_i,t), v(q_i,p_i,t)$ が $\boldsymbol{\zeta}$ の関数 $u(Q_i,P_i,t), v(Q_i,P_i,t)$ になるとすると，連鎖律により

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_i} = \frac{\partial u}{\partial \zeta_j}\frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i} = \frac{\partial u}{\partial \zeta_j} M_{ji}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\zeta}}$$

および

$$\frac{\partial v}{\partial \eta_i} = \frac{\partial v}{\partial \zeta_j}\frac{\partial \zeta_j}{\partial \eta_i} = \frac{\partial v}{\partial \zeta_j} M_{ji}$$

$$\therefore \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\zeta}}$$

である．よって，これらを式 (17) に代入すると

$$\begin{aligned}
\{u,v\}_{\boldsymbol{\eta}} &= \left(\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{J}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\zeta}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \\
&= \{u,v\}_{\boldsymbol{\zeta}}
\end{aligned}$$

となる．但し，$\{\cdots\}_{\boldsymbol{\zeta}}$ は正準変換後の変数による定義であることを表しており，途中で式 (16) を用いた．従って，

$$\boxed{\text{正準変換によってポアソン括弧式の値は変わらない.}}$$