第４回　対称性と保存則

理学部　齊藤国靖 [*]

2023 年 4 月 5 日

運動量，角運動量，エネルギーなど，物理量が時間的に一定であることを示す保存則は系の対称性と直接関係している．第４回の目的は質点系の対称性から種々の保存則を導くことである．

1　質点系のラグランジアン

複数の質点からなる系を**質点系**という．N 個の質点からなる質点系を考え，i 番目の質点の質量，位置，速度をそれぞれ m_i, $\boldsymbol{r}_i$, $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ $(i=1,\dots,N)$ とする．このとき，質点系の運動エネルギーは

$$K=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \tag{1}$$

となり，各質点の速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_1,\dots,\dot{\boldsymbol{r}}_N$ の関数である．一方，質点に働く力が保存力であれば，質点系のポテンシャルエネルギーは $U(\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_N)$ となり，各質点の位置 $\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_N$ の関数である．従って，質点系のラグランジアン $L=K-U$ は各質点の位置と速度の関数

$$L=L\left(\boldsymbol{r}_1,\dots,\boldsymbol{r}_N,\dot{\boldsymbol{r}}_1,\dots,\dot{\boldsymbol{r}}_N\right) \tag{2}$$

である．以下，式 (2) の引数を簡略化して $L(\boldsymbol{r}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_i)$ と書く．また，ラグランジアンが時間 t に陽に依存してもよい場合は $L(\boldsymbol{r}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_i,t)$ と書く．

2　対称性と保存則

時間的に変化しない物理量を**保存量**という．保存量が一定であることを示すのが**保存則**であるが，ここでは保存則が質点系の対称性と直接結び付いていることを示す．

2.1　空間の一様性

質点系全体を $\delta\boldsymbol{r}$ だけ平行移動させると，各質点の位置は

$$\boldsymbol{r}_i\to\boldsymbol{r}_i+\delta\boldsymbol{r}\ ,\qquad (i=1,\dots,N) \tag{3}$$

[*] k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

と変化する．もし空間が一様であれば，$\delta \boldsymbol{r}$ の向きや大きさに依らずラグランジアンは不変なので，平行移動の前後でラグランジアンは等しく，

$$L\left(\boldsymbol{r}_i + \delta \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t\right) = L\left(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t\right) \tag{4}$$

である．従って，ラグランジアンの全微分はゼロ

$$dL \equiv L\left(\boldsymbol{r}_i + \delta \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t\right) - L\left(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t\right) = 0 \tag{5}$$

である．変位 $\delta \boldsymbol{r}$ が十分小さいとして，式 (5) の真ん中の式を展開すると

$$L\left(\boldsymbol{r}_i + \delta \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t\right) - L\left(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t\right) \simeq \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \delta \boldsymbol{r} \tag{6}$$

となる．よって，式 (5) は

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0 \tag{7}$$

となり，$\delta \boldsymbol{r}$ が任意であることから

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} = \boldsymbol{0} \tag{8}$$

である．

各質点のラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} = \boldsymbol{0} \qquad \therefore \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}\right) \tag{9}$$

を式 (8) に代入すると

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

となる．つまり，質点の一般運動量（第 1 回参照）$\boldsymbol{p}_i = \partial L / \partial \dot{\boldsymbol{r}}_i$ を用いると，式 (10) は

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{0} \tag{11}$$

と書ける．但し，

$$\boldsymbol{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i \tag{12}$$

は質点系の全運動量である．式 (11) より，全運動量は時間的に一定 $\boldsymbol{P} = \mathrm{const.}$ であり，空間の一様性を表す式 (4) から質点系の**運動量保存則**を導くことができた．

2.2　空間の等方性

図のように，質点を回転軸の周りに $\delta\varphi$ だけ回転させると，質点の移動距離 $|\delta\boldsymbol{r}_i|$ は近似的に弧の長さ

$$|\delta\boldsymbol{r}_i| \simeq (|\boldsymbol{r}_i|\sin\theta)\,\delta\varphi \tag{13}$$

で与えられる．回転軸に平行で大きさが $\delta\varphi$ のベクトル $\delta\boldsymbol{\varphi}$ を導入すると，式 (13) の右辺は外積 $\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_i$ の大きさに一致するから，回転による質点の変位は

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_i \tag{14}$$

である．つまり，質点系全体の回転により，各質点の位置は

$$\boldsymbol{r}_i \to \boldsymbol{r}_i + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_i\ , \qquad (i=1,\dots,N) \tag{15}$$

と変化する．さらに，回転は質点の速度の向きも変えるので，式 (15) の両辺を時間で微分して，各質点の速度が

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i \to \dot{\boldsymbol{r}}_i + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\dot{\boldsymbol{r}}_i\ , \qquad (i=1,\dots,N) \tag{16}$$

と変化するのが解る．

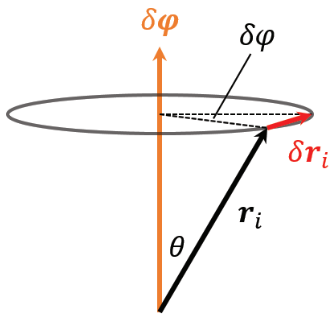

図 1

もし空間が等方的であれば，$\delta\boldsymbol{\varphi}$ の向きや大きさに依らずラグランジアンは不変なので，回転の前後でラグランジアンは等しく，

$$L\left(\boldsymbol{r}_i + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_i,\ \dot{\boldsymbol{r}}_i + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\dot{\boldsymbol{r}}_i,\ t\right) = L\left(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t\right) \tag{17}$$

となる．つまり，ラグランジアンの全微分はゼロ

$$dL \equiv L\left(\boldsymbol{r}_i + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_i,\ \dot{\boldsymbol{r}}_i + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\dot{\boldsymbol{r}}_i,\ t\right) - L\left(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t\right) = 0 \tag{18}$$

である．$\delta\boldsymbol{\varphi}$ が十分小さいとして，式 (18) の真ん中の式を展開すると

$$\begin{aligned} &L\left(\boldsymbol{r}_i + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_i,\ \dot{\boldsymbol{r}}_i + \delta\boldsymbol{\varphi}\times\dot{\boldsymbol{r}}_i,\ t\right) - L\left(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t\right) \\ &\qquad \simeq \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_i) + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\dot{\boldsymbol{r}}_i) \end{aligned} \tag{19}$$

となる．ここで，各質点のラグランジュ方程式 (9) に一般運動量 $\boldsymbol{p}_i = \partial L/\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i$ を代入すると

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}\right) = \dot{\boldsymbol{p}}_i \tag{20}$$

なので，式 (18) と (19) より，

$$dL = \sum_{i=1}^{N} \dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}_i) + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \dot{\boldsymbol{r}}_i) = 0 \tag{21}$$

が得られる．左辺の各項に対して，スカラー三重積の公式

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}_i) = \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot (\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{p}}_i) \tag{22}$$
$$\boldsymbol{p}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \dot{\boldsymbol{r}}_i) = \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot (\dot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{p}_i) \tag{23}$$

を用いると

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{i=1}^{N} \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot (\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{p}}_i) + \sum_{i=1}^{N} \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot (\dot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{p}_i) \\ &= \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{p}}_i + \dot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{p}_i) \\ &= \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i \\ &= 0 \end{aligned} \tag{24}$$

となる．よって，$\delta\boldsymbol{\varphi}$ が任意であることから

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{0} \tag{25}$$

である．ここで，質点系の全角運動量

$$\boldsymbol{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i \tag{26}$$

を導入すると，式 (25) は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{0} \tag{27}$$

となる．つまり，全角運動量は時間的に一定 $\boldsymbol{L} = \mathrm{const.}$ であり，空間の等方性を表す式 (17) から質点系の**角運動量保存則**を導くことができた．

2.3　時間の一様性

ラグランジアンが時間に陽に依存しない場合，質点系の時間変化は時間の原点 $t=0$ の選び方に依らない（時間の一様性）．このとき，$L(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i)$ の時間に関する微分は，連鎖律により

$$\frac{d}{dt}L(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \cdot \frac{d}{dt}\dot{\boldsymbol{r}}_i \tag{28}$$

となる．各質点のラグランジュ方程式 (9) を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i) &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \cdot \left(\frac{d}{dt}\dot{\boldsymbol{r}}_i \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \end{aligned} \tag{29}$$

なので，右辺から左辺を差し引いて

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i - L \right) = 0 \tag{30}$$

が得られる．従って，質点系の全エネルギー

$$E \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i - L \tag{31}$$

を導入すると，式 (30) は

$$\frac{d}{dt}E = 0 \tag{32}$$

となる．つまり，全エネルギーは時間的に一定 $E = \text{const.}$ であり，時間の一様性から質点系の**エネルギー保存則**を導くことができた．

式 (31) の E が全エネルギーであることを確認するには，式 (1) の質点系の運動エネルギー K を用いればよい．ラグランジアンのうち，質点の速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ に依存するのは K だけなので，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial K}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \end{aligned} \tag{33}$$

これを式 (31) に代入すると

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 - L \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 - U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 + U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) \qquad (34)
\end{aligned}
$$

となり，質点系の全エネルギーになる．