第5回 ベクトルの積分と応用

理学部 物理科学科 齊藤 国靖

2025年5月19日

ベクトルの微分に続き、ベクトルの積分について説明する。また、ベクトルの微分の応用として、2次元極座標や3次元球座標における運動方程式を導出する。力学の問題を解くのにデカルト座標以外の座標系を用いることがあるが、基本ベクトルの変換と微分を適切に行う必要があるため、後半の内容は応用上も重要である。

1 ベクトルの積分

3次元のベクトル関数

$$\mathbf{A}(t) = A_x(t)\mathbf{e}_x + A_y(t)\mathbf{e}_y + A_z(t)\mathbf{e}_z$$

の両辺を変数 t で積分すると、基本ベクトル e_x , e_y , e_z は t に依らないので、

$$\int \mathbf{A}(t)dt = \int A_x(t)dt \ \mathbf{e}_x + \int A_y(t)dt \ \mathbf{e}_y + \int A_z(t)dt \ \mathbf{e}_z$$

となる. つまり、

ベクトル関数を積分することは各成分を積分することと同じ

である. また、ベクトル関数の積分を

$$\boldsymbol{D}(t) \equiv \int \boldsymbol{A}(t)dt$$

と置けば、ベクトル関数の定積分は次の様に書ける.

$$\int_{a}^{b} \mathbf{A}(t)dt = \mathbf{D}(b) - \mathbf{D}(a)$$

2 ベクトルの部分積分

2.1 スカラー倍の積分

前回の結果より、ベクトル関数のスカラー倍の微分は

$$\frac{d}{dt}(f\mathbf{A}) = \frac{df}{dt}\mathbf{A} + f\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

である. 上式の両辺をtで積分すると

$$f\mathbf{A} = \int \frac{df}{dt} \mathbf{A} dt + \int f \frac{d\mathbf{A}}{dt} dt$$

となる. よって, 右辺の第1項を移項し, 次が成り立つ.

ベクトル関数のスカラー倍の部分積分 -

$$\int f \frac{d\mathbf{A}}{dt} dt = f\mathbf{A} - \int \frac{df}{dt} \mathbf{A} dt$$

2.2 内積の積分

同様に、ベクトル関数の内積の微分は

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

であるから、両辺をtで積分すると

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \int \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} dt + \int \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} dt$$

となる. よって, 右辺の第1項を移項し, 次が成り立つ.

ベクトル関数の内積の部分積分 -

$$\int \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} dt = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \int \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} dt$$

2.3 外積の積分

外積の微分は

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

であり、両辺をtで積分して

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \int \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} dt + \int \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} dt$$

が得られる. 従って, 次が成り立つ.

ベクトル関数の外積の部分積分

$$\int \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} dt = \mathbf{A} \times \mathbf{B} - \int \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} dt$$

3 極座標における運動方程式

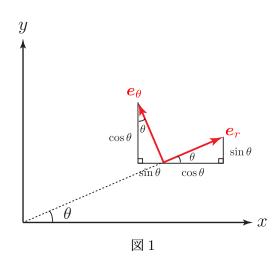
図 1 の様に,2 次元極座標における基本ベクトルは**動径方向**の e_r とそれに垂直な**角度方向**の e_{θ} がある.デカルト座標における基本ベクトル e_x , e_y との関係は

$$e_r = \cos\theta \ e_x + \sin\theta \ e_y \tag{1}$$

$$\mathbf{e}_{\theta} = -\sin\theta \ \mathbf{e}_x + \cos\theta \ \mathbf{e}_y \tag{2}$$

である.ここで,位置ベクトルが時間 t と共に変化するとき, e_x , e_y は変化しないが, e_r , e_{θ} は向きを変えることに注意しよう.つまり,

 e_x , e_y は t に依らない**定ベクトル**であるが, e_r , e_θ は t のベクトル関数である.



式 (1) の両辺を t で微分すると

$$\dot{\mathbf{e}}_r = -\dot{\theta}\sin\theta \ \mathbf{e}_x + \dot{\theta}\cos\theta \ \mathbf{e}_y
= \dot{\theta} \left(-\sin\theta \ \mathbf{e}_x + \cos\theta \ \mathbf{e}_y \right)
= \dot{\theta}\mathbf{e}_{\theta}$$
(3)

となる. 但し, e_x , e_y が t に依らないことと, 式 (2) を用いた. また, 式 (2) の両辺を t で微分すると

$$\dot{\mathbf{e}}_{\theta} = -\dot{\theta}\cos\theta \ \mathbf{e}_{x} - \dot{\theta}\sin\theta \ \mathbf{e}_{y}
= -\dot{\theta}\left(\cos\theta \ \mathbf{e}_{x} + \sin\theta \ \mathbf{e}_{y}\right)
= -\dot{\theta}\mathbf{e}_{r}$$
(4)

となる. ここでも, e_x , e_y が t に依らないことと, 式 (1) を用いた.

次に,極座標における位置ベクトルは

$$r = re_r \tag{5}$$

で与えられる.但し,右辺の $r\equiv |{m r}|$ は位置ベクトルの大きさを表す**動径距離**である.上式の両辺を t で微分すると

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r
= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_{\theta}$$
(6)

となる. 但し、式(3)を用いた. 従って、極座標における速度を

$$v = \dot{r} \equiv v_r e_r + v_\theta e_\theta$$

とすれば, 動径方向と角度方向の速度成分はそれぞれ

$$v_r = \dot{r} , \quad v_\theta = r\dot{\theta}$$

である. さらに、式 (6) の両辺を t で微分すると

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_{\theta} + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_{\theta}$$

$$= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_{\theta} + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_{\theta} - r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_{\theta}$$

となる. 但し, 式(3)と(4)を用いた. 従って, 極座標における加速度を

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} \equiv a_r \boldsymbol{e}_r + a_\theta \boldsymbol{e}_\theta$$

とすれば、動径方向と角度方向の加速度成分はそれぞれ次式の様になる.

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 , \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$
 (7)

質量 m の質点の運動方程式

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

において、力 F を動径方向と角度方向に

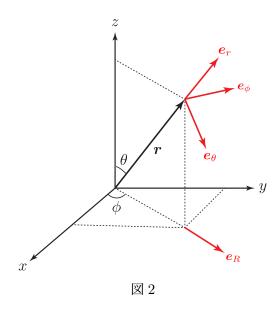
$$\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta$$

と分解すれば,式(7)より,次式が得られる.

極座標における運動方程式 ――

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r$$
$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_{\theta}$$

4 球座標における運動方程式



3 次元球座標における基本ベクトルには, e_r とそれに垂直な 2 つの角度方向の単位ベクトル e_{θ} , e_{ϕ} がある.これらとデカルト座標における基本ベクトル e_x , e_y , e_z の関係を求めるため, e_{ϕ} が xy 平面内にあることに注目しよう.2 次元極座標の場合と同様,xy 平面内の単位ベクトルは

$$e_R = \cos \phi \ e_x + \sin \phi \ e_y$$

$$e_\phi = -\sin \phi \ e_x + \cos \phi \ e_y$$
(8)

で与えられる。ここで, e_R は極座標における動径方向の基本ベクトルに対応するものである。次に, e_R に沿って R 軸を導入すると, e_r , e_θ は zR 平面内にあることが解る。従って,2 次元極座標の場合と同様,zR 平面内の単位ベクトルは

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta \ \mathbf{e}_z + \sin\theta \ \mathbf{e}_R \tag{9}$$

$$\mathbf{e}_{\theta} = -\sin\theta \ \mathbf{e}_z + \cos\theta \ \mathbf{e}_R \tag{10}$$

で与えられる. なお,式 (9) に $\sin\theta$ を掛けて,式 (10) に $\cos\theta$ を掛けたものを足すと

$$\sin \theta \ \mathbf{e}_r + \cos \theta \ \mathbf{e}_\theta = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \mathbf{e}_R$$
$$\therefore \mathbf{e}_R = \sin \theta \ \mathbf{e}_r + \cos \theta \ \mathbf{e}_\theta \tag{11}$$

が得られる. 式 (9) と (10) の e_R に式 (8) を代入すると、球座標における基本ベクトル e_r 、 e_θ 、 e_ϕ とデカルト座標における基本ベクトル e_x , e_y , e_z の関係として

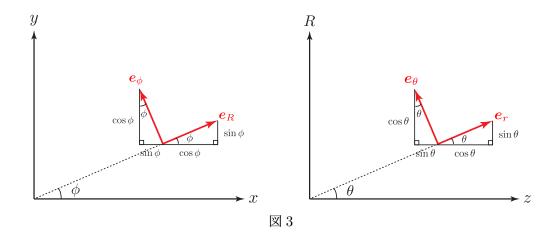
$$e_r = \sin\theta\cos\phi \ e_x + \sin\theta\sin\phi \ e_y + \cos\theta \ e_z \tag{12}$$

$$e_{\theta} = \cos \theta \cos \phi \ e_x + \cos \theta \sin \phi \ e_y - \sin \theta \ e_z$$
 (13)

$$\mathbf{e}_{\phi} = -\sin\phi \ \mathbf{e}_x + \cos\phi \ \mathbf{e}_y \tag{14}$$

が得られる. また, 極座標の場合と同様, 球座標においても

 e_x , e_y , e_z は t に依らない定ベクトルであるが, e_r , e_θ , e_ϕ は t のベクトル関数である.



式 (12) の両辺を t で微分すると

$$\dot{\mathbf{e}}_{r} = \dot{\theta}\cos\theta\cos\phi\,\,\mathbf{e}_{x} - \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi\,\,\mathbf{e}_{x} + \dot{\theta}\cos\theta\sin\phi\,\,\mathbf{e}_{y} + \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi\,\,\mathbf{e}_{y} - \dot{\theta}\sin\theta\,\,\mathbf{e}_{z}
= \dot{\theta}(\cos\theta\cos\phi\,\,\mathbf{e}_{x} + \cos\theta\sin\phi\,\,\mathbf{e}_{y} - \sin\theta\,\,\mathbf{e}_{z}) + \dot{\phi}\sin\theta(-\sin\phi\,\,\mathbf{e}_{x} + \cos\phi\,\,\mathbf{e}_{y})
= \dot{\theta}\mathbf{e}_{\theta} + \dot{\phi}\sin\theta\,\,\mathbf{e}_{\phi}$$
(15)

となる. 但し, e_x , e_y , e_z が t に依らないことと, 式 (13) と (14) を用いた. 同様に, 式 (13) の両辺を t で微分すると

$$\dot{\mathbf{e}}_{\theta} = -\dot{\theta}\sin\theta\cos\phi\,\,\mathbf{e}_{x} - \dot{\phi}\cos\theta\sin\phi\,\,\mathbf{e}_{x} - \dot{\theta}\sin\theta\sin\phi\,\,\mathbf{e}_{y} + \dot{\phi}\cos\theta\cos\phi\,\,\mathbf{e}_{y} - \dot{\theta}\cos\theta\,\,\mathbf{e}_{z}
= -\dot{\theta}(\sin\theta\cos\phi\,\,\mathbf{e}_{x} + \sin\theta\sin\phi\,\,\mathbf{e}_{y} + \cos\theta\,\,\mathbf{e}_{z}) + \dot{\phi}\cos\theta(-\sin\phi\,\,\mathbf{e}_{x} + \cos\phi\,\,\mathbf{e}_{y})
= -\dot{\theta}\mathbf{e}_{r} + \dot{\phi}\cos\theta\,\,\mathbf{e}_{\phi}$$
(16)

となる. 但し,式 (12) と (14) を用いた. また,式 (14) の両辺を t で微分すると

$$\dot{\mathbf{e}}_{\phi} = -\dot{\phi}\cos\phi \ \mathbf{e}_{x} - \dot{\phi}\sin\phi \ \mathbf{e}_{y}
= -\dot{\phi}\mathbf{e}_{R}
= -\dot{\phi}\sin\theta \ \mathbf{e}_{r} - \dot{\phi}\cos\theta \ \mathbf{e}_{\theta}$$
(17)

となる. 但し,式 (11)を用いた.

次に、球座標における位置ベクトルも式 (5) で与えられるから、両辺を t で微分して

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r
= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta \ \mathbf{e}_{\phi}$$
(18)

が得られる. 但し、式(15)を用いた. 従って、球座標における速度を

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \equiv v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\phi \mathbf{e}_\phi$$

とすれば、動径方向と2つの角度方向の速度成分はそれぞれ

$$v_r = \dot{r}$$
, $v_\theta = r\dot{\theta}$, $v_\phi = r\dot{\phi}\sin\theta$

である. さらに、式 (18) の両辺を t で微分すると

$$\ddot{r} = \ddot{r}\boldsymbol{e}_{r} + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_{\theta} + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_{\theta} + r\ddot{\theta}\dot{\boldsymbol{e}}_{\theta} + \dot{r}\dot{\phi}\sin\theta \ \boldsymbol{e}_{\phi} + r\ddot{\phi}\sin\theta \ \boldsymbol{e}_{\phi} + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta \ \boldsymbol{e}_{\phi} + r\dot{\phi}\sin\theta \ \dot{\boldsymbol{e}}_{\phi}$$

$$= \ddot{r}\boldsymbol{e}_{r} + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_{\theta} + \dot{r}\dot{\phi}\sin\theta \ \boldsymbol{e}_{\phi} + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_{\theta} + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_{\theta} - r\dot{\theta}^{2}\boldsymbol{e}_{r} + r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta \ \boldsymbol{e}_{\phi} + \dot{r}\dot{\phi}\sin\theta \ \boldsymbol{e}_{\phi} + r\ddot{\phi}\sin\theta \ \boldsymbol{e}_{\phi}$$

$$+ r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta \ \boldsymbol{e}_{\phi} - r\dot{\phi}^{2}\sin^{2}\theta \ \boldsymbol{e}_{r} - r\dot{\phi}^{2}\cos\theta\sin\theta \ \boldsymbol{e}_{\theta}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^{2} - r\dot{\phi}^{2}\sin^{2}\theta)\boldsymbol{e}_{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^{2}\cos\theta\sin\theta)\boldsymbol{e}_{\theta}$$

$$+ (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\cos\theta)\boldsymbol{e}_{\phi}$$

である. 但し,式 (15), (16), (17) を用いた.従って,球座標における加速度を

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} \equiv a_r \boldsymbol{e}_r + a_\theta \boldsymbol{e}_\theta + a_\phi \boldsymbol{e}_\phi$$

とすれば、動径方向と2つの角度方向の加速度成分はそれぞれ次式の様になる.

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \tag{19}$$

$$a_{\theta} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta\tag{20}$$

$$a_{\phi} = r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta \tag{21}$$

運動方程式において、力Fを

$$\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_\phi \mathbf{e}_\phi$$

と分解すれば、式 (19)-(21) より、次式が得られる.

・球座標における運動方程式 -

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) = F_r$$
$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta) = F_{\theta}$$
$$m(r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta) = F_{\phi}$$

問題

3次元円柱座標における基本ベクトルが

$$e_r = \cos \theta e_x + \sin \theta e_y$$
, $e_\theta = -\sin \theta e_x + \cos \theta e_y$, e_z

で与えられることを用いて、円柱座標における運動方程式の表式を求めよ.