第１回　一般座標とラグランジュ方程式

理学部　齊藤国靖 *

2023 年 4 月 5 日

これまで力学を学んだ経験から解るように，力学の問題を解くのに**デカルト座標**にこだわる必要はない．問題の性質に応じて，他の座標系や変数を使った方が解き易い場合が多々ある．第１回の目的は，適切に選んだ座標や変数に対する形式的な運動方程式を導入することである．

1　ラグランジュ方程式

1.1　デカルト座標の場合

まず，質量 m の質点の平面運動を考え，運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ を各成分に分けて書く．

$$m\ddot{x} = F_x \tag{1}$$
$$m\ddot{y} = F_y \tag{2}$$

質点に働く力が**保存力**の場合，ポテンシャルエネルギーを $U(\boldsymbol{r})$ として $\boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r})$ である．よって，力の各成分は

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{3}$$
$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \tag{4}$$

で与えられる．また，運動エネルギー

$$K = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \tag{5}$$

を質点の速度 $\dot{x}$ および $\dot{y}$ で微分すると

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{6}$$
$$\frac{\partial K}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \tag{7}$$

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

なので，式 (1) および (2) の慣性項はそれぞれ

$$m\ddot{x} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) \tag{8}$$

$$m\ddot{y} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{y}}\right) \tag{9}$$

と書き直すことができる．従って，式 (3), (4), (8), (9) を運動方程式 (1) および (2) に代入して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}}\right) = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{y}}\right) = -\frac{\partial U}{\partial y} \tag{11}$$

を得る．

ここで，運動エネルギー K は位置 x, y に依らないので

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial K}{\partial y} = 0 \tag{12}$$

一方，ポテンシャルエネルギーは速度 $\dot{x}$, $\dot{y}$ に依らないので

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial U}{\partial \dot{y}} = 0 \tag{13}$$

よって，式 (10) および (11) を以下のように書き直すことができる．

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(K-U)\right\} = \frac{\partial}{\partial x}(K-U) \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{y}}(K-U)\right\} = \frac{\partial}{\partial y}(K-U) \tag{15}$$

運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを差し引いた

$$L \equiv K - U \tag{16}$$

を**ラグランジアン** (Lagrangian) という．ラグランジアンを用いると，式 (14) および (15) は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{18}$$

となり，これを**ラグランジュ方程式**という．

1.2 極座標の場合

位置 x および y を**極座標**で表すと

$$x = r\cos\theta \tag{19}$$

$$y = r\sin\theta \tag{20}$$

であるから，速度は

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \tag{21}$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \tag{22}$$

であり，加速度の各成分は

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{r}\cos\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\cos\theta - \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\sin\theta\end{aligned} \tag{23}$$

および

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \ddot{r}\sin\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\sin\theta + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\cos\theta\end{aligned} \tag{24}$$

である．ここで，**加速度ベクトル**を $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$ とすると，$\boldsymbol{a}$ の各成分は

$$a_x = a_r\cos\theta - a_\theta\sin\theta \tag{25}$$
$$a_y = a_r\sin\theta + a_\theta\cos\theta \tag{26}$$

となる（図 1）．但し，a_r と a_θ はそれぞれ加速度ベクトルの動径方向と角度方向の成分である．これと式 (23) および (24) を比較すると

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \tag{27}$$
$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \tag{28}$$

であることが分かる．従って，極座標における運動方程式は

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F_r \tag{29}$$
$$m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = F_\theta \tag{30}$$

となる．但し，F_r と F_θ はそれぞれ力の動径方向と角度方向の成分である．

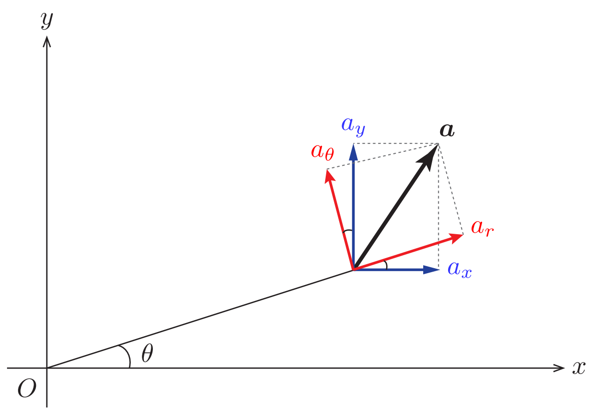

図 1

ここで，動径方向の運動方程式 (29) を次のように書き直す．

$$m\ddot{r} = F_r + mr\dot{\theta}^2 \tag{31}$$

式 (5) の運動エネルギーに極座標での速度，式 (21) および (22)，を代入して整理すると

$$K = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \tag{32}$$

であるから［計算略］，これを $\dot{r}$ および r で微分して

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \tag{33}$$

$$\frac{\partial K}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 \tag{34}$$

を得る．従って，式 (31) は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{r}}\right) = F_r + \frac{\partial K}{\partial r} \tag{35}$$

と書ける．特に，質点に働く力が**中心力**の場合，ポテンシャルエネルギーを $U(r)$ として

$$F_r = -\frac{d}{dr}U(r) \tag{36}$$

である．また，ポテンシャルエネルギーは $\dot{r}$ を含まないので

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{r}} = 0 \tag{37}$$

である．よって，式 (35) は

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{r}}(K-U)\right\} = \frac{\partial}{\partial r}(K-U) \tag{38}$$

と書けるので，ラグランジアン $L = K - U$ を用いて

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \tag{39}$$

となり，動径方向のラグランジュ方程式が得られる．

一方，角度方向の運動方程式 (30) の左辺は次のように書き直せる．

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = F_\theta \tag{40}$$

式 (32) の運動エネルギーを $\dot{\theta}$ および θ で微分すると

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \tag{41}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = 0 \tag{42}$$

となる．また，ポテンシャルエネルギー $U(r)$ は $\dot{\theta}$ も θ も含まないので

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \tag{43}$$

である．さらに，中心力であれば $F_\theta = 0$ なので，角度方向の運動方程式 (40) は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \tag{44}$$

と書ける．あるいは，

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}(K-U)\right\} = \frac{\partial}{\partial \theta}(K-U) \tag{45}$$

と書けるので，ラグランジアンを用いて

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{46}$$

となり，角度方向のラグランジュ方程式が得られる．

2　一般座標

デカルト座標におけるラグランジュ方程式 (17) および (18) も，極座標におけるラグランジュ方程式 (39) および (46) も，変数の違いを除けば同じ形の方程式である．そこで，各変数を q_1 および q_2 という新しい変数で表せば，ラグランジュ方程式は以下のようにまとめられる．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{47}$$

ここで，新しい変数 q_i $(i = 1, 2)$ を**一般座標**といい，例えばデカルト座標では $q_1 = x$ および $q_2 = y$，極座標では $q_1 = r$ および $q_2 = \theta$ を意味する．

3　循環座標

ラグランジアンは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーから成るため，一般座標とその時間微分の関数である．

$$L = L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \tag{48}$$

例えば，デカルト座標のラグランジアンは

$$L = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \tag{49}$$

である．一方，中心力の場合，極座標のラグランジアンは θ を含んでおらず，

$$L = L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) \tag{50}$$

である．この様に，ラグランジアンに含まれない座標のことを**循環座標**という．

4　一般運動量

ラグランジアンを一般座標の時間微分で微分したもの

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{51}$$

を**一般運動量**という．例えば，デカルト座標では

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{52}$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \tag{53}$$

となり，通常の運動量と一致する．一方，極座標では

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \tag{54}$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \tag{55}$$

となり，$p_2 = mr^2\dot{\theta}$ は**角運動量**の大きさを表す．

ラグランジュ方程式 (47) において，変数 q_i が循環座標であったとすると，q_i はラグランジアン L に含まれないので（$\partial L/\partial q_i = 0$ だから）

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \tag{56}$$

となる．左辺に一般運動量の表式 (51) を代入すれば

$$\frac{d}{dt}p_i = 0 \tag{57}$$

なので，$p_i = \mathrm{const.}$ つまり，循環座標に対応する一般運動量は時間的に一定である．これを，

循環座標に**共役な**一般運動量は**保存量**である

という．極座標の θ は循環座標であったから，それに対応する一般運動量 $p_2 = mr^2\dot{\theta}$，つまり角運動量の大きさは時間的に一定である．

5　例題：支点が動く単振り子

長さ l の糸に質量 m の重りをぶら下げた単振り子を考える．単振り子の支点は固定されておらず，y 軸上で運動し，その座標が $y_0(t)$ で表されるとする．このとき，ラグランジュ方程式から重りの運動方程式を導け．

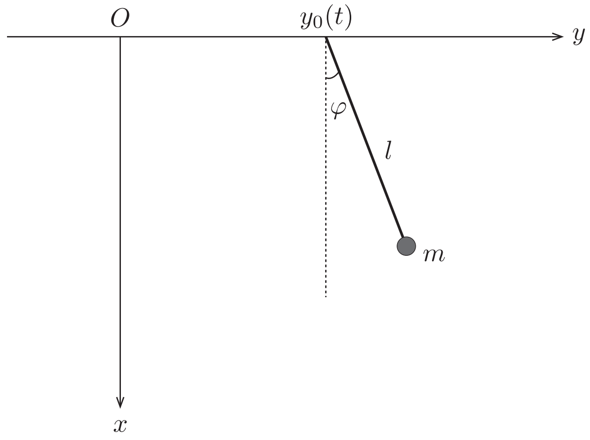

図 2

［解答］角度 φ を用いると，重りの x, y 座標はそれぞれ

$$x = l\cos\varphi \tag{58}$$
$$y = y_0(t) + l\sin\varphi \tag{59}$$

で与えられる．従って，重りの速度の各成分は

$$\dot{x} = -l\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{60}$$
$$\dot{y} = \dot{y}_0 + l\dot{\varphi}\cos\varphi \tag{61}$$

である．重りの運動エネルギーにこれらを代入すると

$$\begin{aligned} K &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}_0\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{y}_0^2\right) \end{aligned} \tag{62}$$

となる．また，重力によるポテンシャルエネルギーの基準を重りの最下点にとれば，重りのポテンシャルエネルギーは

$$U = mgl\left(1 - \cos\varphi\right) \tag{63}$$

である．但し，重力加速度を g とする．式 (62) および (63) から，重りのラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= K - U \\ &= \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{y}_0\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{y}_0^2\right) - mgl\left(1 - \cos\varphi\right) \end{aligned} \tag{64}$$

で与えられる．以下，φ を一般座標に用いると，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + ml\dot{y}_0\cos\varphi \tag{65}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -ml\dot{y}_0\dot{\varphi}\sin\varphi - mgl\sin\varphi \tag{66}$$

となり，式 (65) を時間で微分して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{y}_0\cos\varphi - ml\dot{y}_0\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{67}$$

となる．従って，重りのラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{68}$$

に代入して，重りの運動方程式

$$ml^2\ddot{\varphi} + ml\ddot{y}_0\cos\varphi + mgl\sin\varphi = 0 \tag{69}$$

$$\therefore \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = -\frac{\ddot{y}_0}{l}\cos\varphi \tag{70}$$

を得る．

6　課題：バネ振り子

バネの一端を固定し，他端に質量 m の重りをぶら下げて，鉛直面内で運動させる．バネ定数を k，バネの自然長を l とし，バネの質量は無視できるとする．このとき，重りのラグランジュ方程式を導け．