第１０回　１階線形微分方程式

理学部　齊藤国靖 *

2023 年 4 月 5 日

常微分方程式の解き方を体系的に学ぶには幾つかのステップがある．まず，微分方程式は線形か非線形かで大別され，さらに階数に応じて１階のもの，２階のものと順番に理解を進めていく．第１０回では，最初のステップである１階線形微分方程式の解き方を習得し，その後の２階線形微分方程式，定数係数や変数係数の問題に向けた基礎固めをする．

1　線形微分方程式

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{1}$$

を見てみると，求める関数 $y(x)$ が各項に１個含まれるか，含まれないかの何れかである．この様に，方程式の各項に求める関数がせいぜい１個しかないものを**線形**であるといい，式 (1) は**線形微分方程式**と呼ばれる．また，微分方程式の階数も含めて，**１階線形微分方程式**と呼ばれることもある．同じように考えて，

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x)$$

は**２階線形微分方程式**であり，より一般に

$$\frac{d^n}{dx^n}y + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$$

は n **階線形微分方程式**ということになる．

1.1　同次・非同次方程式

まず，最も基本的な１階線形微分方程式の解き方を考えよう．式 (1) において，$p(x)$ と $q(x)$ は x のある関数である．もし，$q(x) = 0$ であれば

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{2}$$

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

となり，全ての項に求める関数が１個だけ含まれる．この様な場合，式 (2) は**同次方程式**であるという．一方，$q(x) \neq 0$ の場合，式 (1) は**非同次方程式**であるという．ここで，$q(x)$ は y を含まない関数であり，非同次方程式であることを表す項なので，**非同次項**と呼ばれる．

式 (2) の様に，１階線形微分方程式が同次方程式であれば，変数分離法で解くことができる．式 (2) を x と y で分離すると，

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

となる．両辺を積分すると

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

$$\therefore \log|y| = -\int p(x)dx + c$$

となる．ここで，c は積分定数である．従って，

$$y(x) = \pm C e^{-\int p(x)dx} \tag{3}$$

が式 (2) の一般解である．但し，$C \equiv e^c$ は任意定数である．

1.2　定数変化法

一方，非同次方程式 (1) は変数分離型ではないので，別の方法で解かなければならない．まず，同次方程式の一般解である式 (3) の任意定数 C を x の関数にして書き直すと

$$y(x) = C(x) e^{-\int p(x)dx} \tag{4}$$

となる．但し，簡単のため $\pm C$ のうち C の方だけを考え，$C(x)$ が新たに導入された関数である．

次に，式 (4) が非同次方程式 (1) の解であると仮定する。これを確認するため，式 (4) を (1) に代入すると，

$$\frac{d}{dx}\left\{C(x)e^{-\int p(x)dx}\right\} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \tag{5}$$

となる．ここで，左辺の第１項は

$$\frac{d}{dx}\left\{C(x)e^{-\int p(x)dx}\right\} = \frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

と計算できるので，これを式 (5) に戻すと

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\therefore \frac{dC}{dx} = e^{\int p(x)dx} q(x)$$

となる．これを解くと，新たに導入した関数が

$$C(x) = \int e^{f(x)} q(x)dx + c' \tag{6}$$

であることが解る．但し，$f(x) \equiv \int p(x)dx$ であり，c' は積分定数である．

もし，$C(x)$ が式 (6) で与えられれば，式 (4) は非同次方程式 (1) を満たすことになり，最初の仮定が成立する．つまり，式 (1) の一般解は，式 (6) を (4) に代入した

$$\begin{aligned} y(x) &= \left\{ \int e^{f(x)} q(x)dx + c' \right\} e^{-\int p(x)dx} \\ &= c' e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int e^{f(x)} q(x)dx \end{aligned} \tag{7}$$

で与えられる．この様な手順で非同次方程式を解くことを**定数変化法**という．

定数変化法で求めた式 (7) の右辺の第１項は同次方程式の一般解である式 (3) と同じ形である．そこで，第１項は**同次解**と呼ばれ，第２項の方は**特解**と呼ばれることがある．つまり，

［非同次方程式の一般解］ ＝ ［同次方程式の一般解］ ＋ ［特解］

という形であることに注意しよう．

1.3　例題

次の１階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} - y = x \tag{8}$$

を解く．これは非同次方程式なので，定数変化法を用いる．そのために，まずは同次方程式

$$\frac{dy}{dx} - y = 0$$

を解く．これは簡単に解くことができて，

$$y(x) = Ce^x$$

が一般解である．次に，任意定数 C が x の関数 $C(x)$ であると仮定して，

$$y(x) = C(x)e^x \tag{9}$$

を非同次方程式 (8) に代入すると，

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx}\{C(x)e^x\} - C(x)e^x = x \\ \therefore \frac{dC}{dx}e^x = x \\ \therefore \frac{dC}{dx} = xe^{-x} \end{gathered}$$

よって，新たに導入した関数は

$$C(x) = \int xe^{-x}dx + c$$

で与えられる．但し，c は積分定数である．ここで，右辺の積分は計算することができて，

$$C(x) = -(1+x)e^{-x} + c$$

である．従って，$C(x)$ を式 (9) に代入して，

$$y(x) = ce^{x} - (1+x)$$

が式 (8) の一般解である．

1.4　演習

質点が速さに比例する空気抵抗を受ける場合の運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \eta v$$

を速さ v について解け．但し，m は質点の質量，g は重力加速度の大きさ，η は空気抵抗の係数とし，初期条件を $v(0) = 0$ とする．

2　微分方程式の線形化

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^{a} \tag{10}$$

を見てみると，右辺の指数が $a = 0, 1$ のときは線形微分方程式となるが，$a \neq 0, 1$ のときは線形ではない．この様な場合は**非線形**であるといい，一般に非線形微分方程式を解くのは困難である．しかし，特定の非線形微分方程式であれば，線形微分方程式になおして解くことができる．

2.1　ベルヌイ方程式

式 (10) は**ベルヌイ方程式**と呼ばれる微分方程式である．これを解くために，両辺に y^{-a} をかけると

$$y^{-a}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-a} = q(x) \tag{11}$$

となる．ここで，新しい関数 $u(x) \equiv y^{1-a}$ を導入すると，その導関数は

$$\frac{du}{dx} = (1-a)y^{-a}\frac{dy}{dx}$$

なので，これを式 (11) に代入して

$$\frac{du}{dx} + (1-a)p(x)u(x) = (1-a)q(x) \tag{12}$$

を得る．式 (12) は $u(x)$ に関する 1 階線形微分方程式なので，定数変化法などを使って解くことができる．$u(x)$ が求まれば，$y = u(x)^{1/(1-a)}$ によって，ベルヌイ方程式 (10) の解が求められる．この様に，非線形微分方程式を線形微分方程式になおすことを**線形化**という．

2.2　リカッチ方程式

もう一つの非線形微分方程式の例として，

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y^2 + q(x)y = r(x) \tag{13}$$

を考える．これは**リカッチ方程式**と呼ばれる微分方程式であり，求める関数を適切に変形することで，ベルヌイ方程式に帰着できる．まず，式 (13) の特解 $y = u(x)$ をたまたま見つけたとする（これは一般解ではない！）．そこで，一般解の形が

$$y = u(x) + z(x) \tag{14}$$

であると仮定して，新しい関数 $z(x)$ を導入する．式 (14) を (13) に代入すると

$$\frac{d}{dx}\{u(x)+z(x)\} + p(x)\{u(x)+z(x)\}^2 + q(x)\{u(x)+z(x)\} = r(x)$$

$$\therefore \left[\frac{du}{dx} + p(x)u(x)^2 + q(x)u(x)\right] + \frac{dz}{dx} + p(x)\left\{2u(x)z(x) + z(x)^2\right\} + q(x)z(x) = r(x)$$

となる．ここで，$u(x)$ は式 (13) を満たすので，

$$\frac{du}{dx} + p(x)u(x)^2 + q(x)u(x) = r(x)$$

が成り立ち，結局

$$\frac{dz}{dx} + \{2u(x)p(x) + q(x)\}z(x) = -p(x)z(x)^2$$

となる．これは，ベルヌイ方程式 (10) で $a = 2$ にしたものと同じ形なので，前述の方法で $z(x)$ を求めることができる．従って，式 (14) より，リカッチ方程式 (13) の解が求められる．

2.3　例題

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} - 3y^2 - \frac{y}{x} + 12x^2 = 0 \tag{15}$$

を解く．これは非線形微分方程式であるが，$y = 2x$ が特解になっていることが解る．実際，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2x) - 3(2x)^2 - \frac{2x}{x} + 12x^2 &= 2 - 12x^2 - 2 + 12x^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

となり，式 (15) を満たしている．

次に，一般解の形が

$$y = 2x + z(x) \tag{16}$$

であると仮定して，式 (16) を (15) に代入すると，

$$\frac{dz}{dx} - 3\left\{4xz(x) + z(x)^2\right\} - \frac{z(x)}{x} = 0$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} - \left(12x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 3z(x)^2 \tag{17}$$

となる．これは，ベルヌイ方程式 (10) で $a = 2$ にしたものと同じ形であり，$z(x)$ は求めることができる．

2.4　演習

上のベルヌイ方程式 (17) を解き，非線形微分方程式 (15) の一般解を求めよ．