第 9 回　常微分方程式の初等解法

理学部　齊藤国靖 *

2023 年 4 月 5 日

力学で学ぶ運動方程式をはじめ，物理学のあらゆる分野で微分方程式が登場する．微分方程式を解くことが物理学の問題を解くことに直結する場合も多い．そこで，第 9 回からは微分方程式の解説を始め，まずは基本的な常微分方程式の初等解法について説明する．

1　常微分方程式

1.1　微分方程式とは

次の方程式

$$\frac{dy}{dx} = ay \tag{1}$$

を満たす関数 $y(x)$ を考える．但し，a は定数とする．まず，$y(x) = e^{ax}$ とすれば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right) = ae^{ax} = ay$$

となり，式 (1) を満たしている．さらに，C を定数として $y(x) = Ce^{ax}$ とすれば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(Ce^{ax}\right) = Cae^{ax} = ay$$

なので，これも式 (1) を満たしている．

式 (1) の様に，$y(x)$ とその導関数 dy/dx から成る方程式を**微分方程式**といい，$y(x)$ を求めることを**微分方程式を解く**という．式 (1) を満たす関数はいくつか考えられるが，$y(x) = e^{ax}$ は Ce^{ax} で $C = 1$ とした場合なので，$y(x) = Ce^{ax}$ の方がより一般的である．この様に，**任意定数**（**積分定数**ともいう）C を含む解を**一般解**という．

任意定数 C を決めるには何か条件を付け加えればよい．例えば，$x = 0$ のとき $y(0) = 10$ であれば，$C = 10$ でなければならない．この様に，$x = 0$ における関数値を与える条件を**初期条件**という．

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

1.2　微分方程式の分類

速度に比例する抵抗力を受ける質点の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \eta\frac{dx}{dt} \tag{2}$$

も微分方程式であり，これを解けば質点の座標 $x(t)$ が求まる．一般に，微分方程式はある関数 F を用いて

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

と書くことができる．微分方程式に含まれる導関数の最高階数 n をその微分方程式の**階数**という．例えば，式 (1) の階数は 1 で，式 (2) の階数は 2 である．

微分方程式 (1) や (2) の解，$y(x)$ や $x(t)$ はいずれも 1 変数関数である．この様に，1 変数関数の微分方程式のことを**常微分方程式**と呼ぶ．また，式 (1) と (2) は階数も含めて 1 **階常微分方程式**，2 **階常微分方程式**と呼ぶこともある．なお，微分方程式が多変数関数 $f(x, y)$ とその**偏微分**を含む場合，**偏微分方程式**と呼ぶが，本講義では扱わない．

1.3　一般解

式 (1) の解として，$y(x) = Ce^{ax}$ の様に任意定数 C を含むものを一般解と呼ぶ．一般解にいくつの任意定数が含まれるかは微分方程式の階数によって決まり，一般に

「微分方程式の一般解に含まれる任意定数の個数は微分方程式の階数に等しい．」

例えば，次の 2 階常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a \tag{3}$$

を考える．但し，a は定数とする．式 (3) を解くため，両辺を x で積分すると

$$\frac{dy}{dx} = ax + c_1$$

となる．ここで，c_1 は積分定数である．これをさらに x で積分すると

$$y(x) = \frac{a}{2}x^2 + c_1x + c_2 \tag{4}$$

となり，式 (3) の解が得られる．但し，c_2 は積分定数である．式 (4) は任意定数 c_1, c_2 を含むので，式 (3) の一般解である．また，式 (4) に含まれる任意定数の個数は式 (3) の微分の階数に等しい．この様に，２階の微分方程式を解くため，x で 2 回積分した結果，２個の積分定数が得られ，一般解は自ずと 2 個の任意定数 c_1, c_2 を含むのである．

1.4　演習

2 階常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{5}$$

を解け．また，任意定数が 2 個あることを確認せよ．

2　変数分離型

これまでの例の様に，簡単な微分方程式であれば直感的に解けるかもしれないが，微分方程式が複雑になるとそうはいかない．そこで，微分方程式を解くための様々なテクニックがあり，まずは最も初等的な**変数分離法**を解説する．

2.1　一般的な手順

関数 $y(x)$ に関する 1 階常微分方程式が

$$\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y) \tag{6}$$

の形に書けるとき，これを**変数分離型**という．ここで，右辺は x の関数 $X(x)$ と y の関数 $Y(y)$ の積で与えられる．但し，$y(x)$ は関数なので，$Y(y) = Y(y(x))$ は合成関数であることに注意しよう．式 (6) を解くため，まず両辺を $Y(y)$ で割る．

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{dy}{dx} = X(x)$$

この両辺を x で積分すると

$$\int \frac{1}{Y(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int X(x)dx$$

となるが，左辺は**合成関数の積分**

$$\int \frac{1}{Y(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{1}{Y(y)}dy$$

を使って変形できる．よって，

$$\int \frac{1}{Y(y)}dy = \int X(x)dx \tag{7}$$

となり，両辺の積分を実行すれば，微分方程式 (6) の解が求まる．

2.2　例題

1 階常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -x(y-1) \tag{8}$$

を解く．但し，$y>1$ とする．

右辺は $X(x)=-x$ と $Y(y)=y-1$ の積なので変数分離型である．両辺を $y-1$ で割ると

$$\frac{1}{y-1}\frac{dy}{dx}=-x$$

なので，x で積分して

$$\int\frac{1}{y-1}\frac{dy}{dx}dx=-\int xdx \qquad \therefore\int\frac{1}{y-1}dy=-\int xdx$$

となる．$y>1$ に注意して，両辺の積分を実行すると

$$\log(y-1)=-\frac{x^2}{2}+c$$

となる．但し，c は積分定数である．よって，

$$y-1=e^{-x^2/2}e^c \qquad \therefore y=Ce^{-x^2/2}+1 \tag{9}$$

が微分方程式 (8) の解である．ここで，$C\equiv e^c$ は任意定数である．

2.3　形式的な手順

上述の変数分離法を少し違う方法で説明しよう．式 (6) を次のように書き換えたとする．

$$\frac{1}{Y(y)}dy=X(x)dx$$

この書き換えは形式的なもので厳密には正しくないが，結果的に変数分離法と同じになる．上の式の左辺は y だけ，右辺は x だけで表されるため，**変数を両辺に分離した形**になっている．これが「変数分離法」という名前の由来である．両辺をそれぞれ積分すると

$$\int\frac{1}{Y(y)}dy=\int X(x)dx$$

となり，式 (7) と一致するのが解る．この様な方法で問題を解いても間違いではない．

2.4　演習

(1)　1 階常微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=1-y^2 \tag{10}$$

を解け．但し，$y>1$ とする．

(2)　1 階常微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=a(1-x)^2 \tag{11}$$

を解け．但し，a は定数とし，初期条件を $x(0)=0$ とする．

3　同次型

一見，変数分離型ではない微分方程式も，式変形や変数変換を行うことで変数分離型に帰着する場合がある．次に説明する**同次型**の微分方程式もその一つである．

まず，関数 $y(x)$ に関する 1 階常微分方程式が，ある関数 f を用いて

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{12}$$

と書けるとき，これを同次型という．一般に，次数の等しい２つの**同次式**

$$\begin{aligned} p(x, y) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_n y^n \\ q(x, y) &= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + b_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + b_n y^n \end{aligned}$$

が与えられたとき，それらの分数は

$$\begin{aligned} \frac{p(x, y)}{q(x, y)} &= \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_n y^n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + b_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + b_n y^n} \\ &= \frac{a_0 + a_1 \left(\frac{y}{x}\right) + a_2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \cdots + a_n \left(\frac{y}{x}\right)^n}{b_0 + b_1 \left(\frac{y}{x}\right) + b_2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \cdots + b_n \left(\frac{y}{x}\right)^n} \end{aligned}$$

と変形できるので，式 (12) の右辺の形となる．従って，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p(x, y)}{q(x, y)} \tag{13}$$

も同次型の微分方程式である．

3.1　一般的な手順

式 (12) を解くために，新しい関数

$$u \equiv \frac{y}{x}$$

を導入する．$y(x) = xu(x)$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(xu) = u + x\frac{du}{dx}$$

である．従って，式 (12) は

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u)$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\{f(u) - u\}$$

となり，$u(x)$ に関する変数分離型の微分方程式になる．式 (6) を解いたのと同じ手順で解くと，

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$$

となる．よって，左辺の積分を

$$F(u) \equiv \int \frac{du}{f(u)-u}$$

と置くと，

$$F(u) = \log|x| + c$$

となる．但し，c は積分定数である．従って，

$$x = \pm Ce^{F(y/x)} \tag{14}$$

となり，$C \equiv e^c$ は任意定数である．式 (14) は x について解いた形であり，微分方程式 (12) の解 $y(x)$ については，ここからさらに解く必要があることに注意.

3.2　例題

1 階常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \tag{15}$$

を解け.

式 (15) の右辺は 2 つの同次式，$x+y$ と $x-y$ の分数なので，同次型の微分方程式である．まず，

$$u = \frac{y}{x}$$

として右辺を変形すると，

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{1+u}{1-u}$$

となる．一方，$y = xu$ なので，式 (15) の左辺は

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

である．従って，式 (15) は

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+u}{1-u} \qquad \therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{1+u^2}{1-u}\right)$$

となる．これを変数分離法で解くと，

$$\left(\frac{1-u}{1+u^2}\right) du = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \int \left(\frac{1-u}{1+u^2}\right) du = \int \frac{dx}{x} \tag{16}$$

となる.

式 (16) の右辺の積分は

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + c$$

である．但し，c は積分定数である．一方，式 (16) の左辺の積分は

$$\int \left(\frac{1-u}{1+u^2}\right) du = \int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{u}{1+u^2} du \tag{17}$$

と分解できる．式 (17) の右辺の第１項は，$u = \tan\theta$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{1+u^2} &= \int \frac{1}{1+\tan^2\theta} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \int \cos^2\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \int d\theta \\
&= \theta
\end{aligned}$$

となる．但し，積分定数は式 (16) の右辺の c に含めることにする．また，式 (17) の右辺の第２項は，$u^2 = z$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned}
\int \frac{u}{1+u^2} du &= \int \frac{1}{1+z} \frac{dz}{2} \\
&= \frac{1}{2} \log(1+z)
\end{aligned}$$

となる．ここでも，積分定数は c に含めることにする．

以上により，式 (16) は

$$\theta - \frac{1}{2} \log(1+z) = \log|x| + c$$

となる．$z = u^2 = y^2/x^2$ を代入して整理すると，

$$\begin{aligned}
\theta - \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) &= \log|x| + c \\
\therefore \theta - \frac{1}{2} \left\{\log\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + \log x^2\right\} &= c \\
\therefore \theta - \frac{1}{2} \log\left(x^2 + y^2\right) &= c \qquad (18)
\end{aligned}$$

となる．ここで，(x, y) を極座標 (r, θ) で表して

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

とすると，先程の変数変換

$$u = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

は満たされている．$x^2 + y^2 = r^2$ なので，式 (18) より

$$\theta - \frac{1}{2}\log r^2 = c \qquad \therefore \log r = \theta - c \qquad \therefore r = Ce^{\theta} \tag{19}$$

となる．但し，$C \equiv e^{-c}$ は任意定数である．式 (19) は角度 θ とともに原点からの距離 r が大きくなる曲線を表しており，**ベルヌイらせん**と呼ばれる．つまり，式 (15) の微分方程式の解 $y(x)$ はベルヌイらせんを直交座標 (x, y) で表したものになる．

3.3　演習

1 階常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \tag{20}$$

を解け．