第3回　拘束条件とラグランジュの未定乗数法

理学部　齊藤国靖 *

2023 年 4 月 5 日

伸び縮みしない糸や棒でつながれた単振り子や，斜面や曲面に沿って運動する質点など，運動の軌跡が著しく制限される場合がある．この様な制限は質点の運動方程式と同時に考えなければならず，問題を解くうえで重要な条件でもある．第3回の目的は，運動が制限される場合のラグランジュ方程式を最小作用の原理から導出し，これを具体的な問題に適用することである．

1　拘束条件

第1回の例題で扱った単振り子は2次元的な平面内の運動であるから，支点と重りの間の距離 r と鉛直な軸に対する角度 φ の様に，本来2つの一般座標で記述されるべきである．しかし，支点と重りをつなぐ糸が伸び縮みしないという条件を暗に用いたため，1つの角度 φ だけで振り子の運動を記述することができた．これは，糸の長さを l として $r=l$ という条件，つまり

$$f(r) \equiv r - l = 0$$

という関係式を運動方程式に連立させて解いたことに相当する．$f(r)=0$ という条件は一般座標 r に対する関係式であるが，より一般に一般座標とその時間微分に関する関係式

$$f_\alpha(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t) = 0\ , \qquad (\alpha = 1,\ldots,m)$$

のことを**拘束条件**という．添え字 α で示す様に拘束条件は複数あってもよいし，時間 t を陽に含んでいてもよい．さらに，$f_\alpha \geq 0$ の様に不等式の場合もある．

問題に応じて様々な拘束条件が考えられるが，特に f_α が一般座標と時間だけを含む場合，

$$f_\alpha(q_1,\ldots,q_n,t) = 0\ , \qquad (\alpha = 1,\ldots,m) \tag{1}$$

を**ホロノームな拘束条件**という．一方，f_α が速度 $\dot{q}_i$ を含んでいたり，等式ではなく不等式など，式 (1) のように表せない場合を**非ホロノームな拘束条件**という．

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

2　ラグランジュの未定乗数法

拘束条件を伴う運動では，作用 S は拘束条件を満たしたうえで最小でなければならない．これは条件付き極値問題の一つで，これを解くための一般的な処方箋として**ラグランジュの未定乗数法**がある．ここでは簡単のため，ホロノームな拘束条件の場合について考える．

式 (1) より f_α はゼロなので，これに適当な関数 λ_α をかけたものを作用に加える．

$$S = \int_a^b \left(L + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha f_\alpha \right) dt \tag{2}$$

右辺の f_α は一般座標の関数なので，積分の中の第 2 項の変分は

$$\begin{aligned} \delta\left(\lambda_\alpha f_\alpha\right) &= \lambda_\alpha \delta f_\alpha + f_\alpha \delta\lambda_\alpha \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i \end{aligned} \tag{3}$$

となる．但し，式 (1) より $f_\alpha \delta\lambda_\alpha = 0$ とした．従って，作用の変分は

$$\delta S = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \right\} \delta q_i \ dt \tag{4}$$

となる．右辺の δq_i は任意にとれるので，最小作用の原理 $\delta S = 0$ を満たすには，積分の中身が常にゼロでなければならない．従って，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \tag{5}$$

である．ここで，右辺の

$$Q_i \equiv \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \tag{6}$$

は**拘束力**を表し，式 (5) はラグランジュ方程式に拘束力を加えたものと考えてよい．なお，関数 λ_α を**未定乗数**という．

3　例題：半球上の質点の運動

3.1　ラグランジアンと拘束条件

図 1 の様に，半球の中心から質点までの距離を r，鉛直な軸から質点までの角度を θ とする．この問題では，r と θ を一般座標とする．質点は半球に沿って円運動するため，その速度は $r\dot{\theta}$ であり，質点の運動エネルギーは

$$T = \frac{m}{2}\left(r\dot{\theta} \right)^2 \tag{7}$$

である．一方，質点の高さは $r\cos\theta$ なので，質点の位置エネルギーは

$$U = mgr\cos\theta \tag{8}$$

である．従って，質点のラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{m}{2}\left(r\dot{\theta}\right)^2 - mgr\cos\theta \end{aligned} \tag{9}$$

となる．

ところで，質点は半球に沿って運動するので，距離 r は半球の半径 a に等しい．これを拘束条件として表せば

$$f(r) \equiv r - a = 0 \tag{10}$$

となり，r だけに依存するホロノームな拘束条件である．以下，ラグランジュの未定乗数 λ を導入して質点の運動を調べてみよう．

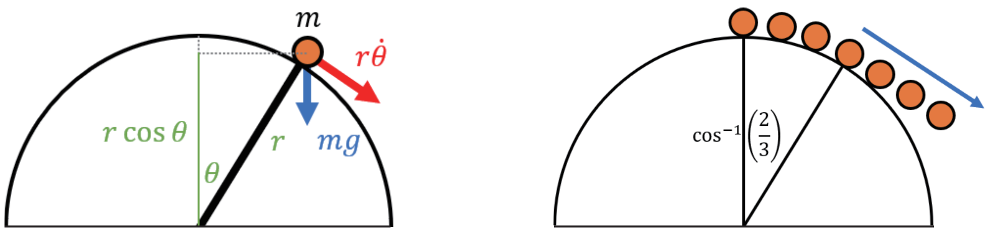

図 1

3.2　r に対するラグランジュ方程式

式 (5) より，距離 r に対するラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda\frac{\partial f}{\partial r} \tag{11}$$

である．式 (9) のラグランジアンに $\dot{r}$ は含まれていないので，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \tag{12}$$

となる．一方，ラグランジアンは r を含むので，

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{m}{2}\left(r\dot{\theta}\right)^2 - mgr\cos\theta\right\} \\ &= mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta \end{aligned} \tag{13}$$

である。さらに，$f(r)$ に対しては

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(r-a) = 1 \tag{14}$$

なので，ラグランジュ方程式は

$$mg\cos\theta - ma\dot{\theta}^2 = \lambda \tag{15}$$

となる．但し，最後の式で $r=a$ を代入した.

3.3　θ に対するラグランジュ方程式

式 (5) より，角度 θ に対するラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} \tag{16}$$

である．式 (9) のラグランジアンを用いると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \tag{17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mgr\sin\theta \tag{18}$$

となる．最初の式に $r=a$ を代入し，時間で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) &= \frac{d}{dt}\left(ma^2\dot{\theta}\right) \\ &= ma^2\ddot{\theta}\end{aligned} \tag{19}$$

となる．一方，$f(r)$ は θ を含まないので，

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \tag{20}$$

である．従って，ラグランジュ方程式は

$$ma^2\ddot{\theta} - mga\sin\theta = 0 \tag{21}$$

となる．但し，最後の式で $r=a$ を代入した.

式 (21) を $\ddot{\theta}$ について解くと

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\sin\theta \tag{22}$$

である．この両辺に $\dot{\theta}$ を掛けて変形すると

$$\begin{aligned}\dot{\theta}\ddot{\theta} &= \frac{g}{a}\dot{\theta}\sin\theta \\ \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) &= \frac{d}{dt}\left(-\frac{g}{a}\cos\theta\right)\end{aligned} \tag{23}$$

よって，式 (23) を時間 t で積分して

$$\dot{\theta}^2 = -\frac{2g}{a}\cos\theta + c \tag{24}$$

が得られる．但し，c は積分定数である．$t = 0$ で質点の初速度がゼロであったとすると，$\theta = 0$ のとき $\dot{\theta} = 0$ ということなので，積分定数は $c = 2g/a$ である．従って，

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}\left(1 - \cos\theta\right) \tag{25}$$

となる．

3.4　質点が半球を離れる条件

式 (25) を (15) に代入すると，

$$\begin{aligned} \lambda &= mg\cos\theta - 2mg\left(1 - \cos\theta\right) \\ &= mg\left(3\cos\theta - 2\right) \end{aligned} \tag{26}$$

これを拘束力の表式 (6) に代入すると，質点を半球上に留めておくための拘束力は

$$\begin{aligned} Q &= \lambda\frac{\partial f}{\partial r} \\ &= mg\left(3\cos\theta - 2\right) \end{aligned} \tag{27}$$

で与えられる．$Q = 0$ になると，質点を半球上に留めておくことはできない．従って，

$$\begin{aligned} mg\left(3\cos\theta - 2\right) &= 0 \\ \therefore \theta &= \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned} \tag{28}$$

の角度になったとき，質点は半球を離れて落下する．

4　例題：斜面上の輪の運動

4.1　ラグランジアンと拘束条件

図 2 の様に，斜面に沿って x 軸をとり，時刻 $t = 0$ での輪と斜面の接点を $x = 0$ とする．また，輪は斜面上を滑ることなく転がるとして，$t = 0$ での接点が斜面に垂直な軸となす角を θ とする．この問題では，x と θ を一般座標とする．輪の重心は斜面に沿って速度 $\dot{x}$ で進み，輪自体は速度 $a\dot{\theta}$ で回転する．従って，輪の運動エネルギーは重心の運動エネルギーと回転の運動エネルギーの和で与えられ，

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(a\dot{\theta}\right)^2 \tag{29}$$

となる．一方，斜面の全長を l とすると，輪の位置エネルギーは

$$U = mg(l - x)\sin\phi \tag{30}$$

である．よって，輪のラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(a\dot{\theta}\right)^2 - mg(l - x)\sin\phi \end{aligned} \tag{31}$$

となる．

ところで，輪は斜面上を滑ることなく転がるので，斜面に沿った距離 x と円弧の長さ $a\theta$ は等しい．これを拘束条件として表せば

$$f(x, \theta) \equiv a\theta - x = 0 \tag{32}$$

となり，一般座標にのみ依存するホロノームな拘束条件である．再び，ラグランジュの未定乗数 λ を導入して輪の運動を調べよう．

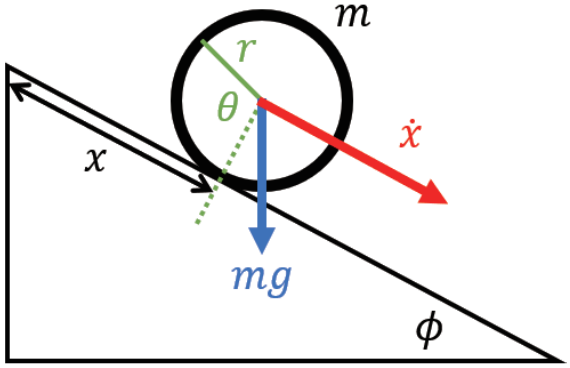

図 2

4.2　x に対するラグランジュ方程式

式 (5) より，距離 x に対するラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \tag{33}$$

である．式 (31) のラグランジアンを用いると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{34}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mg\sin\phi \tag{35}$$

となる．よって，最初の式を時間で微分して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \tag{36}$$

となる．一方，$f(x,\theta)$ に対しては

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(a\theta - x) = -1 \tag{37}$$

なので，ラグランジュ方程式 (33) は

$$m\ddot{x} - mg\sin\phi = -\lambda \tag{38}$$

となる．

4.3　θ に対するラグランジュ方程式

式 (5) より，角度 θ に対するラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} \tag{39}$$

である．式 (31) のラグランジアンを用いると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta} \tag{40}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{41}$$

となる．よって，最初の式を時間で微分して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = ma^2\ddot{\theta} \tag{42}$$

となる．一方，$f(x,\theta)$ に対しては

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(a\theta - x) = a \tag{43}$$

なので，ラグランジュ方程式 (39) は

$$ma^2\ddot{\theta} = \lambda a \tag{44}$$

となる．

4.4　輪の運動とラグランジュの未定乗数

拘束条件 $a\theta = x$ を時間で 2 回微分すると

$$a\ddot{\theta} = \ddot{x} \tag{45}$$

である．これを式 (44) に代入して

$$
\begin{aligned}
ma\ddot{x} &= \lambda a \\
\therefore \lambda &= m\ddot{x} \qquad (46)
\end{aligned}
$$

式 (38) に (46) を代入すると

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} - mg\sin\phi &= -m\ddot{x} \\
\therefore \ddot{x} &= \frac{g}{2}\sin\phi \qquad (47)
\end{aligned}
$$

となり，式 (45) に代入して

$$
\ddot{\theta} = \frac{g}{2a}\sin\phi \qquad (48)
$$

が得られる．以上，まとめると

$$
\ddot{x} = \frac{g}{2}\sin\phi\ , \qquad \ddot{\theta} = \frac{g}{2a}\sin\phi \qquad (49)
$$

であり，右辺はともに定数であるから，これらを時間で積分して輪の運動が求まる．