第 7 回　1 階線形微分方程式

理学部　物理科学科　齊藤 国靖

2025 年 6 月 4 日

常微分方程式の解き方を体系的に学ぶには幾つかのステップがある．まず，微分方程式は線形か非線形かで大別され，さらに階数に応じて 1 階のもの，2 階のものと順番に理解を進めていく．今回は，最初のステップである 1 階線形微分方程式の解き方を習得し，これから学ぶ 2 階線形微分方程式，定数係数や変数係数の問題に向けた基礎固めをする．

1　線形微分方程式

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{1}$$

を見てみると，求める関数 $y(x)$ が各項に 1 個含まれるか，含まれないかの何れかである．この様に，方程式の各項に求める関数がせいぜい 1 個しかないものを**線形**であるといい，式 (1) は**線形微分方程式**と呼ばれる[*1]．あるいは，微分方程式の階数も含めて，1 階線形微分方程式と呼ばれることもある．同じ様に考えると，

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x)$$

は 2 階線形微分方程式であり，一般に線形微分方程式は次の様に書ける．

n 階線形微分方程式

$$\frac{d^n}{dx^n}y + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$$

1.1　同次・非同次方程式

最も基本的な 1 階線形微分方程式の解き方を考えよう．式 (1) において，$p(x)$ と $q(x)$ は x の関数である．もし，$q(x) = 0$ であれば

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{2}$$

[*1] 線形ではないものを**非線形**といい，非線形な微分方程式のことを**非線形微分方程式**という．

となり，全ての項に求める関数が 1 個だけ含まれる．この場合，式 (2) は**同次方程式**（あるいは斉次方程式）であるという．一方，$q(x) \neq 0$ であれば，式 (1) は**非同次方程式**（あるいは非斉次方程式）であるといい，$q(x)$ のことを**非同次項**（あるいは非斉次項）という．

式 (2) の様に，1 階線形微分方程式が同次方程式であれば，変数分離法で解くことができる．式 (2) を形式的に x と y で分離すると

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

となり，両辺を積分すれば

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

$$\therefore \log|y| = -\int p(x)dx + c$$

となる．但し，c は積分定数である．従って，

$$y(x) = \pm Ce^{-\int p(x)dx} \tag{3}$$

である．式 (3) は任意定数 $C \equiv e^c$ を一つだけ含むから，式 (2) の一般解である．

1.2　定数変化法

式 (1) の様に，非同次方程式は変数分離型ではないので，別の方法で解かなければならない．まず，同次方程式 (2) の一般解である式 (3) の任意定数 C をx の関数 $C(x)$ にして書き直すと

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{4}$$

となる．但し，簡単のため $\pm C$ のうち C の方だけを考えることにする．次に，式 (4) が非同次方程式の解であると仮定し，これを式 (1) に代入すると

$$\frac{d}{dx}\left\{C(x)e^{-\int p(x)dx}\right\} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \tag{5}$$

となる．上式の左辺の第 1 項は

$$\frac{d}{dx}\left\{C(x)e^{-\int p(x)dx}\right\} = \frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

と計算できるので，式 (5) は

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} = q(x)\ , \qquad \therefore \frac{dC}{dx} = e^{\int p(x)dx}q(x)$$

となる．従って，これを解けば，x の関数が

$$C(x) = \int e^{f(x)}q(x)dx + c' \tag{6}$$

で与えられる．但し，$f(x) \equiv \int p(x)dx$ であり，c' は積分定数である．

もし，$C(x)$ が式 (6) で与えられれば，式 (4) は非同次方程式 (1) を満たすことになり，最初の仮定が成立する．つまり，式 (1) の一般解は，式 (6) を (4) に代入した

$$\begin{aligned} y(x) &= \left\{ \int e^{f(x)} q(x) dx + c' \right\} e^{-\int p(x)dx} \\ &= c' e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int e^{f(x)} q(x) dx \end{aligned} \tag{7}$$

である．以上の手順で非同次方程式を解くことを**定数変化法**という．

定数変化法で求めた式 (7) の右辺の第 1 項は同次方程式の一般解である式 (3) に一致する．そこで，式 (7) の右辺の第 1 項を**同次解**，第 2 項を**特解**と呼ぶことがある．つまり，

非同次方程式の一般解　=　同次方程式の一般解　+　特解

という関係があることに注意しよう．

1.3　例題

次の 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} - y = x \tag{8}$$

を解く．これは非同次方程式なので，定数変化法を用いる．そのために，まずは同次方程式

$$\frac{dy}{dx} - y = 0$$

を解く．これは簡単に解くことができて，

$$y(x) = Ce^x$$

が一般解である．次に，任意定数 C が x の関数 $C(x)$ であると仮定して，

$$y(x) = C(x)e^x \tag{9}$$

を非同次方程式 (8) に代入すると

$$\frac{d}{dx}\{C(x)e^x\} - C(x)e^x = x$$

となる．つまり，

$$\frac{dC}{dx}e^x = x\ , \qquad \therefore \frac{dC}{dx} = xe^{-x}$$

であるから，x の関数は

$$C(x) = \int xe^{-x} dx + c$$

で与えられる．但し，c は積分定数である．上式の右辺の積分は計算することができて，

$$C(x) = -(1+x)e^{-x} + c$$

である．従って，$C(x)$ を式 (9) に代入し，

$$y(x) = ce^{x} - (1+x)$$

が式 (8) の一般解である．

- 演習
  質点が速さに比例する空気抵抗を受ける場合の運動方程式

  $$m\frac{dv}{dt} = mg - \eta v$$

  を速さ v について解け．但し，m は質点の質量，g は重力加速度の大きさ，η は空気抵抗の係数とし，初期条件を $v(0) = 0$ とする．

2　微分方程式の線形化

次の微分方程式

ベルヌイ方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^{a} \tag{10}$$

は，右辺の指数が $a = 0, 1$ のときは線形微分方程式であり，$a \neq 0, 1$ のときは非線形微分方程式である．一般に，非線形微分方程式を解くことは困難であるが，式 (10) の様な非線形微分方程式は線形微分方程式に変形して解くことができる．

2.1　ベルヌイ方程式

式 (10) を解くために，両辺に y^{-a} をかけると

$$y^{-a}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-a} = q(x) \tag{11}$$

となる．ここで，新しい関数 $u(x) \equiv y^{1-a}$ を導入すると，その導関数は

$$\frac{du}{dx} = (1-a)y^{-a}\frac{dy}{dx}$$

なので，これを式 (11) に代入し，

$$\frac{du}{dx} + (1-a)p(x)u(x) = (1-a)q(x) \tag{12}$$

が得られる．式 (12) は $u(x)$ に関する 1 階線形微分方程式なので，変数分離法や定数変化法によって解くことができる．$u(x)$ が求まれば，$y = u(x)^{1/(1-a)}$ として式 (10) の解が求められる．この様に，非線形微分方程式を線形微分方程式に変形することを**線形化**という．

2.2　リカッチ方程式

もう一つの非線形微分方程式の例として，

リカッチ方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y^2 + q(x)y = r(x) \tag{13}$$

を考える．この方程式は，求める関数を適切に変形することで，ベルヌイ方程式に帰着することができる．まず，式 (13) の特解 $y = u(x)$ をたまたま見つけたとする（これは一般解ではない！）．そこで，一般解の形が

$$y = u(x) + z(x) \tag{14}$$

であると仮定し，新しい関数 $z(x)$ を導入する．式 (14) を (13) に代入すると

$$\frac{d}{dx}\left\{u(x) + z(x)\right\} + p(x)\left\{u(x) + z(x)\right\}^2 + q(x)\left\{u(x) + z(x)\right\} = r(x)$$

$$\therefore \left[\frac{du}{dx} + p(x)u(x)^2 + q(x)u(x)\right] + \frac{dz}{dx} + p(x)\left\{2u(x)z(x) + z(x)^2\right\} + q(x)z(x) = r(x)$$

となる．ここで，$u(x)$ は式 (13) を満たすので，

$$\frac{du}{dx} + p(x)u(x)^2 + q(x)u(x) = r(x)$$

が成り立ち，結局

$$\frac{dz}{dx} + \left\{2u(x)p(x) + q(x)\right\}z(x) = -p(x)z(x)^2$$

となる．これは，ベルヌイ方程式 (10) で $a = 2$ としたものと同じ形なので，前述の方法で $z(x)$ を求めることができる．従って，式 (14) より，リカッチ方程式 (13) の解が求められる．

2.3　例題

次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} - 3y^2 - \frac{y}{x} + 12x^2 = 0 \tag{15}$$

を解く．これは非線形微分方程式であるが，$y = 2x$ が特解になっていることが解る．実際，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(2x) - 3(2x)^2 - \frac{2x}{x} + 12x^2 &= 2 - 12x^2 - 2 + 12x^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

となり，式 (15) を満たしている．

次に，一般解の形が

$$y = 2x + z(x) \tag{16}$$

であると仮定し，式 (16) を (15) に代入すると，

$$\frac{dz}{dx} - 3\left\{4xz(x) + z(x)^2\right\} - \frac{z(x)}{x} = 0$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} - \left(12x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 3z(x)^2 \tag{17}$$

となる．これは，ベルヌイ方程式 (10) で $a = 2$ にしたものと同じ形であり，$z(x)$ は求めることができる．

- 演習
  上のベルヌイ方程式 (17) を解き，非線形微分方程式 (15) の一般解を求めよ．