第２回　変分法と最小作用の原理

理学部　齊藤国靖 *

2023 年 4 月 5 日

一般座標を使えば，ラグランジュ方程式は座標系に依らない唯一の形で与えられることを示した．第２回の目的は，ラグランジュ方程式をより一般的な方法で導出することである．そのために，まずは**変分法**を数学として理解することから始める．

1　変分法

1.1　関数が一つの場合

関数 $y = f(x)$ の導関数を

$$\dot{y} = \frac{d}{dx} f(x) \tag{1}$$

として，x, y, $\dot{y}$ を引数とする関数 $F(x, y, \dot{y})$ を考える．ここで，$y = f(x)$ と $\dot{y} = df(x)/dx$ は x の関数なので，$F(x, y, \dot{y})$ も結局 x の関数であることに注意しよう．このとき，$F(x, y, \dot{y})$ の定積分

$$I = \int_a^b F(x, y, \dot{y}) dx \tag{2}$$

を考えると，I は $f(x)$ の関数形に依って値が変わる．I のことを $f(x)$ の**汎関数**といい，$I[f(x)]$ と書くこともある．

$f(x)$ の関数形を色々変えたとき，I の値が極小（または**停留値**）になる関数形を $f_0(x)$ とする．このとき，I が停留値になる y と $\dot{y}$ は

$$y = f_0(x) \tag{3}$$

$$\dot{y} = \frac{d}{dx} f_0(x) \tag{4}$$

で与えられる．一方，$f(x)$ は $f_0(x)$ とわずかに異なるとして，

$$y + \delta y = f(x) \tag{5}$$

$$\dot{y} + \delta \dot{y} = \frac{d}{dx} f(x) \tag{6}$$

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

とする．但し，

$$\delta y \equiv f(x) - f_0(x) \tag{7}$$
$$\delta \dot{y} \equiv \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}f_0(x) \tag{8}$$

は I の停留値を与える y と $\dot{y}$ からの微小な変化分である．そこで，汎関数 I の**変分**

$$\delta I = I[f(x)] - I[f_0(x)] \tag{9}$$

を導入すると，$I[f_0(x)]$ が停留値なので，変分は常にゼロ $\delta I = 0$ となる．

　式 (2) を (9) に代入すると，

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_a^b F(x, y+\delta y, \dot{y}+\delta\dot{y})dx - \int_a^b F(x,y,\dot{y})dx \\ &= \int_a^b \left\{F(x, y+\delta y, \dot{y}+\delta\dot{y}) - F(x,y,\dot{y})\right\} dx \end{aligned} \tag{10}$$

ここで，$F(x, y+\delta y, \dot{y}+\delta\dot{y})$ を δy と $\delta\dot{y}$ の１次までテイラー展開すると

$$F(x, y+\delta y, \dot{y}+\delta\dot{y}) \simeq F(x,y,\dot{y}) + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta\dot{y} \tag{11}$$

なので，式 (10) は

$$\delta I \simeq \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta\dot{y}\right) dx \tag{12}$$

となる．また，式 (7) と (8) より

$$\delta\dot{y} = \frac{d}{dx}\left\{f(x) - f_0(x)\right\} = \frac{d}{dx}\delta y \tag{13}$$

なので，式 (12) は

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\frac{d}{dx}\delta y\right) dx \tag{14}$$

となる．右辺の積分の第２項を部分積分すると，

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\frac{d}{dx}\delta y\ dx = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta y\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)\delta y\ dx \tag{15}$$

である．ここで，$f(x)$ と $f_0(x)$ の始点と終点が一致する場合（図１参照）を考えると，$x = a$ と $x = b$ において $\delta y = 0$ なので，式 (15) の右辺の第１項はゼロである．よって，式 (14) は

$$\delta I = \int_a^b \left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)\right\}\delta y\ dx \tag{16}$$

となる．右辺の積分区間 $a < x < b$ で δy は任意に変えられるので，変分が常にゼロ $\delta I = 0$ であるためには，積分の中身がゼロでなければならない．つまり，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{17}$$

であり，これを**オイラー・ラグランジュ方程式**という．

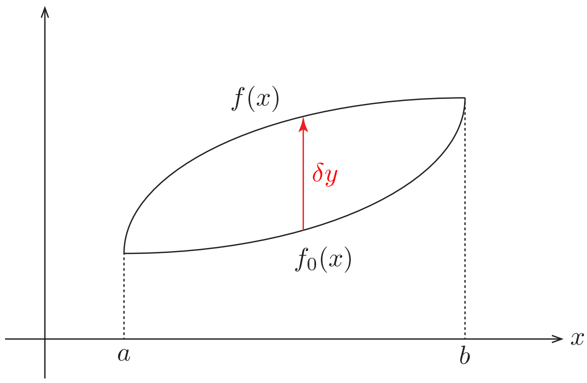

図 1

1.2　関数が複数の場合

オイラー・ラグランジュ方程式 (17) を複数の関数に拡張するには，n 個の関数 $y_1, \ldots, y_n$ とその導関数 $\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n$ を引数とする関数

$$F\left(x, y_1, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n\right)$$

に対し，同様の計算を行えばよい．まず，汎関数は

$$I = \int_a^b F\left(x, y_1, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n\right) dx \tag{18}$$

であり，I の変分は

$$\begin{aligned}\delta I = \int_a^b \Big\{ & F\left(x, y_1 + \delta y_1, \ldots, y_n + \delta y_n, \dot{y}_1 + \delta \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n + \delta \dot{y}_n\right) \\ & - F\left(x, y_1, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n\right) \Big\} dx \end{aligned} \tag{19}$$

である．１次までのテイラー展開は

$$\begin{aligned} & F\left(x, y_1 + \delta y_1, \ldots, y_n + \delta y_n, \dot{y}_1 + \delta \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n + \delta \dot{y}_n\right) \\ \simeq\; & F\left(x, y_1, \ldots, y_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \delta \dot{y}_i \right) \end{aligned} \tag{20}$$

なので，式 (19) は

$$\delta I \simeq \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \delta \dot{y}_i \right) dx \tag{21}$$

となる．前節と同様，

$$\delta \dot{y}_i = \frac{d}{dx} \delta y_i$$

を用いて，右辺の積分の第 2 項を部分積分し，$x=a$ と $x=b$ において

$$\delta y_i = 0 \qquad (i=1,\ldots,n)$$

の場合を考えると，式 (21) は

$$\delta I = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i}\right) \right\} \delta y_i \, dx \tag{22}$$

となる．よって，δy_i は任意なので，変分が常にゼロ $\delta I = 0$ であるためには,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i}\right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{23}$$

である．

2　最小作用の原理

関数が複数の場合のオイラー・ラグランジュ方程式 (23) において,

$$\begin{aligned} x &\rightarrow t \\ y_i &\rightarrow q_i \\ F &\rightarrow L \end{aligned} \tag{24}$$

という置き換えをすれば，ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{25}$$

が得られる．つまり，時間の関数としての一般座標 $q_i(t)$ は，汎関数

$$S \equiv \int_{t_a}^{t_b} L\left(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t\right) dt \tag{26}$$

を極小にするような関数形で与えられる．特に，式 (26) の汎関数を**作用**といい，ラグランジュ方程式は作用の変分がゼロ $\delta S = 0$ であることの帰結である．これを，**最小作用の原理**という．

3　ラグランジアンの不定性

簡単のため，一般座標が一つだけのラグランジアン $L(q,\dot{q},t)$ を考え，ラグランジアンに一般座標と時間の関数 $F(q,t)$ の導関数を加えたもの

$$\tilde{L}(q,\dot{q},t) \equiv L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}F(q,t) \tag{27}$$

を定義する．これを新しいラグランジアンと見なし，式 (27) による作用

$$\tilde{S} = \int_{t_a}^{t_b} \tilde{L}(q,\dot{q},t) dt \tag{28}$$

を考える．式 (27) を (28) に代入すると，

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}F(q,t) \right\} dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} L(q,\dot{q},t)dt + [F(q,t)]_{t_a}^{t_b} \\ &= S + F(q(t_a),t_a) - F(q(t_b),t_b) \end{aligned} \tag{29}$$

ここで，最後の式の $F(q(t_a),t_a)$ と $F(q(t_b),t_b)$ は，時刻 t_a と t_b での一般座標を関数 $F(q,t)$ に代入したものだから，定数である．従って，式 (29) の両辺の変分をとると消えてしまい，結局

$$\delta\tilde{S} = \delta S = 0 \tag{30}$$

となる．但し，最小作用の原理 $\delta S = 0$ を用いた．

式 (30) が意味するのは，新しいラグランジアン $\tilde{L}(q,\dot{q},t)$ による条件 $\delta\tilde{S} = 0$ は最小作用の原理 $\delta S = 0$ と等価であり，最終的に得られるラグランジュ方程式には何の影響も与えないということである．つまり，ラグランジアンには $F(q,t)$ の導関数 dF/dt を加えても良いという**不定性**があり，これを利用して問題を解き易くすることもある．