第１２回　２階線形微分方程式 − 非同次方程式の解法

理学部　齊藤国靖 *

2023 年 4 月 5 日

定数係数の２階線形微分方程式のうち，同次方程式については特性方程式を用いる方法で解くことができた．特性方程式の判別式で場合分けをして計算すると，必ず２つの解が得られることが解る．そこで，これら２つの解が一次独立であることを説明し，２階線形微分方程式の同次方程式の一般解は一次独立な２つの解の線形結合（重ね合わせ）で与えられることを示す．また，非同次項を含む非同次方程式の解き方についても解説する．

1　１次従属と１次独立

ベクトルと同様，関数についても**一次従属**と**一次独立**の概念がある．まず，２つの関数 $y_1(x)$ と $y_2(x)$ が互いに比例していれば，$y_1(x)$ と $y_2(x)$ は一次従属であるという．つまり，定数 c を用いて

$$y_1(x) = cy_2(x) \tag{1}$$

と書ける場合，$y_1(x)$ と $y_2(x)$ は一次従属である．反対に，互いに比例していなければ，$y_1(x)$ と $y_2(x)$ は一次独立であるという．つまり，両者をわり算した結果,

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = x \text{ の関数} \tag{2}$$

であれば，$y_1(x)$ と $y_2(x)$ は一次独立である．

1.1　線形結合

一般に，２つの関数の独立性を判定するには，それらの線形結合を考えればよい．$y_1(x)$ と $y_2(x)$ の線形結合がゼロであるとき,

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0 \tag{3}$$

２つの係数 c_1, c_2 が共にゼロでなければ（$c_1, c_2 \neq 0$)，$y_1(x)$ と $y_2(x)$ は一次従属である．一方，式 (3) が成り立つためには $c_1 = c_2 = 0$ でなければならない場合，$y_1(x)$ と $y_2(x)$ は一次独立である．

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

1.2　ロンスキアン

関数の独立性を判定する方法として，次の行列式

$$W(x) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \end{vmatrix} \tag{4}$$

を考えてもよい．$W(x)$ は**ロンスキアン**（または**ロンスキー行列**）と呼ばれるもので，$W(x) = 0$ であれば $y_1(x)$ と $y_2(x)$ は一次従属，$W(x) \neq 0$ であれば $y_1(x)$ と $y_2(x)$ は一次独立である．例えば，式 (1) が成立する場合，ロンスキアンは

$$\begin{aligned} W(x) &= y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} \\ &= c\left(y_2 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_2}{dx}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

なので，$y_1(x)$ と $y_2(x)$ は一次従属である．

2　重ね合わせの原理

定数係数の２階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0 \tag{5}$$

の特性方程式が異なる実解 λ_1, λ_2 をもつ場合，２つの解

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \ , \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

は，式 (2) の様に

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} = x \text{ の関数}$$

となるので一次独立である．式 (3) や (4) を用いても同じ様に一次独立であることを示せる．そこで，式 (5) の一般解は $y_1(x)$ と $y_2(x)$ の線形結合

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{6}$$

で与えられることを思い出せば（第１１回），

２階線形微分方程式の一般解は２つの一次独立な解の重ね合わせ（線形結合）である．

この様に，式 (5) の一次独立な解 $y_1(x)$ と $y_2(x)$ があるとき，これらの重ね合わせ（線形結合）$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ もまた式 (5) の解であることを**重ね合わせの原理**という．重ね合わせの原理は線形の微分方程式の性質であり，微分方程式の階数には依らない点に注意しよう．

3　非同次方程式の解法

定数係数の２階線形微分方程式が非同次項 $r(x)$ をもつ場合，

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=r(x) \tag{7}$$

これは非同次方程式である．式 (7) の解 $y_3(x)$ を“たまたま”見つけることができたとすると，

$$\frac{d^2y_3}{dx^2}+a\frac{dy_3}{dx}+by_3=r(x) \tag{8}$$

が成立する．このとき，$y_3(x)$ を**特解**と呼ぶ．そこで，同次方程式 (5) の一般解に特解を加えて，

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_3(x) \tag{9}$$

とすると，これは式 (7) を満たす．実際，式 (9) を (7) に代入すると，

$$c_1\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}+a\frac{dy_1}{dx}+by_1\right)+c_2\left(\frac{d^2y_2}{dx^2}+a\frac{dy_2}{dx}+by_2\right)+\frac{d^2y_3}{dx^2}+a\frac{dy_3}{dx}+by_3=r(x)$$

となるが，$y_1(x)$ と $y_2(x)$ は式 (5) の解なので，左辺の第１項，２項は共にゼロである．よって，これは式 (8) に等しく，式 (9) が (7) を満たしているのが解る．さらに，式 (9) には任意定数 c_1,c_2 が２個含まれているので，２階線形微分方程式 (7) の一般解でもある．従って，

非同次方程式の一般解は，同次方程式の一般解に特解を加えたものである．

２階線形微分方程式の同次方程式の解き方は既に知っているから，あとは非同次方程式の特解の求め方を理解すればよいことになる．

3.1　代入法

非同次方程式の特解は非同次項 $r(x)$ の関数形で決まる．例えば，

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+3y=x \tag{10}$$

の特解を求めるには，特解の形を

$$y_3(x)=ax+b$$

とすればよい．$y_3(x)$ を式 (10) に代入すると

$$-4a+3(ax+b)=x$$

$$\therefore (3a-1)x+3b-4a=0$$

これが常に成り立つためには，x の各係数がゼロなので，

$$a=\frac{1}{3}\ ,\qquad b=\frac{4}{3}a=\frac{4}{9}$$

である．よって，特解は

$$y_3(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{9}$$

と求まる．

以下，一般的な非同次項 $r(x)$ の形をいくつか分類して特解の求め方を説明する．

3.1.1　べき関数

A を定数として，非同次項が

$$r(x) = Ax^n \tag{11}$$

の場合，特解の形は n 次の多項式

$$y_3(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \tag{12}$$

を仮定すればよい．

3.1.2　三角関数

A, B を定数として，非同次項が

$$r(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x \tag{13}$$

の場合，特解の形は

$$y_3(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x \tag{14}$$

を仮定すればよい．ここで，非同次項と特解の位相 ωx が一致している点に注意しよう．

3.1.3　指数関数１

A を定数として，非同次項が

$$r(x) = Ae^{kx} \tag{15}$$

の場合，特解の形は

$$y_3(x) = ce^{kx} \tag{16}$$

を仮定すればよい．ここで，非同次項と特解の指数 kx が一致している点に注意しよう．上の $r(x)$ と $y_3(x)$ を式 (8) に代入すると，

$$c\left(k^2 + ak + b\right)e^{kx} = Ae^{kx}$$

$$\therefore c = \frac{A}{k^2 + ak + b}$$

となり, 特解の係数 c が求められる．但し, これは $k^2+ak+b \neq 0$ の場合に限られる．$k^2+ak+b = 0$ の場合は次の特解を用いる．

3.1.4　指数関数２

A を定数として，非同次項が

$$r(x) = Ax^n \tag{17}$$

であり，$k^2 + ak + b = 0$ の場合，特解の形は

$$y_3(x) = cxe^{kx} \tag{18}$$

を仮定すればよい．上の $r(x)$ と $y_3(x)$ を式 (8) に代入すると，

$$c\left\{x\left(k^2 + ak + b\right) + 2k + a\right\} e^{kx} = Ae^{kx}$$

となる．但し，$k^2 + ak + b = 0$ なので，特解の係数は

$$\therefore c = \frac{A}{2k + a}$$

となる．

3.2　演習

次の２階線形微分方程式の非同次方程式の特解を求めよ．

(1) べき関数

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = x^2$$

(2) 三角関数

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = \cos x$$

(3) 指数関数

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 3e^{2x} + 4e^{x} + 2e^{3x}$$