第１１回　２階線形微分方程式 – 同次方程式の解法

理学部　齊藤国靖 *

2023 年 4 月 5 日

１階線形微分方程式の解き方を踏まえ，２階線形微分方程式の解き方を学ぶ．特に，定数係数の場合に限定し，まずは同次方程式の解き方について説明する．定数係数の２階線形微分方程式が同次方程式であれば，特性方程式を用いる方法が最も強力である．

1　２階線形微分方程式

次の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x) \tag{1}$$

は**２階線形微分方程式**であり，非同次項が $r(x)=0$ であれば同次方程式，$r(x)\neq 0$ であれば非同次方程式である．同次方程式のうち，関数 $p(x)$, $q(x)$ が定数の場合，式 (1) は

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0 \tag{2}$$

となり，これは**定数係数**であるという．式 (2) は最も基本的なタイプの２階線形微分方程式である．

1.1　特性方程式

式 (2) を解くため，解の形を

$$y(x)=e^{\lambda x} \tag{3}$$

と仮定する．これを式 (2) に代入すると，各項は

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\lambda^2e^{\lambda x}\ ,\qquad a\frac{dy}{dx}=a\lambda e^{\lambda x}\ ,\qquad by=be^{\lambda x}$$

と計算できるので，

$$\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)e^{\lambda x}=0$$

となる．但し，$e^{\lambda x}>0$ なので，上式が成立するには

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{4}$$

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

でなければならない．式 (4) は式 (3) で導入した λ に関する方程式であり，**特性方程式**と呼ばれる．特性方程式は2次方程式なので，解の公式を使って解くと

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \tag{5}$$

となる．つまり，

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\ , \qquad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

とすれば，式 (3) より，$y(x) = e^{\lambda_1 x}$ と $y(x) = e^{\lambda_2 x}$ が式 (2) の解であることが解る．

ところで，c_1, c_2 を定数とすれば，$e^{\lambda_1 x}$ と $e^{\lambda_2 x}$ の線形結合

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{6}$$

も解である（実際に代入して確認せよ）．式 (6) は任意定数を2個含むので，2階微分方程式 (2) の一般解である．しかし，λ_1, λ_2 の性質によっては一般解にならない場合もある．λ_1, λ_2 の性質は**特性方程式の判別式** $D \equiv a^2 - 4b$ によって決まるので，以下，D について場合分けして考えよう．

1.1.1　$D > 0$ の場合

λ_1, λ_2 は異なる実解である．このとき，$e^{\lambda_1 x}$ と $e^{\lambda_2 x}$ は一次独立であり（後述），式 (6) が一般解となる．

1.1.2　$D < 0$ の場合

λ_1, λ_2 は複素共役である．p, q を実数として，

$$\lambda_1 = p + iq\ , \qquad \lambda_2 = \lambda_1^* = p - iq$$

とすると，式 (6) は

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{(p+iq)x} + c_2 e^{(p-iq)x} \\ &= e^{px}\left(c_1 e^{iqx} + c_2 e^{-iqx}\right) \end{aligned}$$

となる．ここで，オイラーの公式

$$e^{\pm iqx} = \cos qx \pm i \sin qx$$

を代入すると

$$y(x) = e^{px}\left\{(c_1 + c_2)\cos qx + i\,(c_1 - c_2)\sin qx\right\} \tag{7}$$

となり，これが一般解である．

1.1.3　$D=0$ の場合

λ_1, λ_2 は重解である．重解を $\lambda \equiv \lambda_1 = \lambda_2$ とすると，式 (6) は

$$y(x) = (c_1 + c_2)e^{\lambda x} \equiv Ce^{\lambda x}$$

となる．但し，$C \equiv c_1 + c_2$ とした．これは任意定数を１個しか含まないから，２階微分方程式 (2) の一般解にはならない．そこで，一般解を求めるため，任意定数 C を関数 $C(x)$ として定数変化法を使う．$y = C(x)e^{\lambda x}$ を式 (2) に代入すると，各項は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2C}{dx^2} + 2\lambda\frac{dC}{dx} + \lambda^2 C\right)e^{\lambda x} \ , \qquad a\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dC}{dx} + \lambda C\right)ae^{\lambda x} \ , \qquad by = Cbe^{\lambda x}$$

と計算できるので，

$$\left\{\frac{d^2C}{dx^2} + 2\lambda\frac{dC}{dx} + \lambda^2 C + \left(\frac{dC}{dx} + \lambda C\right)a + Cb\right\}e^{\lambda x} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2C}{dx^2} + (2\lambda + a)\frac{dC}{dx} + \left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)C = 0 \tag{8}$$

となる．ここで，λ は特性方程式 (4) の解なので，第３項の係数はゼロである．

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

また，特性方程式 (4) の解と係数の関係から，

$$2\lambda = -a$$

なので，第２項の係数もゼロである．つまり，式 (8) は

$$\frac{d^2C}{dx^2} = 0$$

であり，これを解いて $C(x) = c_1 x + c_2$ と求めることができる．但し，c_1, c_2 は新たな積分定数である．よって，重解 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ の場合の一般解は

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{\lambda x} \tag{9}$$

である．

1.2　例題：抵抗力が働くときのバネ振動

速度に比例した抵抗力が働くときのバネ振動の方程式

$$\ddot{x} + \nu\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{10}$$

を解け．但し，ν, ω は定数とし，初期条件を

$$x(0) = x_0 \ , \qquad \dot{x}(0) = 0$$

とせよ．

式 (10) は定数係数の２階線形微分方程式であり，同次方程式だから，解を $x(t) = e^{\lambda t}$ として代入すると，特性方程式

$$\lambda^2 + \nu\lambda + \omega^2 = 0 \tag{11}$$

が得られる．そこで，判別式 $D = \nu^2 - 4\omega^2$ によって場合分けをする．

a)　$D > 0$ の場合

特性方程式 (11) は異なる実解

$$\lambda_1 = \frac{-\nu + \sqrt{\nu^2 - 4\omega^2}}{2}\ , \qquad \lambda_2 = \frac{-\nu - \sqrt{\nu^2 - 4\omega^2}}{2}$$

をもつ．これらを

$$\gamma \equiv \sqrt{\frac{\nu^2}{4} - \omega^2}$$

を用いて書き換えると，

$$\lambda_1 = -\frac{\nu}{2} + \gamma\ , \qquad \lambda_2 = -\frac{\nu}{2} - \gamma$$

となる．よって，式 (10) の一般解は

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\therefore x(t) = \left(c_1 e^{\gamma t} + c_2 e^{-\gamma t}\right) e^{-\nu t/2} \tag{12}$$

である．式 (12) を t で微分すると

$$\dot{x}(t) = \gamma \left(c_1 e^{\gamma t} - c_2 e^{-\gamma t}\right) e^{-\nu t/2} - \frac{\nu}{2}\left(c_1 e^{\gamma t} + c_2 e^{-\gamma t}\right) e^{-\nu t/2}$$

なので，初期条件より，

$$x(0) = c_1 + c_2 = x_0$$
$$\dot{x}(0) = \gamma(c_1 - c_2) - \frac{\nu}{2}(c_1 + c_2) = 0$$

を得る．これらを c_1, c_2 について解くと

$$c_1 = \frac{x_0}{2}\left(1 + \frac{\nu}{2\gamma}\right)\ , \qquad c_2 = \frac{x_0}{2}\left(1 - \frac{\nu}{2\gamma}\right)$$

なので，これを式 (12) に代入して答えを得る．

b)　$D < 0$ の場合

特性方程式 (11) は複素共役の解

$$\lambda_1 = -\frac{\nu}{2} + i\Omega\ , \qquad \lambda_2 = -\frac{\nu}{2} - i\Omega$$

をもつ．但し，

$$\Omega \equiv \sqrt{\omega^2 - \frac{\nu^2}{4}}$$

とした．よって，式 (10) の一般解は

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$\therefore x(t) = e^{-\nu t/2}\left(c_1 e^{i\Omega t} + c_2 e^{-i\Omega t}\right) \tag{13}$$

である．オイラーの公式を使えば，

$$x(t) = e^{-\nu t/2}\left\{(c_1 + c_2)\cos\Omega t + i(c_1 - c_2)\sin\Omega t\right\} \tag{14}$$

となる．式 (13) を t で微分すると

$$\dot{x}(t) = -\frac{\nu}{2}e^{-\nu t/2}\left(c_1 e^{i\Omega t} + c_2 e^{-i\Omega t}\right) + i\Omega e^{-\nu t/2}\left(c_1 e^{i\Omega t} - c_2 e^{-i\Omega t}\right)$$

なので，初期条件より，

$$x(0) = c_1 + c_2 = x_0$$
$$\dot{x}(0) = -\frac{\nu}{2}(c_1 + c_2) + i\Omega(c_1 - c_2) = 0$$

を得る．つまり，

$$c_1 + c_2 = x_0\ , \qquad i(c_1 - c_2) = \frac{\nu}{2\Omega}x_0$$

なので，これを式 (14) に代入して，

$$x(t) = x_0 e^{-\nu t/2}\left(\cos\Omega t + \frac{\nu}{2\Omega}\sin\Omega t\right) \tag{15}$$

が答えである．

c)　$D = 0$ の場合

特性方程式 (11) は重解

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\nu}{2}$$

をもつ．このとき，一般解は

$$x(t) = (c_1 t + c_2)e^{-\nu t/2} \tag{16}$$

である．式 (16) を t で微分すると

$$\dot{x}(t) = c_1 e^{-\nu t/2} - \frac{\nu}{2}(c_1 t + c_2)e^{-\nu t/2}$$

なので，初期条件より，

$$x(0) = c_2 = x_0$$
$$\dot{x}(0) = c_1 - \frac{\nu}{2}c_2 = 0$$

を得る．つまり，

$$c_1 = \frac{\nu}{2}x_0 \ , \qquad c_2 = x_0$$

なので，これを式 (16) に代入して，

$$x(t) = x_0 \left(\frac{\nu}{2}t + 1\right) e^{-\nu t/2} \tag{17}$$

が答えである．

(補足)　バネ振動の方程式 (10) は，特性方程式 (11) の判別式 $D = \nu^2 - 4\omega^2$ の値によって異なる解をもつ．例えば，$D > 0$ の場合は

$$D = \nu^2 - 4\omega^2 > 0 \ , \qquad \therefore \omega^2 < \frac{\nu^2}{4}$$

なので，バネの固有振動数 ω が $\nu/2$ よりも小さければ，式 (12) の様な振動しない解が得られ，これを**過減衰**という．逆に，ω が $\nu/2$ よりも大きければ，式 (15) の様に振動しながら減衰する解が得られる．また，$\omega = \nu/2$，つまり $D = 0$ の場合は式 (17) が解であり，振動しない場合とする場合の境い目にあり，**臨界減衰**と呼ばれる．この様に，バネ振動の方程式 (10) の解は，固有振動数 ω や抵抗係数 ν の大きさが決まってはじめて求まるのである．

1.3　演習

次の2階線形微分方程式を解け．

(1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

(2)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$