第 3 回　ベクトルの外積と三重積

理学部　物理科学科　齊藤 国靖

2025 年 4 月 21 日

二つのベクトルの掛け算は内積の他にも定義できる．その一つが外積で，ベクトルの外積は向きをもった新たなベクトルである．第 3 回ではベクトルの外積を定義し，基本的な演算や三重積と呼ばれる公式を説明する．

1　ベクトルの外積

1.1　外積の定義

内積と並んでベクトルの掛け算といえるものに**外積**がある．外積は3 次元のベクトルについて定義されるもので，内積（スカラー積）と違ってベクトル量である．そのため，外積のことを**ベクトル積**という場合もある．また，2 次元のベクトルで外積は定義できないし，4 次元以上でベクトルの外積を考えることはない．そこで，二つの 3 次元ベクトル

$$\boldsymbol{A} = (a_x, a_y, a_z) \ , \qquad \boldsymbol{B} = (b_x, b_y, b_z)$$

に対し，外積を

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

と定義する．右辺は 3×3 行列の**行列式**であり，$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ はそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸に沿った基本ベクトルである．ここで，行列式は

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_z \tag{1}$$

と展開できるので，$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ がベクトル量であることが解る．さらに，右辺にある 2×2 行列の行列式をそれぞれ展開すると，外積の成分表示

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (a_y b_z - a_z b_y)\, \boldsymbol{e}_x - (a_x b_z - a_z b_x)\, \boldsymbol{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\, \boldsymbol{e}_z \\ &= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \end{aligned}$$

が得られる．まずは最後の成分表示が外積の定義であると考えてよい．

外積の成分表示

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \tag{2}$$

1.2　外積の性質

外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の大きさは，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の角を θ として

外積の大きさ

$$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta \tag{3}$$

で与えられる．実際，式 (2) を用いて計算すると

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|^2 &= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \\
&= \left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)\left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \\
&= |\boldsymbol{A}|^2 |\boldsymbol{B}|^2 - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^2 \\
&= |\boldsymbol{A}|^2 |\boldsymbol{B}|^2 - |\boldsymbol{A}|^2 |\boldsymbol{B}|^2 \cos^2\theta \\
&= |\boldsymbol{A}|^2 |\boldsymbol{B}|^2 \sin^2\theta
\end{aligned}$$

となり，式 (3) が成り立つ．従って，$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の大きさは $|\boldsymbol{A}|$ と $|\boldsymbol{B}|$ を辺とする平行四辺形の面積に等しいことが解る．

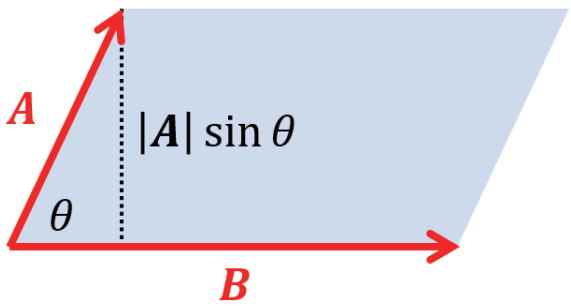

図 1

式 (3) で $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ であれば $\theta = 0$ なので，$|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}| = 0$ となる．つまり，

外積の性質 I

同じベクトルの外積はゼロ

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

である．また，式 (2) で $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を入れ替えると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} &= (b_y a_z - b_z a_y, b_z a_x - b_x a_z, b_x a_y - b_y a_x)\\ &= -(a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)\\ &= -\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

なので，

外積の性質 II

ベクトルの順序を入れ替えると外積の符号は反転する．

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$$

さらに，外積の**分配則**として

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B} \tag{5}$$

が成り立つ．これらは両辺に外積の定義式 (2) を適用すれば示すことができ，

外積はベクトルの順序を入れ替えなければ掛け算と同じ様に演算できる

ことが解る．さらに，n 倍したベクトルとの外積は，外積の n 倍に一致する．

$$(n\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\times(n\boldsymbol{B}) = n(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{6}$$

- 問題
  式 (2) を用いて，式 (4), (5), (6) が成り立つことを確認せよ．

1.3　基本ベクトルの外積

基本ベクトル

$$\boldsymbol{e}_x = (1,0,0)\ ,\qquad \boldsymbol{e}_y = (0,1,0)\ ,\qquad \boldsymbol{e}_z = (0,0,1)$$

をそれぞれ外積の定義式 (2) に代入すると

基本ベクトルの外積

$$\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z\ ,\qquad \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x\ ,\qquad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \tag{7}$$

が得られる．例えば，最初の式を示すには，式 (2) で $a_x = 1$, $a_y = a_z = 0$ および $b_y = 1$, $b_x = b_z = 0$ とすればよく，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y &= (0,0,1)\\ &= \boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

と確認することができる．他の式も同様で，式 (7) は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ が**右手系**であることを示している．右手系とは，右手の親指を $\boldsymbol{e}_x$，人差し指を $\boldsymbol{e}_y$，中指を $\boldsymbol{e}_z$ としたときの位置関係を表し，これを左手で行う場合とは異なっている．もう少し簡単に説明すると，式 (7) の最初の式は，$\boldsymbol{e}_x$ を $\boldsymbol{e}_y$ に重ねる向きに右ネジを回したとき，右ネジの進む方向が $\boldsymbol{e}_z$ であることを表している．他の式も同様で，$\boldsymbol{e}_y$ を $\boldsymbol{e}_z$ に重ねる向きに回したとき，右ネジの進む方向は $\boldsymbol{e}_x$ であり，$\boldsymbol{e}_z$ を $\boldsymbol{e}_x$ に重ねる向きに回したとき，右ネジの進む方向は $\boldsymbol{e}_y$ である．

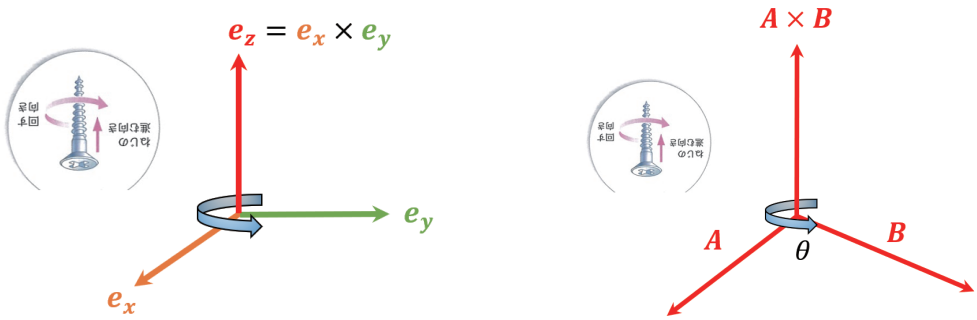

図 2

実は，基本ベクトルの外積が示す位置関係は一般の外積でも同様である．つまり，

外積の向き

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の向きは，$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{B}$ に重ねる向きに右ネジを回したとき，右ネジの進む方向

である．さらに重要なのは，

外積の性質 III

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ に垂直

という点である．これを示すには，以下の内積を計算すればよい．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{A} \cdot \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_z \right) \\
&= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} a_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} a_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} a_z \\
&= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{8}
$$

但し，式 (1) を用いており，最後の 3×3 行列の行列式は 1 行目と 2 行目が一致するのでゼロである．よって，

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0$$

となり，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{A}$ は垂直である．同様に，

$$\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0$$

なので，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{B}$ も垂直である．但し，3×3 行列の行列式は 1 行目と 3 行目が一致するのでゼロであることを用いた．

- 問題

  2 つのベクトルが

$$\boldsymbol{A}=a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y+a_z\boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{B}=b_x\boldsymbol{e}_x+b_y\boldsymbol{e}_y+b_z\boldsymbol{e}_z$$

  と書けることを利用し，式 (4), (5), (6) と基本ベクトルの外積の式 (7) を用いて，外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ が式 (2) で与えられることを示せ．

2　三重積

2.1　スカラー三重積

3 つのベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ に対し，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ などと表される量を**スカラー三重積**といい，

スカラー三重積の性質 I

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{9}$$

が成り立つ．これを示すには，式 (8) と同様の計算をすればよい．まず，$\boldsymbol{C}=(c_x,c_y,c_z)$ として

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})&=\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}a_x-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}a_y+\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}a_z \\ &=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

である．ここで，3×3 行列の行列式の**基本変形**を行う．まず，1 行目と 2 行目を入れ替えて

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

となる．次に，2 行目と 3 行目を入れ替えて

$$-\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$$

となり，式 (9) の最初の等式が示された．同様の基本変形により，式 (9) の最後の等式も示される．

外積は元のベクトルと垂直であるから，$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{C}$ と垂直である．従って，もし $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{C}$ と同じ平面内にあれば，$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{A}$ とも垂直である．これをスカラー三重積で表すと $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=0$ である．反対に，$\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{C}$ と同じ平面内にない，すなわち，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ が互いに 1 次独立であれば，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq 0$ である．つまり，

スカラー三重積の性質 II

スカラー三重積がゼロにならないベクトルは互いに 1 次独立である．

2.2　ベクトル三重積

外積の公式でもう一つ重要なのが，$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ などと表される**ベクトル三重積**に関するものである．$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ の外積なのでベクトル量であり，次の様に分解できる．

ベクトル三重積の性質

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C} \tag{10}$$

これを示すには，両辺の各成分を比較するのがよい．まず，左辺の x 成分は

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_x &= a_y\,[\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}]_z - a_z\,[\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}]_y \\
&= a_y\,(b_xc_y-b_yc_x)-a_z\,(b_zc_x-b_xc_z) \\
&= (a_yc_y+a_zc_z)\,b_x-(a_yb_y+a_zb_z)\,c_x \\
&= (a_xc_x+a_yc_y+a_zc_z)\,b_x-(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)\,c_x \\
&= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,b_x-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,c_x
\end{aligned}$$

となる．同様に，y 成分と z 成分は

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_y &= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,b_y-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,c_y \\
[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_z &= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,b_z-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,c_z
\end{aligned}$$

となる．よって，全ての成分に対して式 (10) が示せる．なお，ベクトル三重積を計算する際，

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} \tag{11}$$

であることに注意しよう．これは，$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ を求めてから $\boldsymbol{A}$ との外積を計算するのと，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ を求めてから $\boldsymbol{C}$ との外積を計算するのでは，結果が違うということである．$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ に基本ベクトルを代入して確認することもできるが，内積と違って外積の演算は注意を要することが解る．

- 問題
  $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_z$ として，式 (11) を確認せよ．