第 2 回　最小作用の原理と変分法

理学部　物理科学科　齊藤 国靖

2024 年 4 月 19 日

一般化座標を使えば，ラグランジュ方程式は座標系に依らない唯一の形で与えられることを示した．そこで，第 2 回の目的はラグランジュ方程式を導出することである．また，導出の手順を一般化した**変分法**についても学ぶ．

1　最小作用の原理

前回は 2 次元平面内の質点の運動を考えたため，一般化座標 q_i $(i=1,2)$ は 2 つであったが，一般にラグランジュ方程式は n 個の一般化座標に対して成り立つ．

ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1}$$

式 (1) は n 個の連立微分方程式であり，ラグランジアンの引数は

$$L=L\left(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t\right) \tag{2}$$

で与えられる．ラグランジアンは引数 $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$ の時間依存性を通じて t に依存するが，それ以外にも t に依存する項がある場合を考慮して，式 (2) の引数の最後に t そのものを含めている．例えば，質量が $m(t)$ の様に時間変化する質点のラグランジアンは

$$L(q,\dot{q},t)=\frac{m(t)}{2}\dot{q}^2-U(q)$$

となるが，ラグランジアンは $q(t)$, $\dot{q}(t)$ に加え，$m(t)$ によっても時間変化する．この様なとき，

ラグランジアンは時間に陽に依存する

という．

次に，ラグランジュ方程式を導出するため，解析力学の基礎となる次の原理を導入しよう．

最小作用の原理

時間 $t_a \leq t \leq t_b$ における一般化座標 $q_i(t)$ は

$$S \equiv \int_{t_a}^{t_b} L\left(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t\right) dt \tag{3}$$

を最小にする関数である．

まず，式 (3) の積分は $q_i(t)$ の関数形が変わると値が変わるため，S は**汎関数**である．また，被積分関数はラグランジアンであり，特に S のことを**作用**と呼ぶ．さらに，最初と最後の時刻で一般化座標は固定されているとする．つまり，n 個の $q_i(t)$ は境界条件

$$q_i(t_a) = a_i\ , \qquad q_i(t_b) = b_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

を満たし，a_i, b_i は $q_i(t)$ の関数形に依らない定数である．なお，最小作用の原理はラグランジアンが時間に陽に依存しなくても成り立つ．

汎関数である作用が最小であるためには，その**変分**がゼロでなければならない[*1]．つまり，$q_i(t)$ とはわずかに異なる関数

$$q_i(t) + \delta q_i(t) \tag{5}$$

を考えたとき，作用の変分

$$\delta S \equiv S\left[q_i(t) + \delta q_i(t)\right] - S\left[q_i(t)\right] \tag{6}$$

はゼロである．但し，式 (5) の関数も最初と最後の時刻で境界条件を満たさなければならないので，

$$q_i(t_a) + \delta q_i(t_a) = a_i\ , \qquad q_i(t_b) + \delta q_i(t_b) = b_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

となる．従って，式 (4) を代入すると

$$\delta q_i(t_a) = 0\ , \qquad \delta q_i(t_b) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

が得られる．また，作用の変分を求めるため，次のラグランジアン

$$L\left(q_1 + \delta q_1, \ldots, q_n + \delta q_n, \dot{q}_1 + \delta\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n + \delta\dot{q}_n, t\right) \tag{8}$$

を考えよう．これは，$q_i(t)$ の代わりに $q_i(t) + \delta q_i(t)$ で定義したラグランジアンであり，式 (6) の右辺にある $S\left[q_i(t) + \delta q_i(t)\right]$ の被積分関数である．式 (8) を δq_i, $\delta\dot{q}_i$ の 1 次まで展開すると[*2]

$$\begin{aligned} &L\left(q_1 + \delta q_1, \ldots, q_n + \delta q_n, \dot{q}_1 + \delta\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n + \delta\dot{q}_n, t\right) \\ &\qquad \approx L\left(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i \end{aligned} \tag{9}$$

となる．ここで，同一の添え字をもつ変数の積に関する次のルールを導入しよう．

[*1] これは汎関数が**停留値**をとる条件である．

[*2] これは**多変数関数のテイラー展開**である．

アインシュタインの縮約記法

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\ , \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i$$

これらはいずれも同一の添え字 i をもつ変数の積なので，和の記号を省略し，添え字 i について $1 \sim n$ までの和をとるものと約束する．アインシュタインの縮約記法を使うと，式 (9) は

$$\begin{aligned} &L\left(q_1+\delta q_1,\ldots,q_n+\delta q_n,\dot{q}_1+\delta\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n+\delta\dot{q}_n,t\right) \\ &\quad \approx L\left(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t\right)+\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i \end{aligned} \tag{10}$$

と書ける．そこで，式 (3), (10) を用いて，式 (6) の作用の変分を計算すると，

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_a}^{t_b} L\left(q_1+\delta q_1,\ldots,q_n+\delta q_n,\dot{q}_1+\delta\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n+\delta\dot{q}_n,t\right)dt \\ &\qquad -\int_{t_a}^{t_b} L\left(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t\right)dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \Big\{L\left(q_1+\delta q_1,\ldots,q_n+\delta q_n,\dot{q}_1+\delta\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n+\delta\dot{q}_n,t\right) \\ &\qquad\qquad -L\left(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t\right)\Big\}dt \\ &\approx \int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt \end{aligned}$$

となる．さらに，

$$\delta\dot{q}_i = \frac{d}{dt}\delta q_i$$

を代入し，t に関して部分積分を行うと，

$$\begin{aligned} \delta S &\approx \int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i\right)dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt+\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_a}^{t_b} \end{aligned}$$

となる．ここで，右辺の最後の項（**表面項**）は式 (7) によりゼロである．

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_a}^{t_b} &= \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)_{t=t_b}\delta q_i(t_b)-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)_{t=t_a}\delta q_i(t_a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって，

$$\delta S \approx \int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt \tag{11}$$

である．任意の $\delta q_i(t)$ に対して $\delta S = 0$ であるためには，式 (11) の被積分関数の中身が常にゼロでなければばならない．つまり，

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0 \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{12}$$

であり，これはラグランジュ方程式 (1) である．従って，ラグランジュ方程式は作用の変分がゼロ $\delta S = 0$ であることの帰結である．

2　ラグランジアンの不定性

一般座標が一つだけのラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ を考え，ラグランジアンに一般座標と時間の関数 $F(q, t)$ の導関数を加えたもの

$$L^*(q, \dot{q}, t) \equiv L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}F(q, t) \tag{13}$$

を考えよう．これを新しいラグランジアンと見なし，式 (13) による作用

$$S^* = \int_{t_a}^{t_b} L^*(q, \dot{q}, t)dt \tag{14}$$

を考える．式 (13) を (14) に代入すると

$$\begin{aligned} S^* &= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}F(q, t) \right\} dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} L(q, \dot{q}, t)dt + [F(q, t)]_{t_a}^{t_b} \\ &= S + F\left(q(t_a), t_a\right) - F\left(q(t_b), t_b\right) \end{aligned} \tag{15}$$

となる．ここで，$F\left(q(t_a), t_a\right)$ と $F\left(q(t_b), t_b\right)$ は時刻 t_a と t_b での一般化座標を関数 $F(q, t)$ に代入したものだから定数である．従って，式 (15) の両辺の変分をとると消えてしまい，結局

$$\delta S^* = \delta S \tag{16}$$

である．従って，最小作用の原理 $\delta S = 0$ が成り立てば，新しいラグランジアンによる作用の変分も $\delta S^* = 0$ である．言い換えると，新しいラグランジアン $L^*(q, \dot{q}, t)$ による条件 $\delta S^* = 0$ は最小作用の原理 $\delta S = 0$ と等価であり，最終的に得られるラグランジュ方程式は不変である．これを，

ラグランジアンの不定性

ラグランジアンには $\frac{d}{dt}F(q, t)$ だけの不定性がある

といい，ラグランジアンの不定性を利用して問題を解き易くすることもある．

3　変分法

3.1　関数が一つの場合

関数 $y = f(x)$ の導関数を

$$\dot{y} = \frac{d}{dx}f(x) \tag{17}$$

として，x, y, $\dot{y}$ を引数とする関数 $F(x,y,\dot{y})$ を考える．ここで，$y=f(x)$ と $\dot{y}=df(x)/dx$ は x の関数なので，$F(x,y,\dot{y})$ も結局 x の関数であることに注意しよう．このとき，$F(x,y,\dot{y})$ の定積分

$$I=\int_a^b F(x,y,\dot{y})dx \tag{18}$$

を考えると，I は $f(x)$ の関数形に依って値が変わる．I のことを $f(x)$ の**汎関数**といい，$I[f(x)]$ と書くこともある．

$f(x)$ の関数形を色々変えたとき，I の値が極小（または**停留値**）になる関数形を $f_0(x)$ とする．このとき，I が停留値になる y と $\dot{y}$ は

$$y=f_0(x) \tag{19}$$
$$\dot{y}=\frac{d}{dx}f_0(x) \tag{20}$$

で与えられる．一方，$f(x)$ は $f_0(x)$ とわずかに異なるとして，

$$y+\delta y=f(x) \tag{21}$$
$$\dot{y}+\delta\dot{y}=\frac{d}{dx}f(x) \tag{22}$$

とする．但し，

$$\delta y\equiv f(x)-f_0(x) \tag{23}$$
$$\delta\dot{y}\equiv\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}f_0(x) \tag{24}$$

は I の停留値を与える y と $\dot{y}$ からの微小な変化分である．そこで，汎関数 I の**変分**

$$\delta I=I[f(x)]-I[f_0(x)] \tag{25}$$

を導入すると，$I[f_0(x)]$ が停留値なので，変分は常にゼロ $\delta I=0$ となる．

式 (18) を (25) に代入すると，

$$\begin{aligned}\delta I&=\int_a^b F(x,y+\delta y,\dot{y}+\delta\dot{y})dx-\int_a^b F(x,y,\dot{y})dx\\&=\int_a^b\left\{F(x,y+\delta y,\dot{y}+\delta\dot{y})-F(x,y,\dot{y})\right\}dx\end{aligned} \tag{26}$$

ここで，$F(x,y+\delta y,\dot{y}+\delta\dot{y})$ を δy と $\delta\dot{y}$ の１次までテイラー展開すると

$$F(x,y+\delta y,\dot{y}+\delta\dot{y})\simeq F(x,y,\dot{y})+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial\dot{y}}\delta\dot{y} \tag{27}$$

なので，式 (26) は

$$\delta I\simeq\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial\dot{y}}\delta\dot{y}\right)dx \tag{28}$$

となる．また，式 (23) と (24) より

$$\delta \dot{y} = \frac{d}{dx}\{f(x) - f_0(x)\} = \frac{d}{dx}\delta y \tag{29}$$

なので，式 (28) は

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\frac{d}{dx}\delta y \right) dx \tag{30}$$

となる．右辺の積分の第 2 項を部分積分すると，

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\frac{d}{dx}\delta y \, dx = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta y \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \delta y \, dx \tag{31}$$

である．ここで，$f(x)$ と $f_0(x)$ の始点と終点が一致する場合（図 1 参照）を考えると，$x = a$ と $x = b$ において $\delta y = 0$ なので，式 (31) の右辺の第 1 項はゼロである．よって，式 (30) は

$$\delta I = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \right\} \delta y \, dx \tag{32}$$

となる．右辺の積分区間 $a < x < b$ で δy は任意に変えられるので，変分が常にゼロ $\delta I = 0$ であるためには，積分の中身がゼロでなければならない．つまり，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{33}$$

であり，これを**オイラー・ラグランジュ方程式**という．

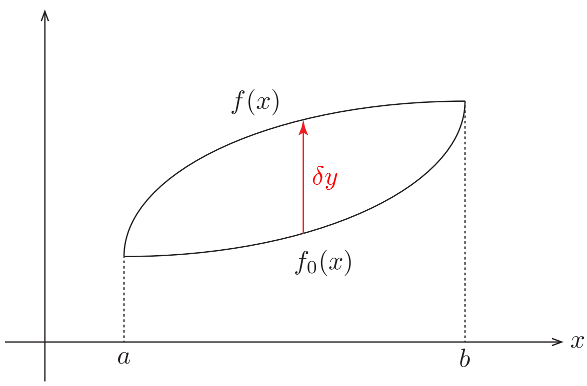

図 1

3.2　関数が複数の場合

　オイラー・ラグランジュ方程式 (33) を複数の関数に拡張するには，n 個の関数 $y_1, \ldots, y_n$ とその導関数 $\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n$ を引数とする関数

$$F\left(x, y_1, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n\right)$$

に対し，同様の計算を行えばよい．まず，汎関数は

$$I = \int_a^b F\left(x, y_1, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n\right) dx \tag{34}$$

であり，I の変分は

$$\begin{aligned}\delta I = \int_a^b \Big\{ & F\left(x, y_1 + \delta y_1, \ldots, y_n + \delta y_n, \dot{y}_1 + \delta \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n + \delta \dot{y}_n\right) \\ & - F\left(x, y_1, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n\right) \Big\} dx\end{aligned} \tag{35}$$

である．１次までのテイラー展開は

$$\begin{aligned}& F\left(x, y_1 + \delta y_1, \ldots, y_n + \delta y_n, \dot{y}_1 + \delta \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n + \delta \dot{y}_n\right) \\ & \simeq F\left(x, y_1, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \delta \dot{y}_i \right)\end{aligned} \tag{36}$$

なので，式 (35) は

$$\delta I \simeq \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \delta \dot{y}_i \right) dx \tag{37}$$

となる．前節と同様,

$$\delta \dot{y}_i = \frac{d}{dx} \delta y_i$$

を用いて，右辺の積分の第２項を部分積分し，$x = a$ と $x = b$ において

$$\delta y_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

の場合を考えると，式 (37) は

$$\delta I = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \right) \right\} \delta y_i \; dx \tag{38}$$

となる．よって，δy_i は任意なので，変分が常にゼロ $\delta I = 0$ であるためには,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{39}$$

である．