第 1 回　一般化座標とラグランジュ方程式

理学部　物理科学科　齊藤 国靖

2025 年 4 月 4 日

力学を学ぶと解る通り，力学の問題を解くのに**デカルト座標**にこだわる必要はない．問題に応じて他の座標系や新しい変数を導入した方が解き易いことがある．そこで，適切に選んだ座標や変数に対する形式的な運動方程式である**ラグランジュ方程式**を導入することから始める．

1　ラグランジュ方程式

1.1　デカルト座標の場合

まず，質量 m の質点の平面運動を考え，運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ を各成分に分けて書く．

$$m\ddot{x} = F_x \tag{1}$$
$$m\ddot{y} = F_y \tag{2}$$

質点に働く力が**保存力**の場合，ポテンシャルエネルギーを $U(\boldsymbol{r})$ として $\boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r})$ である．よって，力の各成分は

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{3}$$
$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \tag{4}$$

で与えられる．また，運動エネルギー

$$K = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \tag{5}$$

を質点の速度 $\dot{x}$ および $\dot{y}$ で微分すると

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$
$$\frac{\partial K}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

となるので，式 (1), (2) の左辺（**慣性項**）はそれぞれ

$$m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) \tag{6}$$
$$m\ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{y}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{y}}\right) \tag{7}$$

と書ける．従って，式 (3), (4), (6), (7) を運動方程式 (1), (2) に代入して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{y}}\right) = -\frac{\partial U}{\partial y} \tag{9}$$

が得られる．

ところで，運動エネルギーは位置 x, y に依らないので

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial y} = 0$$

となる．一方，ポテンシャルエネルギーは速度 $\dot{x}$, $\dot{y}$ に依らないので

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial U}{\partial \dot{y}} = 0$$

である．従って，式 (8), (9) を以下の様に書き直すことができる．

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(K-U)\right\} = \frac{\partial}{\partial x}(K-U) \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{y}}(K-U)\right\} = \frac{\partial}{\partial y}(K-U) \tag{11}$$

ここで，運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを差し引いた量を

ラグランジアン (Lagrangian)

$$L \equiv K - U$$

という．ラグランジアンを用いると，式 (10), (11) は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{13}$$

となり，これを**ラグランジュ方程式**という．

1.2　極座標の場合

質点の位置 x, y を**極座標**で表すと

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

であるから，質点の速度は

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \tag{14}$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \tag{15}$$

となり，加速度の各成分は

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\cos\theta - \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\sin\theta \end{aligned}\tag{16}$$

および

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \ddot{r}\sin\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\sin\theta + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\cos\theta \end{aligned}\tag{17}$$

となる．ここで，**加速度ベクトル**を $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$ とすると，図 1 の様に，$\boldsymbol{a}$ の各成分は

$$a_x = a_r\cos\theta - a_\theta\sin\theta$$
$$a_y = a_r\sin\theta + a_\theta\cos\theta$$

と書ける．但し，a_r と a_θ はそれぞれ加速度ベクトルの動径方向と角度方向の成分である．これと式 (16), (17) を比較すると

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

であることが解る．従って，極座標における運動方程式は

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F_r \tag{18}$$
$$m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = F_\theta \tag{19}$$

となる．但し，F_r と F_θ はそれぞれ力の動径方向と角度方向の成分である．

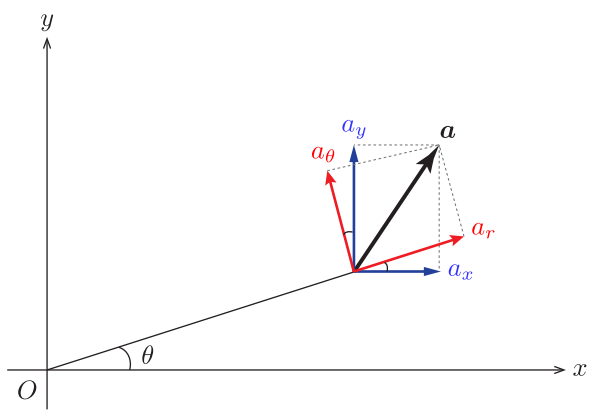

図 1

次に，動径方向の運動方程式 (18) を次のように書き直す．

$$m\ddot{r} = F_r + mr\dot{\theta}^2 \tag{20}$$

式 (5) の運動エネルギーに極座標での速度，式 (14), (15)，を代入して整理すると

$$K = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \tag{21}$$

であるから［計算略］，これを $\dot{r}$ および r で微分して

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$
$$\frac{\partial K}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2$$

が得られる．よって，式 (20) は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{r}}\right) = F_r + \frac{\partial K}{\partial r} \tag{22}$$

と書ける．さらに，質点に働く力が**中心力**の場合，ポテンシャルエネルギーを $U(r)$ として

$$F_r = -\frac{d}{dr}U(r)$$

である．また，ポテンシャルエネルギーは $\dot{r}$ を含まないので

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{r}} = 0$$

となる．従って，式 (22) は

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{r}}(K-U)\right\} = \frac{\partial}{\partial r}(K-U)$$

と書くことができ，ラグランジアン $L = K - U$ を用いて

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \tag{23}$$

となる．これが動径方向のラグランジュ方程式である．

一方，角度方向の運動方程式 (19) の左辺は次のように書き直せる．

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = F_\theta \tag{24}$$

式 (21) の運動エネルギーを $\dot{\theta}$ および θ で微分すると

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$
$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = 0$$

となる．また，ポテンシャルエネルギー $U(r)$ は $\dot{\theta}$ も θ も含まないので

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

である．さらに，中心力であれば $F_\theta = 0$ なので，角度方向の運動方程式 (24) は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0$$

と書ける．あるいは，

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}(K-U)\right\} = \frac{\partial}{\partial \theta}(K-U)$$

と書くこともできるので，ラグランジアンを用いて

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{25}$$

となる．これが角度方向のラグランジュ方程式である．

2　一般化座標

デカルト座標におけるラグランジュ方程式 (12), (13) も，極座標におけるラグランジュ方程式 (23), (25) も，変数の違いを除けば同じ形の方程式である．そこで，各変数を q_1 および q_2 という新しい変数で表せば，ラグランジュ方程式は以下のようにまとめられる．

ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{26}$$

ここで，新しい変数 q_i $(i = 1, 2)$ のことを**一般化座標**といい，デカルト座標では $q_1 = x$, $q_2 = y$, 極座標では $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ のことを意味する．

3　循環座標

ラグランジアンは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーから成るため，一般化座標とその時間微分の関数である．

$$L = L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \tag{27}$$

例えば，デカルト座標のラグランジアンは

$$L = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \tag{28}$$

である．一方，<u>中心力の場合，極座標のラグランジアンは θ を含んでいない</u>ため，

$$L = L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) \tag{29}$$

となる．この様に，ラグランジアンに含まれない座標のことを**循環座標**という．

4　一般化運動量

ラグランジアンを一般化座標の時間微分 $\dot{q}_i$ で微分したものを

一般化運動量

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{30}$$

という．例えば，デカルト座標では

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$
$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

となり，通常の運動量に一致する．一方，極座標では

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$
$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

となり，$p_2 = mr^2\dot{\theta}$ は**角運動量**の大きさを表す．

ラグランジュ方程式 (26) において，変数 q_i が循環座標であるとすると，q_i はラグランジアン L に含まれないので $\partial L/\partial q_i = 0$ となり，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$

が得られる．左辺に一般化運動量の表式 (30) を代入すれば

$$\frac{d}{dt}p_i = 0$$

となるので，

$$p_i = \text{const.}$$

である．つまり，循環座標に対応する一般化運動量は時間的に一定である．これを，

循環座標に**共役な**一般化運動量は**保存量**である

という．極座標の θ は循環座標であったから，それに対応する一般化運動量 $p_2 = mr^2\dot{\theta}$，つまり角運動量の大きさは時間的に一定である．

5　例題：支点が動く単振り子

長さ l の糸に質量 m の重りをぶら下げた単振り子を考える．単振り子の支点は固定されておらず，y 軸上を運動し，その座標が $y_0(t)$ で表されるとする．このとき，ラグランジュ方程式から重りの運動方程式を導け．

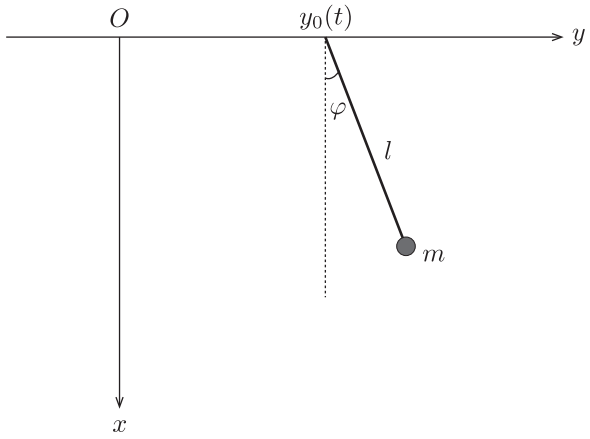

図 2

［解答］角度 φ を用いると，重りの x, y 座標はそれぞれ

$$\begin{aligned} x &= l\cos\varphi \\ y &= y_0(t) + l\sin\varphi \end{aligned}$$

で与えられる．従って，重りの速度の各成分は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -l\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} &= \dot{y}_0 + l\dot{\varphi}\cos\varphi \end{aligned}$$

である．重りの運動エネルギーにこれらを代入すると

$$\begin{aligned} K &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}_0\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{y}_0^2\right) \end{aligned} \tag{31}$$

となる．また，重力によるポテンシャルエネルギーの基準を重りの最下点にとれば，重りのポテンシャルエネルギーは

$$U = mgl\left(1 - \cos\varphi\right) \tag{32}$$

である．但し，重力加速度を g とする．式 (31) および (32) から，重りのラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= K - U \\ &= \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}_0\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{y}_0^2\right) - mgl\left(1 - \cos\varphi\right) \end{aligned} \tag{33}$$

で与えられる．以下，φ を一般化座標に用いると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= ml^2\dot{\varphi} + ml\dot{y}_0\cos\varphi \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -ml\dot{y}_0\dot{\varphi}\sin\varphi - mgl\sin\varphi\end{aligned} \tag{34}$$

となり，式 (34) を時間で微分して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{y}_0\cos\varphi - ml\dot{y}_0\dot{\varphi}\sin\varphi$$

となる．従って，重りのラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

に代入し，重りの運動方程式

$$ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{y}_0\cos\varphi + mgl\sin\varphi = 0$$

$$\therefore \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = -\frac{\ddot{y}_0}{l}\cos\varphi$$

が得られる．