第３回　ベクトルの外積と三重積

理学部　齊藤国靖 *

2023 年 4 月 5 日

２つのベクトルの掛け算は内積の他にも定義できる．その一つが外積で，ベクトルの外積は向きをもった新たなベクトルである．第３回ではベクトルの外積を導入し，基本的な演算や三重積と呼ばれる公式を証明する．

1　ベクトルの外積

1.1　外積の定義

内積と並んでベクトルの掛け算といえるものに**外積**がある．外積を定義する前に幾つか確認しよう．まず，外積は３次元のベクトルについて定義されるもので，内積（スカラー積）と違ってベクトル量である．そのため，外積のことを**ベクトル積**という場合もある．また，２次元のベクトルで外積は定義できないし，４次元以上でベクトルの外積を考えることはない．

３次元ベクトル $\boldsymbol{A} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\boldsymbol{B} = (b_x, b_y, b_z)$ があったとき，これらの外積は

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{1}$$

と定義される．右辺は 3×3 行列の行列式であり，$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ はそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸に沿った基本ベクトルである．ここで，3×3 の行列式は

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_z \tag{2}$$

と展開できるので，$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ がベクトル量であることが解る．さらに，右辺にある 2×2 の行列式をそれぞれ展開すると，外積の成分表示

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (a_y b_z - a_z b_y)\, \boldsymbol{e}_x - (a_x b_z - a_z b_x)\, \boldsymbol{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\, \boldsymbol{e}_z \\ &= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \end{aligned} \tag{3}$$

が得られる．まずは最後の成分表示が外積の定義であると考えてよい．

---

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

1.2　外積の性質

外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の大きさは，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の角を θ として

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta \tag{4}$$

となる．実際，外積の定義式 (3) を用いて計算すると

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|^2 &= (a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2 \\
&= \left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right)\left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right) - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)^2 \\
&= |\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2 - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2 \\
&= |\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2 - |\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2\cos^2\theta \\
&= |\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{5}$$

となり，式 (4) が成り立つ．従って，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の大きさは $|\boldsymbol{A}|$ と $|\boldsymbol{B}|$ を辺とする平行四辺形の面積に等しいことが解る．

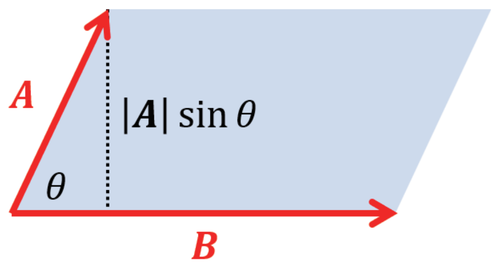

図 1

式 (4) で $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ であれば $\theta=0$ なので $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}|=0$．つまり，同じベクトルの外積はゼロ

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \tag{6}$$

である．また，外積の定義式 (3) で $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を入れ替えると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} &= (b_y a_z - b_z a_y, b_z a_x - b_x a_z, b_x a_y - b_y a_x) \\
&= -(a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \\
&= -\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}
\end{aligned} \tag{7}$$

なので，ベクトルの順序を入れ替えると外積の符号は反転する．

外積の**分配則**として

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} \tag{8}$$
$$\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B} \tag{9}$$

が成り立つ．これらは両辺に外積の定義式 (3) を適用すれば示すことができ，外積はベクトルの順序を入れ替えなければ掛け算と同じ様に演算できる．さらに，n 倍したベクトルとの外積は，外積の n 倍に一致する．

$$(n\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \times (n\boldsymbol{B}) = n\,(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \tag{10}$$

- 問題
  定義式 (3) を用いて，式 (8), (9), (10) が成り立つことを確認せよ．

1.3　基本ベクトルの外積

基本ベクトル

$$\boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0)\ , \qquad \boldsymbol{e}_y = (0, 1, 0)\ , \qquad \boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1) \tag{11}$$

をそれぞれ外積の定義式 (3) に代入すると

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z\ , \qquad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x\ , \qquad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \tag{12}$$

となる．例えば，最初の式を示すには，定義式 (3) で $a_x = 1$, $a_y = a_z = 0$ および $b_y = 1$, $b_x = b_z = 0$ とすればよく，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y &= (0, 0, 1) \\ &= \boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{13}$$

と確認することができる．他の式も同様で，式 (12) は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ が**右手系**であることを示している．右手系とは，右手の親指を $\boldsymbol{e}_x$，人差し指を $\boldsymbol{e}_y$，中指を $\boldsymbol{e}_z$ としたときの位置関係を表し，これを左手で行う場合とは異なっている．もう少し簡単に説明すると，式 (12) の最初の式は $\boldsymbol{e}_x$ を $\boldsymbol{e}_y$ に重ねる向きに右ネジを回したとき，右ネジの進む方向が $\boldsymbol{e}_z$ であることを表している．他の式も同様で，$\boldsymbol{e}_y$ を $\boldsymbol{e}_z$ に重ねる向きに回したとき，右ネジの進む方向は $\boldsymbol{e}_x$ であり，$\boldsymbol{e}_z$ を $\boldsymbol{e}_x$ に重ねる向きに回したとき，右ネジの進む方向は $\boldsymbol{e}_y$ である．

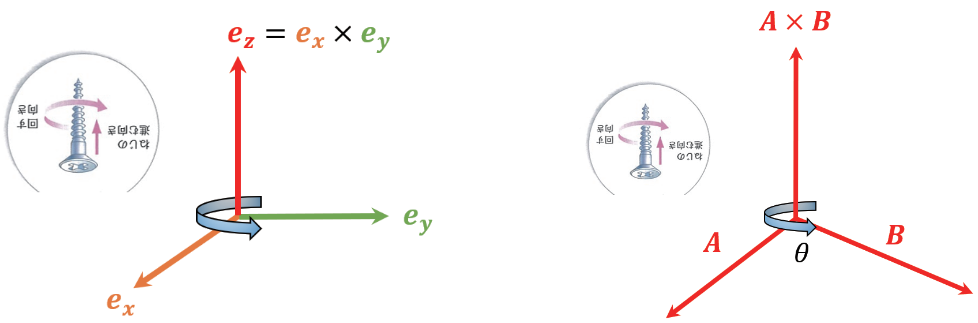

図 2

実は，基本ベクトルの外積が示す位置関係は一般の外積でも同様である．つまり，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の向きは$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{B}$ に重ねる向きに右ネジを回したとき，右ネジの進む方向である．さらに重要なのは，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ に垂直である点である．これを示すには，以下の内積を計算すればよい．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{A}\cdot\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_z\right)\\ &= \begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}a_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}a_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}a_z\\ &= \begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{14}$$

但し，外積の表式 (2) を用いた．最後の 3×3 の行列式は，1 行目と 2 行目が一致するのでゼロである．従って，

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0 \tag{15}$$

となり，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{A}$ は垂直である．同様に，

$$\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=0 \tag{16}$$

なので，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{B}$ も垂直である．但し，3×3 の行列式で 1 行目と 3 行目が一致するのでゼロであることを用いた．

- 問題

  ２つのベクトルが

$$\boldsymbol{A}=a_x\boldsymbol{e}_x+a_y\boldsymbol{e}_y+a_z\boldsymbol{e}_z \tag{17}$$
$$\boldsymbol{B}=b_x\boldsymbol{e}_x+b_y\boldsymbol{e}_y+b_z\boldsymbol{e}_z \tag{18}$$

  と書けることを利用し，式 (8), (9), (10) と基本ベクトルの外積の式 (12) を用いて，外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ が式 (3) で与えられることを示せ．

2　三重積

2.1　スカラー三重積

式 (14) と同様に，3 つのベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ に対して，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ で表される量を**スカラー三重積**という．スカラー三重積には次の性質がある．

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{19}$$

これを示すには，式 (14) と同様の計算をすればよい．まず，$\boldsymbol{C} = (c_x, c_y, c_z)$ として

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) &= \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} a_x - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} a_y + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} a_z \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

である．ここで，3×3 の行列式の**基本変形**を行う．まず，1 行目と 2 行目を入れ替えて

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

次に，2 行目と 3 行目を入れ替えて

$$- \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A})$$

となり，式 (19) の最初の等式が示された．同様の基本変形により，式 (19) の最後の等式も示される．

前節で外積は元のベクトルと垂直であることを示した．$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{C}$ と垂直であるから，もし $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{C}$ と同じ平面内にあれば，$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{A}$ とも垂直である．これをスカラー三重積で表すと $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = 0$ である．反対に，$\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{C}$ と同じ平面内にない，すなわち$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ が互いに 1 次独立であれば，

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \neq 0 \tag{21}$$

である．従って，スカラー三重積がゼロにならないベクトルは互いに 1 次独立である．

2.2　ベクトル三重積

外積を使った公式でもう一つ重要なのが**ベクトル三重積**

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\, \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\, \boldsymbol{C} \tag{22}$$

である．これは $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ の外積なのでベクトル量である．式 (22) を示すには，両辺の各成分を比較するのがよい．まず，左辺の x 成分は

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})]_x &= a_y\, [\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}]_z - a_z\, [\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}]_y \\ &= a_y\, (b_x c_y - b_y c_x) - a_z\, (b_z c_x - b_x c_z) \\ &= (a_y c_y + a_z c_z)\, b_x - (a_y b_y + a_z b_z)\, c_x \\ &= (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)\, b_x - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)\, c_x \\ &= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\, b_x - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\, c_x \end{aligned} \tag{23}$$

となる．同様に，y 成分と z 成分は

$$[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_y=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,b_y-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,c_y \tag{24}$$
$$[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_z=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,b_z-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,c_z \tag{25}$$

となる．よって，全ての成分に対して式 (22) が示せる．
　ベクトル三重積を計算する際,

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} \tag{26}$$

であることに注意しよう．これは，先に $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ を求めてから $\boldsymbol{A}$ との外積を計算するのと，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ を先に求めてから $\boldsymbol{C}$ との外積を計算するのでは，結果が違うということである．$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ に基本ベクトルを代入して確認することもできるが，内積と違って外積の演算は注意深く行う必要があることが解る．

- 問題
  $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_z$ として，式 (26) を確認せよ．