第 5 回　一般化力と散逸関数

理学部　物理科学科　齊藤 国靖

2024 年 5 月 13 日

デカルト座標から他の座標系に変換すると，運動方程式は形を変える．例えば，極座標における動径方向と角度方向の運動方程式は，デカルト座標における x, y 方向の運動方程式とは異なる表式で与えられる（第 1 回）．第 5 回の目的は，一般の座標系に変換したとき，運動方程式がどの様に与えられるかを理解し，抵抗力や摩擦力など保存力とは異なる力が働く場合のラグランジュ方程式を導出することである．

1　第 2 種ラグランジュ方程式

1.1　一般化座標への変換

N 個の質点のデカルト座標 X_i ,Y_i, Z_i $(i = 1, \ldots, N)$ を横一列に並べて

$$(X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \ldots, X_N, Y_N, Z_N) \tag{1}$$

と書いたとき，式 (1) を改めて

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \ldots, X_N, Y_N, Z_N)$$

と置けば，質点系の運動を記述するのに $n = 3N$ 個のデカルト座標が必要であるのが解る．この様に導入された n 個のデカルト座標を n 個の一般化座標に変換することを考える．

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \longrightarrow \quad (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

デカルト座標と一般化座標は互いに依存関係にあるので，ある x_i は $q_1, q_2, \ldots, q_n$ の関数になるはずである．これを便宜的に

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1\,(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ x_2 &= x_2\,(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ &\cdots \\ x_n &= x_n\,(q_1, q_2, \ldots, q_n) \end{aligned}$$

と表す．x_i は $q_1, q_2, \ldots, q_n$ の関数なので，その時間微分は合成関数の微分で

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n}\dot{q}_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j \qquad (2)
\end{aligned}
$$

となる．式 (2) の両辺をある $\dot{q}_j$ で微分すると，j とは異なる添え字の $\dot{q}_k$ $(k \neq j)$ の項が消えて

$$
\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \qquad (3)
$$

1.2　一般化力

デカルト座標 x_i の微小変位を考えると，x_i は $q_1, q_2, \ldots, q_n$ の関数なので

$$
\begin{aligned}
dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}dq_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n}dq_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}dq_j \qquad (4)
\end{aligned}
$$

である．ここで，デカルト座標における力の各成分を $F_1, F_2, \ldots, F_n$ とすると，微小変位 dx_i $(i = 1, \ldots, n)$ による仕事は

$$
\begin{aligned}
\delta W &= F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \cdots + F_n dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} F_i dx_i
\end{aligned}
$$

で与えられる．式 (4) の dx_i を代入すると

$$
\begin{aligned}
\delta W &= \sum_{i=1}^{n} F_i \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) dq_j \\
&\equiv \sum_{j=1}^{n} Q_j dq_j
\end{aligned}
$$

となり，一般化座標の微小変位 dq_j による仕事の表式が得られる．但し，

一般化力

$$
Q_j \equiv \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \qquad (5)
$$

を導入した．

1.3　保存力の場合

質点系に働く力が保存力の場合，ポテンシャルエネルギー $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を用いて

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{6}$$

である．一方，$U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を一般化座標 q_j で微分して負号をつけると

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial q_j} &= -\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial q_j} - \cdots - \frac{\partial U}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial q_j} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \end{aligned} \tag{7}$$

となる．但し，最後に式 (6) を代入した．式 (7) の右辺は式 (5) の一般化力そのものなので，

$$\boxed{Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}} \tag{8}$$

であることが解る．つまり，デカルト座標における力 F_i が式 (6) で与えられるのに対し，一般化力 Q_j は式 (8) で与えられる．いずれもポテンシャルエネルギーを座標で微分して負号をつけたものであり，一般化力を導入すれば保存力の定義が座標系に依らないことが解る．

1.4　ラグランジュ方程式との関係

デカルト座標における運動エネルギーは $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n$ の関数であり，

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\dot{x}_i^2 \tag{9}$$

と書ける．但し，m_i は各成分に対応した質量である．ここで，運動エネルギーを一般化座標の時間微分 $\dot{q}_j$ で微分した量を p_j とすると

$$\begin{aligned} p_j &\equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \dot{q}_j} + \cdots + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n}\frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned}$$

となる．これに式 (3) を代入すると

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{10}$$

となるが，式 (9) より，デカルト座標では

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i \tag{11}$$

なので，式 (10) は

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{12}$$

となる．この両辺を時間で微分すると

$$\dot{p}_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)$$

であるが，デカルト座標の運動方程式

$$m_i \ddot{x}_i = F_i$$

を代入すると

$$\dot{p}_j = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)$$

となる．ここで，右辺の第１項は式 (5) の一般化力そのものであり，

$$\dot{p}_j = Q_j + \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) \tag{13}$$

と書ける．

デカルト座標における運動エネルギーは式 (9) で与えられるが，一般化座標における運動エネルギーは速度 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ に加えて座標 $q_1, q_2, \ldots, q_n$ を含む可能性がある．例えば，極座標における運動エネルギーは $\dot{r}, \dot{\theta}$ の他に r を含んでいる（第 1 回参照）．従って，運動エネルギーは

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n) = T(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) \tag{14}$$

の関係を満たし，これを一般化座標で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial q_j} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial q_j} + \cdots + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n}\frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \end{aligned} \tag{15}$$

となる．但し，式 (11) を用いた．ここで，式 (2) の添え字を書き換えて

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

とし，両辺を q_j で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \frac{dq_k}{dt} \end{aligned} \tag{16}$$

となる．右辺の $\partial x_i / \partial q_j$ は $q_1, q_2, \ldots, q_n$ の関数であり（1.1 節参照），k に関する和は合成関数の微分

$$\frac{d}{dt} F(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt}$$

と考えられるから，式 (16) は

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)$$

となる．よって，これを式 (15) に代入して

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)$$

を得る．これは式 (13) の右辺の第 2 項に一致するから，式 (13) は

$$\dot{p}_j = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} \tag{17}$$

となる．

ところで，p_j はもともと運動エネルギーを $\dot{q}_j$ で微分した量として導入されたから，

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

である．よって，式 (17) は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

となり，

第 2 種ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \tag{18}$$

が成立する．式 (18) の右辺は一般化力であり，<u>力が保存力でなくても成立する</u>．また，全ての $j = 1, \ldots, n$ に対して同じ式が成り立つことに注意しよう．

2 散逸関数

運動する質点に対して，速度に比例した**抵抗力**

$$f_i = -\eta_i \dot{x}_i \tag{19}$$

が働く場合を考えよう．ここで，η_i は各速度に対応した粘性係数である．一般に，抵抗力は質点の速度を減速させる方向に働くから，運動エネルギーを散逸する効果がある．同じ様に，摩擦力も運動エネルギーを散逸させるため，抵抗力や摩擦力のことをまとめて**散逸力**と呼ぶことがある．

式 (6) の様に保存力はポテンシャルエネルギーの微分で与えられるが，抵抗力や摩擦力も同じ様な微分の形式で与えることはできないだろうか．そこで，

散逸関数

$$D(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\eta_i}{2} \dot{x}_i^2$$

を導入すると，散逸関数を速度 $\dot{x}_i$ で微分して負号をつけたものが式 (19) に一致することが解る．

$$f_i = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \tag{20}$$

次に，質点に保存力 F_i と抵抗力 f_i の両方が働くとしよう．式 (5) より，一般化力は

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_{i=1}^{n} (F_i + f_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \end{aligned}$$

で与えられる．1.3 節の計算より，右辺の第 1 項はポテンシャルエネルギーの微分で書くことができ，第 2 項には式 (20) を代入すると，

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{21}$$

となる．ここで，右辺の第 2 項に式 (3) を用いると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \\ &= \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned}$$

である．但し，$D(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ に対して合成関数の微分を使った．従って，式 (21) の一般化力は

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \tag{22}$$

と表される．

第 2 種ラグランジュ方程式 (18) に式 (22) の一般化力を代入すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \tag{23}$$

となる．ここで，ポテンシャルエネルギーは一般化座標の時間微分 $\dot{q}_j$ を含まないので

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

である．従って，式 (23) は

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-U)\right\} - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-U) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

と書くことができる．ラグランジアン $L = T - U$ を使うと

拡張されたラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

が得られる．これは散逸関数を含む様にラグランジュ方程式を拡張したものであり，保存力と散逸力が働く質点系の運動を記述することができる．