第 7 回　正準変換

理学部　物理科学科　齊藤 国靖

2025 年 5 月 29 日

正準変換という変数変換の方法を導入し，その使い方を具体例を挙げて説明する．正準変換は無限小正準変換など今後の内容の基礎となる重要な考え方である．

1　正準変換

正準変数 (q_i, p_i) を新しい変数 (Q_i, P_i) に変換すると，ハミルトニアン $H(q_i, p_i, t)$ は新しいハミルトニアン $K(Q_i, P_i, t)$ に変換される．このとき，

新しい変数の正準方程式

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}\,, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \tag{1}$$

が成り立つ場合，この変数変換のことを**正準変換**という．

1.1　母関数

前回説明した通り，正準方程式は最小作用の原理の帰結である．変換前の変数 q_i, p_i とハミルトニアン $H(q_i, p_i, t)$ による最小作用の原理は

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \{p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)\}\, dt = 0 \tag{2}$$

である．一方，変換後の変数 Q_i, P_i とハミルトニアン $K(Q_i, P_i, t)$ も式 (1) の正準方程式を満たすため，新しい変数による最小作用の原理は

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{P_i \dot{Q}_i - K(Q_i, P_i, t)\right\} dt = 0 \tag{3}$$

である．式 (2) と (3) は共にゼロなので，左辺の被積分関数同士は等しい．但し，被積分関数の添え字 i に対し，アインシュタインの縮約記法が使われていることに注意しよう．また，ラグランジアンには時間に関する導関数 dF/dt の不定性があった様に（第 2 回），一般に作用の被積分関数には不定性がある．式 (2) と (3) の被積分関数にも dF/dt の不定性があり，これらの被積分関数はこの不定性も含めて等しいはずである．つまり，

正準変換前後の関係

$$p_i\dot{q}_i - H(q_i,p_i,t) = P_i\dot{Q}_i - K(Q_i,P_i,t) + \frac{dF}{dt} \tag{4}$$

であり，不定性を表す関数 F のことを正準変換 $(q_i,p_i) \to (Q_i,P_i)$ の**母関数**という．

1.2　正準変換の例 1

正準変換は母関数 F を与えることで決まる．例えば，

$$F = F_1(q_i,Q_i,t)$$

であれば，母関数の時間に関する微分は

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

となる．これを式 (4) に代入して整理すると

$$p_i\dot{q}_i - H = P_i\dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\therefore \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i - \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\right)\dot{Q}_i + \left(K - H - \frac{\partial F_1}{\partial t}\right) = 0$$

$$\therefore \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\right)dq_i - \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\right)dQ_i + \left(K - H - \frac{\partial F_1}{\partial t}\right)dt = 0$$

となる．これが常に成り立つためには，dq_i, dQ_i, dt の各係数はゼロでなければならず，

正準変換 I

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\ , \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\ , \qquad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{5}$$

が得られる．

適当な母関数 $F_1(q_i,Q_i,t)$ を選んで，式 (5) を満たす変数変換 $(q_i,p_i) \to (Q_i,P_i)$ が見つかれば，それは正準変換である．例えば，

$$F_1(q_i,Q_i,t) = q_iQ_i$$

の場合，式 (5) より

$$p_i = Q_i\ , \qquad P_i = -q_i\ , \qquad K = H$$

となる．従って，変数変換 $(q_i,p_i) \to (Q_i,P_i) = (p_i,-q_i)$ は正準変換であり，変換によってハミルトニアンは不変である．

1.3　正準変換の例 2

次に，母関数が

$$F = F_2(q_i, P_i, t) - Q_i P_i$$

であれば，

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} - \dot{Q}_i P_i - Q_i \dot{P}_i$$

なので，これを式 (4) に代入して整理すると

$$p_i\dot{q}_i - H = P_i\dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} - \dot{Q}_i P_i - Q_i\dot{P}_i$$

$$\therefore \left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i + \left(Q_i - \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\right)\dot{P}_i + \left(K - H - \frac{\partial F_2}{\partial t}\right) = 0$$

$$\therefore \left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right)dq_i + \left(Q_i - \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\right)dP_i + \left(K - H - \frac{\partial F_2}{\partial t}\right)dt = 0$$

となる．従って，dq_i, dP_i, dt の各係数はゼロであり，次が得られる．

正準変換 II

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\ , \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\ , \qquad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{6}$$

例えば，

$$F_2(q_i, P_i, t) = f_i(q_1, \ldots, q_n)P_i$$

の場合，式 (6) より，変換後の座標は

$$Q_i = f_i(q_1, \ldots, q_n)$$

となる．これは座標同士の変換であり，**点変換**と呼ばれる．また，$f_i(q_1, \ldots, q_n)$ の関数形は任意なので，次の重要な結論が得られる．

点変換は全て正準変換である．

2　正準変換の応用

2.1　1 次元調和振動子

まず，正準変換 I によって，1 次元調和振動子の運動を調べよう．振動子の質量を m，角振動数を ω とすれば，振動子のハミルトニアンは

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \tag{7}$$

である．そこで，正準変換 I の母関数を

$$F_1(q_i, Q_i, t) \equiv \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot Q$$

とすれば，式 (5) より

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \cot Q \ , \tag{8}$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -\frac{1}{2} m\omega q^2 \frac{\partial}{\partial Q} \cot Q = \frac{1}{2} m\omega q^2 \frac{1}{\sin^2 Q} \ , \tag{9}$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = H \ , \tag{10}$$

が得られる．ここで，式 (9) より

$$q^2 = \frac{2P}{m\omega} \sin^2 Q \tag{11}$$

となり，式 (8) より

$$\begin{aligned} p^2 &= (m\omega)^2 q^2 \cot^2 Q \\ &= (m\omega)^2 \left(\frac{2P}{m\omega} \sin^2 Q \right) \cot^2 Q \\ &= 2m\omega P \cos^2 Q \end{aligned} \tag{12}$$

となる．但し，q^2 に式 (11) を代入した．よって，式 (11), (12) を式 (7) のハミルトニアンに代入し，式 (10) の新しいハミルトニアンを具体的に求めると

$$\begin{aligned} K(Q, P) &= H(q, p) \\ &= \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q \\ &= \omega P \end{aligned} \tag{13}$$

であることが解る．

式 (13) を用いて，新しい変数 Q, P の正準方程式 (1) を書き下すと

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \ , \qquad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0$$

となる．これらは直ちに解くことができ，

$$Q(t) = \omega t + a \ , \qquad P = b$$

が得られる．但し，a, b は定数である．ところで，式 (7) のハミルトニアンは時間に陽に依存しないため，全エネルギー E は一定であり，

$$H(q, p) = E$$

が成り立つ．従って，式 (13) を用いると

$$\omega P = E\ , \qquad \therefore P = \frac{E}{\omega}$$

となる．これより，定数 $b = E/\omega$ であり，式 (11) を使って元の座標系での $q(t)$ を求めると

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \\ &= \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + a) \end{aligned}$$

となる．これは a を初期位相とする単振動を表している．

この例では，式 (13) の様に新しいハミルトニアンを変換後の座標 Q に依らない形 $K(P)$ にしたことが重要で，変換後の運動量 P が定数（保存量）となり，問題が簡単に解けたことになる．

2.2 回転座標系

次に，正準変換 II によって，回転座標系への変換を調べよう．ここでは，自由度が 2 つの座標系 (q_1, q_2) に対し，一定の角速度 ω で回転する座標系 (Q_1, Q_2) を考える．つまり，回転行列を用いて

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

という座標変換を扱う．

元の座標系 (q_1, q_2) では質量 m の自由な質点の運動を考え，質点のハミルトニアン

$$H(q_i, p_i) = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2\right) \tag{15}$$

を導入する．そこで，正準変換 II の母関数に含まれる関数を

$$F_2(q_i, P_i, t) \equiv (q_1 \cos\omega t + q_2 \sin\omega t)\, P_1 + (q_2 \cos\omega t - q_1 \sin\omega t)\, P_2$$

とすれば，式 (6) より

$$p_1 = \frac{\partial F_2}{\partial q_1} = P_1 \cos\omega t - P_2 \sin\omega t\ , \tag{16}$$

$$p_2 = \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = P_1 \sin\omega t + P_2 \cos\omega t\ , \tag{17}$$

が得られる．また，式 (14) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial t} &= \omega\left(-q_1 \sin\omega t + q_2 \cos\omega t\right) P_1 - \omega\left(q_2 \sin\omega t + q_1 \cos\omega t\right) P_2 \\ &= \omega Q_2 P_1 - \omega Q_1 P_2 \end{aligned}$$

なので，式 (6) の最後の式より

$$\begin{aligned} K &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2m}\left\{(P_1\cos\omega t - P_2\sin\omega t)^2 + (P_1\sin\omega t + P_2\cos\omega t)^2\right\} + \omega\left(Q_2P_1 - Q_1P_2\right) \\ &= \frac{1}{2m}\left(P_1^2 + P_2^2\right) + \omega\left(Q_2P_1 - Q_1P_2\right) \end{aligned} \tag{18}$$

となる．但し，式 (15)-(17) を用いた．

式 (18) を用いて，新しい変数 Q_i, P_i $(i = 1, 2)$ の正準方程式 (1) を書き下すと

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial K}{\partial P_1} = \frac{P_1}{m} + \omega Q_2\ , \tag{19}$$

$$\dot{Q}_2 = \frac{\partial K}{\partial P_2} = \frac{P_2}{m} - \omega Q_1\ , \tag{20}$$

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial K}{\partial Q_1} = \omega P_2\ , \tag{21}$$

$$\dot{P}_2 = -\frac{\partial K}{\partial Q_2} = -\omega P_1\ , \tag{22}$$

となる．式 (19)-(22) を回転座標系 (Q_1, Q_2) について解くため，まずは式 (19) の両辺を時間で微分し，式 (21) を代入すると

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_1 &= \frac{\dot{P}_1}{m} + \omega\dot{Q}_2 \\ &= \frac{\omega P_2}{m} + \omega\dot{Q}_2 \end{aligned} \tag{23}$$

となる．一方，式 (20) を P_2 について解くと

$$P_2 = m\left(\dot{Q}_2 + \omega Q_1\right)$$

であるから，これを式 (23) に代入して

$$\ddot{Q}_1 = \omega^2 Q_1 + 2\omega\dot{Q}_2 \tag{24}$$

が得られる．同様に，式 (20) の両辺を時間で微分し，式 (22) を代入すると

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_2 &= \frac{\dot{P}_2}{m} - \omega\dot{Q}_1 \\ &= -\frac{\omega P_1}{m} - \omega\dot{Q}_1 \end{aligned} \tag{25}$$

となる．一方，式 (19) を P_1 について解くと

$$P_1 = m\left(\dot{Q}_1 - \omega Q_2\right)$$

であるから，これを式 (25) に代入して

$$\ddot{Q}_2 = \omega^2 Q_2 - 2\omega \dot{Q}_1 \tag{26}$$

が得られる．以上，式 (24), (26) をまとめると

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 = \omega^2 Q_1 + 2\omega \dot{Q}_2 \\ \ddot{Q}_2 = \omega^2 Q_2 - 2\omega \dot{Q}_1 \end{cases}$$

となり，それぞれ右辺の第 1 項が遠心力を表し，第 2 項が**コリオリ力**を表している．