第５回　ベクトルの積分と応用

理学部　齊藤国靖 *

2023 年 4 月 5 日

ベクトルの微分に続き，第５回ではベクトルの積分について説明する．また，ベクトルの微分の応用として，２次元極座標や３次元球座標における運動方程式を導出する．力学の問題を解くのにデカルト座標以外の座標系を用いることがあるが，基本ベクトルの変換と微分を適切に行う必要があるため，後半の内容は応用上も重要である．

1　ベクトルの積分

３次元のベクトル関数

$$\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\boldsymbol{e}_x + A_y(t)\boldsymbol{e}_y + A_z(t)\boldsymbol{e}_z \tag{1}$$

の両辺を変数 t で積分すると

$$\int \boldsymbol{A}(t)dt = \int A_x(t)dt\ \boldsymbol{e}_x + \int A_y(t)dt\ \boldsymbol{e}_y + \int A_z(t)dt\ \boldsymbol{e}_z \tag{2}$$

となる．ここで，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ は t に依らないので積分の外にある．式 (2) より，ベクトル関数を積分することは各成分を積分することと同じであることが解る．

ベクトル関数の積分を

$$\boldsymbol{D}(t) \equiv \int \boldsymbol{A}(t)dt \tag{3}$$

と置けば，ベクトル関数の定積分は

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(t)dt = \boldsymbol{D}(b) - \boldsymbol{D}(a) \tag{4}$$

となる．

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

2　ベクトルの部分積分

2.1　スカラー倍の積分

第４回の結果より，ベクトル関数のスカラー倍の微分は

$$\frac{d}{dt}\left(f\boldsymbol{A}\right)=\frac{df}{dt}\boldsymbol{A}+f\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \tag{5}$$

である．両辺を t で積分して整理すると

$$f\boldsymbol{A}=\int\frac{df}{dt}\boldsymbol{A}dt+\int f\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}dt$$

$$\therefore\int f\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}dt=f\boldsymbol{A}-\int\frac{df}{dt}\boldsymbol{A}dt \tag{6}$$

となる．これはベクトル関数の部分積分として有用である．

2.2　内積の積分

同じく第４回の結果より，ベクトル関数の内積の微分は

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \tag{7}$$

である．両辺を t で積分して整理すると

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\int\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}dt+\int\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}dt$$

$$\therefore\int\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}dt=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}-\int\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}dt \tag{8}$$

となる．これもベクトル関数の部分積分である．

2.3　外積の積分

同様に，外積の微分は

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \tag{9}$$

であるから，両辺を t で積分して

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\int\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}dt+\int\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}dt$$

$$\therefore\int\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}dt=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}-\int\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}dt \tag{10}$$

となる．これもベクトル関数の部分積分である．

3　極座標における運動方程式

２次元極座標における基本ベクトルは**動径方向**の $\boldsymbol{e}_r$ およびそれに垂直な**角度方向**の $\boldsymbol{e}_\theta$ がある．これらとデカルト座標における基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ との関係は

$$\boldsymbol{e}_r = \cos\theta\ \boldsymbol{e}_x + \sin\theta\ \boldsymbol{e}_y \tag{11}$$
$$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\ \boldsymbol{e}_x + \cos\theta\ \boldsymbol{e}_y \tag{12}$$

で与えられる．ここで，位置ベクトルが時間（変数 t）と共に変化するとき，極座標における基本ベクトル$\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ は向きを変えるが，$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ は変化しないことに注意しよう．つまり，$\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ は t のベクトル関数だが，$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ は**定ベクトル**である．

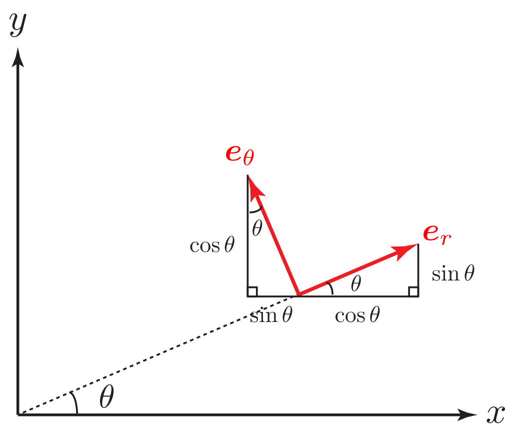

図 1

式 (11) の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}_r &= -\dot\theta\sin\theta\ \boldsymbol{e}_x + \dot\theta\cos\theta\ \boldsymbol{e}_y \\ &= \dot\theta\,(-\sin\theta\ \boldsymbol{e}_x + \cos\theta\ \boldsymbol{e}_y) \\ &= \dot\theta\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned} \tag{13}$$

となる．但し，$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ が t に依らないことと，式 (12) を用いた．同様に，式 (12) の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}_\theta &= -\dot\theta\cos\theta\ \boldsymbol{e}_x - \dot\theta\sin\theta\ \boldsymbol{e}_y \\ &= -\dot\theta\,(\cos\theta\ \boldsymbol{e}_x + \sin\theta\ \boldsymbol{e}_y) \\ &= -\dot\theta\boldsymbol{e}_r\end{aligned} \tag{14}$$

となる．但し，式 (11) を用いた．

次に，極座標における位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r \tag{15}$$

で与えられる．但し，$r \equiv |\boldsymbol{r}|$ は位置ベクトルの大きさを表す**動径距離**である．式 (15) の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}} &= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r \\ &= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned} \tag{16}$$

である．但し，式 (13) を用いた．従って，極座標における速度を

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} \equiv v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta \tag{17}$$

とすれば，動径方向と角度方向の速度成分はそれぞれ

$$v_r = \dot{r}\ , \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \tag{18}$$

となる．さらに，式 (16) の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}} &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\boldsymbol{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned} \tag{19}$$

である．但し，式 (13) と (14) を用いた．従って，極座標における加速度を

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} \equiv a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\boldsymbol{e}_\theta \tag{20}$$

とすれば，動径方向と角度方向の加速度成分はそれぞれ

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\ , \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \tag{21}$$

となる．

質量 m の質点の運動方程式

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

において，力 $\boldsymbol{F}$ を動径方向と角度方向に

$$\boldsymbol{F} = F_r\boldsymbol{e}_r + F_\theta\boldsymbol{e}_\theta \tag{22}$$

と分解すれば，式 (21) より

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \tag{23}$$
$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta \tag{24}$$

となることが解る．

4　球座標における運動方程式

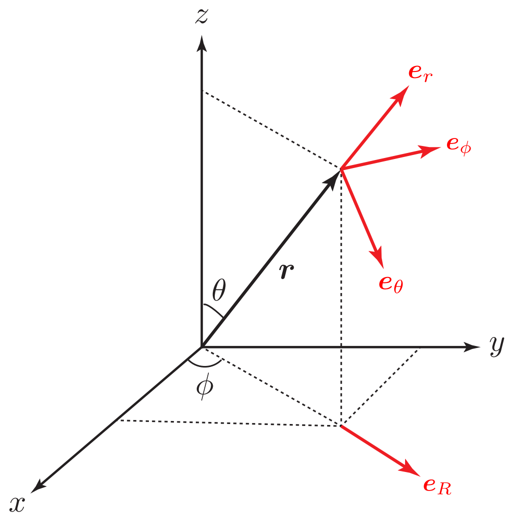

図 2

3 次元球座標における基本ベクトルは $\boldsymbol{e}_r$ およびそれに垂直な 2 つの角度方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\phi$ がある．これらとデカルト座標における基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ との関係を求めるため，$\boldsymbol{e}_\phi$ が xy 平面内にあることに注目する． 2 次元極座標の場合と同様，xy 平面内の単位ベクトルは

$$\boldsymbol{e}_R = \cos\phi\ \boldsymbol{e}_x + \sin\phi\ \boldsymbol{e}_y \tag{25}$$
$$\boldsymbol{e}_\phi = -\sin\phi\ \boldsymbol{e}_x + \cos\phi\ \boldsymbol{e}_y \tag{26}$$

で与えられる．ここで，$\boldsymbol{e}_R$ は極座標における動径方向の基本ベクトルに対応するものである．次に，$\boldsymbol{e}_R$ に沿って R 軸を導入すると，$\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ は zR 平面内にあることが解る．従って， 2 次元極座標の場合と同様，zR 平面内の単位ベクトルは

$$\boldsymbol{e}_r = \cos\theta\ \boldsymbol{e}_z + \sin\theta\ \boldsymbol{e}_R \tag{27}$$
$$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\ \boldsymbol{e}_z + \cos\theta\ \boldsymbol{e}_R \tag{28}$$

で与えられる．なお，式 (27) に $\sin\theta$ を掛けて，式 (28) に $\cos\theta$ を掛けたものを足すと

$$\sin\theta\ \boldsymbol{e}_r + \cos\theta\ \boldsymbol{e}_\theta = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\boldsymbol{e}_R$$
$$\therefore \boldsymbol{e}_R = \sin\theta\ \boldsymbol{e}_r + \cos\theta\ \boldsymbol{e}_\theta \tag{29}$$

となるのが解る．式 (27) と (28) の $\boldsymbol{e}_R$ に式 (25) を代入すると，球座標における基本ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\phi$ とデカルト座標における基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ の関係として

$$\boldsymbol{e}_r = \sin\theta\cos\phi\ \boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\ \boldsymbol{e}_y + \cos\theta\ \boldsymbol{e}_z \tag{30}$$
$$\boldsymbol{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\ \boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\phi\ \boldsymbol{e}_y - \sin\theta\ \boldsymbol{e}_z \tag{31}$$
$$\boldsymbol{e}_\phi = -\sin\phi\ \boldsymbol{e}_x + \cos\phi\ \boldsymbol{e}_y \tag{32}$$

が得られる．極座標の場合と同様，変数 t によって $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\phi$ は向きを変えるが，$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ は変化しないことに注意しよう．

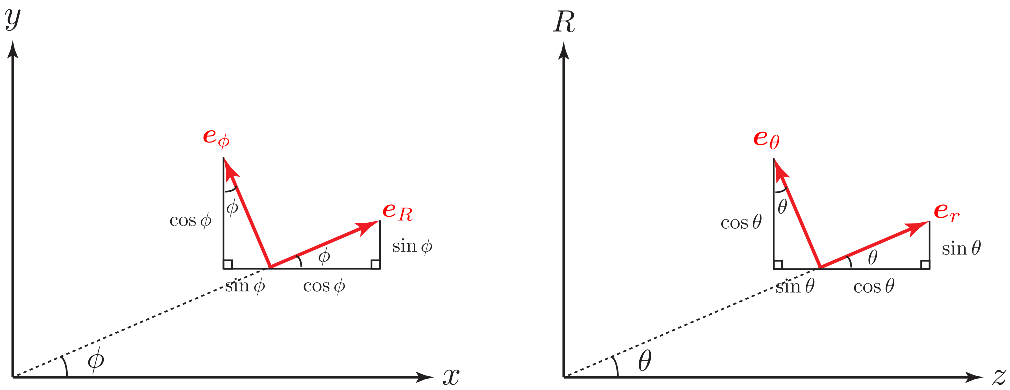

図 3

式 (30) の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{e}}_r &= \dot{\theta}\cos\theta\cos\phi\ \boldsymbol{e}_x - \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\ \boldsymbol{e}_x + \dot{\theta}\cos\theta\sin\phi\ \boldsymbol{e}_y + \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi\ \boldsymbol{e}_y - \dot{\theta}\sin\theta\ \boldsymbol{e}_z \\
&= \dot{\theta}(\cos\theta\cos\phi\ \boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\phi\ \boldsymbol{e}_y - \sin\theta\ \boldsymbol{e}_z) + \dot{\phi}\sin\theta(-\sin\phi\ \boldsymbol{e}_x + \cos\phi\ \boldsymbol{e}_y) \\
&= \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\ \boldsymbol{e}_\phi
\end{aligned} \tag{33}$$

となる．但し，$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ が t に依らないことと，式 (31) と (32) を用いた．同様に，式 (31) の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{e}}_\theta &= -\dot{\theta}\sin\theta\cos\phi\ \boldsymbol{e}_x - \dot{\phi}\cos\theta\sin\phi\ \boldsymbol{e}_x - \dot{\theta}\sin\theta\sin\phi\ \boldsymbol{e}_y + \dot{\phi}\cos\theta\cos\phi\ \boldsymbol{e}_y - \dot{\theta}\cos\theta\ \boldsymbol{e}_z \\
&= -\dot{\theta}(\sin\theta\cos\phi\ \boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\ \boldsymbol{e}_y + \cos\theta\ \boldsymbol{e}_z) + \dot{\phi}\cos\theta(-\sin\phi\ \boldsymbol{e}_x + \cos\phi\ \boldsymbol{e}_y) \\
&= -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\ \boldsymbol{e}_\phi
\end{aligned} \tag{34}$$

となる．但し，式 (30) と (32) を用いた．また，式 (32) の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{e}}_\phi &= -\dot{\phi}\cos\phi\ \boldsymbol{e}_x - \dot{\phi}\sin\phi\ \boldsymbol{e}_y \\
&= -\dot{\phi}\boldsymbol{e}_R \\
&= -\dot{\phi}\sin\theta\ \boldsymbol{e}_r - \dot{\phi}\cos\theta\ \boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned} \tag{35}$$

となる．但し，式 (29) を用いた．

次に，球座標における位置ベクトルも式 (15) で与えられるから，両辺を t で微分して

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}} &= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r \\
&= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\ \boldsymbol{e}_\phi
\end{aligned} \tag{36}$$

となる．但し，式 (33) を用いた．従って，球座標における速度を

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} \equiv v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta + v_\phi\boldsymbol{e}_\phi \tag{37}$$

とすれば，動径方向と２つの角度方向の速度成分はそれぞれ

$$v_r = \dot{r}\ , \quad v_\theta = r\dot{\theta}\ , \quad v_\phi = r\dot{\phi}\sin\theta \tag{38}$$

となる．さらに，式 (36) の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}} &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\boldsymbol{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{e}}_\theta + \dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\ \boldsymbol{e}_\phi + r\ddot{\phi}\sin\theta\ \boldsymbol{e}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\ \boldsymbol{e}_\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\ \dot{\boldsymbol{e}}_\phi \\ &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\ \boldsymbol{e}_\phi + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\ \boldsymbol{e}_\phi + \dot{r}\dot{\phi}\sin\theta\ \boldsymbol{e}_\phi + r\ddot{\phi}\sin\theta\ \boldsymbol{e}_\phi \\ &\quad + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\ \boldsymbol{e}_\phi - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\ \boldsymbol{e}_r - r\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta\ \boldsymbol{e}_\theta \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta)\boldsymbol{e}_\theta \\ &\quad + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\boldsymbol{e}_\phi \end{aligned} \tag{39}$$

である．但し，式 (33), (34), (35) を用いた．従って，球座標における加速度を

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} \equiv a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\boldsymbol{e}_\theta + a_\phi\boldsymbol{e}_\phi \tag{40}$$

とすれば，動径方向と２つの角度方向の加速度成分はそれぞれ

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta \tag{41}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta \tag{42}$$

$$a_\phi = r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta \tag{43}$$

となる．

運動方程式において，力 $\boldsymbol{F}$ を

$$\boldsymbol{F} = F_r\boldsymbol{e}_r + F_\theta\boldsymbol{e}_\theta + F_\phi\boldsymbol{e}_\phi \tag{44}$$

と分解すれば，式 (41)-(43) より

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta) = F_r \tag{45}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta) = F_\theta \tag{46}$$

$$m(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta) = F_\phi \tag{47}$$

となることが解る．

- 問題

  ３次元円柱座標における基本ベクトルが

$$\boldsymbol{e}_r = \cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y \tag{48}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\boldsymbol{e}_y \tag{49}$$

$$\boldsymbol{e}_h = \boldsymbol{e}_z \tag{50}$$

  で与えられることを用いて，円柱座標における運動方程式の表式を求めよ．