第４回　ベクトルの微分

理学部　齊藤国靖 *

2023 年 4 月 5 日

これまで，ベクトルの足し算，引き算，掛け算を見てきたから，今度はベクトルの微分を考える．力学で質点の運動を解くとき，質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ は時間 t と共に変化し，速度と加速度は位置ベクトルの時間微分 $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ と $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ で定義される．このとき，$\boldsymbol{r}(t)$ は t の関数なのでベクトル関数であり，$\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ と $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ はベクトル関数の微分である．第４回の目的はベクトル関数とその微分の諸性質を理解することである．

1　ベクトルの微分

1.1　ベクトル関数

ベクトル $\boldsymbol{A}$ がある変数 t の関数であるとき，そのベクトルを**ベクトル関数**といい $\boldsymbol{A}(t)$ と表す．ベクトル関数の各成分は t の関数であり，３次元であれば

$$\boldsymbol{A}(t) = (A_x(t),\ A_y(t),\ A_z(t)) \tag{1}$$

と表される．ここで，各成分 $A_x(t)$, $A_y(t)$, $A_z(t)$ は全て t の関数である．基本ベクトルを用いれば

$$\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\boldsymbol{e}_x + A_y(t)\boldsymbol{e}_y + A_z(t)\boldsymbol{e}_z \tag{2}$$

と書くこともできる．なお，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ は t の関数ではないことに注意しよう．

1.2　微分の定義

ベクトル関数の微分は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A}(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

で定義される．式 (2) より，変数が $t+\Delta t$ のときは

$$\boldsymbol{A}(t+\Delta t) = A_x(t+\Delta t)\boldsymbol{e}_x + A_y(t+\Delta t)\boldsymbol{e}_y + A_z(t+\Delta t)\boldsymbol{e}_z \tag{4}$$

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

なので，これを式 (3) に代入して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t) &= \left\{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{A_x(t+\Delta t)-A_x(t)}{\Delta t}\right\}\boldsymbol{e}_x \\ &\quad + \left\{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{A_y(t+\Delta t)-A_y(t)}{\Delta t}\right\}\boldsymbol{e}_y \\ &\quad + \left\{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{A_z(t+\Delta t)-A_z(t)}{\Delta t}\right\}\boldsymbol{e}_z \\ &= \frac{dA_x(t)}{dt}\boldsymbol{e}_x + \frac{dA_y(t)}{dt}\boldsymbol{e}_y + \frac{dA_z(t)}{dt}\boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{5}$$

が得られる．これは各成分が導関数のベクトル関数であり，ベクトル関数を微分することは各成分を微分することと同じである．同様の考えで，ベクトル関数の２階微分は

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{A}(t) = \frac{d^2A_x(t)}{dt^2}\boldsymbol{e}_x + \frac{d^2A_y(t)}{dt^2}\boldsymbol{e}_y + \frac{d^2A_z(t)}{dt^2}\boldsymbol{e}_z \tag{6}$$

となる．なお，t の関数であることを表す引数 (t) を省略して

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \left(\frac{dA_x}{dt},\ \frac{dA_y}{dt},\ \frac{dA_z}{dt}\right)\ ,\qquad \frac{d^2\boldsymbol{A}}{dt^2} = \left(\frac{d^2A_x}{dt^2},\ \frac{d^2A_y}{dt^2},\ \frac{d^2A_z}{dt^2}\right) \tag{7}$$

と書けばコンパクトである．また，微分をドットに置き換えて

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \left(\dot{A}_x,\ \dot{A}_y,\ \dot{A}_z\right)\ ,\qquad \ddot{\boldsymbol{A}} = \left(\ddot{A}_x,\ \ddot{A}_y,\ \ddot{A}_z\right) \tag{8}$$

と書いても同じである．

2　ベクトルの微分の演算

2.1　スカラー倍の微分

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ にある関数 $f(t)$ を掛けたものの微分は

$$\frac{d}{dt}\left\{f(t)\boldsymbol{A}(t)\right\} = \frac{d}{dt}\left\{f(t)A_x(t)\right\}\boldsymbol{e}_x + \frac{d}{dt}\left\{f(t)A_x(t)\right\}\boldsymbol{e}_y + \frac{d}{dt}\left\{f(t)A_x(t)\right\}\boldsymbol{e}_z \tag{9}$$

である．右辺の x 成分を計算すると

$$\frac{d}{dt}\left\{f(t)A_x(t)\right\}\boldsymbol{e}_x = \frac{df(t)}{dt}A_x(t)\boldsymbol{e}_x + f(t)\frac{dA_x(t)}{dt}\boldsymbol{e}_x \tag{10}$$

となる．よって，他の成分も同様に計算して，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{f(t)\boldsymbol{A}(t)\right\} &= \frac{df(t)}{dt}\left\{A_x(t)\boldsymbol{e}_x + A_y(t)\boldsymbol{e}_y + A_z(t)\boldsymbol{e}_z\right\} \\ &\quad + f(t)\left\{\frac{dA_x(t)}{dt}\boldsymbol{e}_x + \frac{dA_y(t)}{dt}\boldsymbol{e}_y + \frac{dA_z(t)}{dt}\boldsymbol{e}_z\right\} \\ &= \frac{df(t)}{dt}\boldsymbol{A}(t) + f(t)\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)\end{aligned} \tag{11}$$

となる．つまり，引数 (t) を省略すると，ベクトル関数のスカラー倍の微分は

$$\frac{d}{dt}\left(f\boldsymbol{A}\right)=\frac{df}{dt}\boldsymbol{A}+f\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \tag{12}$$

で与えられる．

2.2　内積の微分

２つのベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ と $\boldsymbol{B}(t)$ の内積

$$\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)=A_x(t)B_x(t)+A_y(t)B_y(t)+A_z(t)B_z(t) \tag{13}$$

を考える．簡単のため引数 (t) を省略し，両辺を t で微分すると

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)=\frac{d}{dt}\left(A_xB_x\right)+\frac{d}{dt}\left(A_yB_y\right)+\frac{d}{dt}\left(A_zB_z\right) \tag{14}$$

右辺の第１項を計算すると

$$\frac{d}{dt}\left(A_xB_x\right)=\frac{dA_x}{dt}B_x+A_x\frac{dB_x}{dt} \tag{15}$$

なので，他の項も同様に計算して，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)&=\frac{dA_x}{dt}B_x+\frac{dA_y}{dt}B_y+\frac{dA_z}{dt}B_z\\&\quad+A_x\frac{dB_x}{dt}+A_y\frac{dB_y}{dt}+A_z\frac{dB_z}{dt}\\&=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\end{aligned} \tag{16}$$

となる．つまり，内積の微分は積の微分と同じ様に実行できる．

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ のとき，式 (16) は

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\right)=2\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \tag{17}$$

となる．特に，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^2$ に注意すると

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{A}|^2=2\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \tag{18}$$

である．

2.3　外積の微分

内積の微分と同様，外積の微分は

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} \tag{19}$$

で与えられる．つまり，ベクトルの順序を入れ替えなければ，積の微分と同じ様に実行できる．

- 問題

  $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の成分を代入して，式 (19) を確認せよ．

3　いくつかの例題

3.1　大きさが一定のベクトル関数

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ の大きさが $|\boldsymbol{A}(t)| = C$（定数）の場合，$|\boldsymbol{A}(t)|^2 = \boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{A}(t)$ なので

$$\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{A}(t) = C^2 \tag{20}$$

である．引数 (t) を省略し，両辺を t で微分すると

$$2\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = 0\ , \qquad \therefore\ \boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = 0$$

よって，$\boldsymbol{A}(t)$ とその微分 $\dot{\boldsymbol{A}}(t) = d\boldsymbol{A}/dt$ が垂直であることが解る．

3.2　外積の微分の応用

次の等式を示す．

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \tag{21}$$

まず，左辺に式 (19) を使うと

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \tag{22}$$

となるが，右辺第１項は同じベクトルの外積なので

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{0}$$

である．従って，式 (21) が成り立つ．

3.3　三重積と微分

$\boldsymbol{r}$ と $\dot{\boldsymbol{r}}$ が単位ベクトルであれば,

$$\boldsymbol{r}\times(\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}) = -\dot{\boldsymbol{r}} \tag{23}$$

が成り立つことを示す.

まず，$\boldsymbol{r}$ は単位ベクトルなので

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} = 1 \tag{24}$$

である．よって，両辺を微分して

$$2\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = 0\ , \qquad \therefore\ \boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = 0 \tag{25}$$

となる．これをもう一度微分すると

$$\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{r}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}} = 0 \tag{26}$$

である．ここで，$\dot{\boldsymbol{r}}$ も単位ベクトルなので

$$\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = 1 \tag{27}$$

である．よって，これを式 (26) に代入すると

$$\boldsymbol{r} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}} = -1 \tag{28}$$

となる．

ベクトル三重積の公式を使うと，式 (23) の左辺は

$$\boldsymbol{r} \times (\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) = (\boldsymbol{r} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}})\, \dot{\boldsymbol{r}} - (\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}})\, \ddot{\boldsymbol{r}} \tag{29}$$

であるから，右辺に式 (25) と (28) を代入すると

$$\boldsymbol{r} \times (\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) = -\dot{\boldsymbol{r}} \tag{30}$$

となり，式 (23) が示せた．