第２回　ベクトルの１次独立と内積

理学部　齊藤国靖 [*]

2023 年 4 月 5 日

２つのベクトルの足し算や引き算は各成分同士の演算で簡単に計算できる．また，ベクトルの n 倍のように，スカラーとベクトルの掛け算や割り算はベクトルの各成分をスカラーで掛けたり割ったりすればよい．それでは，２つのベクトルの掛け算はどのように計算すればよいか．高校数学で習う内積はベクトルの掛け算の一つだが，それ以外の掛け算を定義することもできる．第２回では，まず内積の復習を行い，一般の次元に内積の定義を拡張する．

1　１次独立と１次従属

３次元空間の位置ベクトル $\boldsymbol{A} = (a_x, a_y, a_z)$ を３つの基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ で表せば，

$$\boldsymbol{A} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z \tag{1}$$

となる．式 (1) の右辺の様に，いくつかのベクトルに係数を掛けて足し合わせたものを**線形結合**という．基本ベクトルは互いに直交するので，もし

$$a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

であれば，係数は全てゼロ $a_x = a_y = a_z = 0$ である．但し，右辺のベクトル $\boldsymbol{0} = (0, 0, 0)$ を**ゼロベクトル**という．仮に，$a_x \neq 0$ として式 (2) を変形すると

$$\boldsymbol{e}_x = -\frac{a_y}{a_x}\boldsymbol{e}_y - \frac{a_z}{a_x}\boldsymbol{e}_z \tag{3}$$

となるが，左辺の $\boldsymbol{e}_x$ は x 軸に平行なのに対し，右辺は yz 平面内のベクトルを表すので矛盾する．なお，$a_y = 0$ や $a_z = 0$ であっても左辺と右辺は矛盾する．この様に，線形結合がゼロベクトルであるために，係数が全てゼロでなければならないベクトルの組は**１次独立**（または**線形独立**）であるという．

基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ は１次独立であるが，一般に３つのベクトルが同一平面内になければ，それらは１次独立である．一方，３つのベクトルが同一平面内にあれば，それらは１次独立ではなく，**１次従属**（または**線形従属**）であるという．

[*] k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

- 問題
　3つのベクトル

$$\boldsymbol{x}_1 = (1, 2, 8)\ , \qquad \boldsymbol{x}_2 = (2, 5, 6)\ , \qquad \boldsymbol{x}_3 = (1, 9, 2)$$

は1次独立か1次従属か答えよ．また，

$$\boldsymbol{x}_4 = (3, 8, 4)$$

とするとき，3つのベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_4$ は1次独立か1次従属か答えよ．

式 (1) の様に，3次元空間のベクトルは1次独立な3つのベクトルの線形結合で表すことができる．3つのベクトルは基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ である必要はなく，例えば $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ が1次独立であれば，

$$\boldsymbol{A} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3 \tag{4}$$

と書くこともできる．この様に，任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ を線形結合で表すことのできるベクトルの組を**基底**といい，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ や1次独立な3つのベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ は共に基底である．なお，基底となるベクトルは3次元であれば3つ必要であり，2次元であれば2つ必要である．つまり，次元の数と基底となるベクトルの数は同じであることに注意しよう．

- 補足
基底となるベクトルは単位ベクトルである必要はない．例えば，$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ はいずれも大きさが $|\boldsymbol{x}_1| \neq 1$, $|\boldsymbol{x}_2| \neq 1$, $|\boldsymbol{x}_3| \neq 1$ であってもよい．便宜上，単位ベクトルにしたければ，

$$\boldsymbol{x}_1' = \frac{\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}_1|}\ , \qquad \boldsymbol{x}_2' = \frac{\boldsymbol{x}_2}{|\boldsymbol{x}_2|}\ , \qquad \boldsymbol{x}_3' = \frac{\boldsymbol{x}_3}{|\boldsymbol{x}_3|}$$

として，大きさが1の新しいベクトル $\boldsymbol{x}_1'$, $\boldsymbol{x}_2'$, $\boldsymbol{x}_3'$ を基底にすればよい．この様に，ベクトルの大きさを1にすることを**正規化**（または**規格化**）という．

2　ベクトルの内積

2.1　内積の定義

2つのベクトル $\boldsymbol{A} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\boldsymbol{B} = (b_x, b_y, b_z)$ の各成分の積を足し合わせたもの

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{5}$$

を**内積**という．内積はもはやベクトルではなく，大きさを表すスカラーなので**スカラー積**ということもある．一方，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積を図形的に定義すれば，

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta \tag{6}$$

となる．但し，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の角を θ とした．ベクトルの掛け算という意味では式 (5) の方が解り易いが，これは式 (6) と同値である．実際，原点と (a_x, a_y, a_z) および (b_x, b_y, b_z) を頂点とする三角形に**余弦定理**を用いると

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|^2 = |\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2 - 2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta \tag{7}$$

である．式 (6) より，上式の右辺の最後の項は $-2\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ なので，

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \frac{|\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2 - |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|^2}{2} \tag{8}$$

となる．そこで，$\boldsymbol{A} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\boldsymbol{B} = (b_x, b_y, b_z)$ を代入して整理すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= \frac{\left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right) + \left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right) - \left\{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2\right\}}{2} \\ &= \frac{2a_xb_x + 2a_yb_y + 2a_zb_z}{2} \\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \end{aligned} \tag{9}$$

となり，式 (5) に一致する．

2.2　内積の性質

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が垂直であれば $\theta = \pi/2$，つまり $\cos\theta = 0$ なので，式 (6) より

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{10}$$

である．ここで，内積はスカラーなので，右辺のゼロ 0 はゼロベクトル $\mathbf{0}$ ではないことに注意．また，任意の θ に対して $-1 \le \cos\theta \le 1$ なので，式 (6) より

$$-|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \le \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \le |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \tag{11}$$

が成立する．これを**シュワルツの不等式**という．また，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ であれば $\theta = 0$，つまり $\cos\theta = 1$ なので，式 (6) より

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|^2 \tag{12}$$

である．従って，ベクトルの大きさは $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$ であり，式 (5) を使うと

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{13}$$

に一致する．

内積の演算について幾つか確認しておこう．まず，内積は順序に依らない．

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{14}$$

これは**交換則**と呼ばれるが，定義式 (5) を代入すれば

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = b_xa_x + b_ya_y + b_za_z \tag{15}$$

なので自明であろう．また，**分配則**

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B} \tag{17}$$

も定義式 (5) を代入すれば確認することができる．なお, 交換則 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}$ により，両者は一致する．さらに，n 倍したベクトルとの内積は，内積の n 倍に一致する．

$$(n\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot(n\boldsymbol{B})=n\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{18}$$

- 問題
  定義式 (5) を用いて，式 (16), (17), (18) が成り立つことを確認せよ．

2.3　基本ベクトルの内積

基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ は互いに直交する単位ベクトルなので，これらの内積は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x&=1\,, & \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y&=0\,, & \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_z&=0\\
\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_x&=0\,, & \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y&=1\,, & \boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_z&=0\\
\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_x&=0\,, & \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_y&=0\,, & \boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z&=1
\end{aligned}$$

と計算できる．毎回この様な式を書き出すのは面倒なので，**クロネッカーのデルタ**

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{19}$$

という記号を用いて

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}\qquad(i,j=x,y,z) \tag{20}$$

と書くのが通例である．ここで，下付きの添え字 i と j は x,y,z のいずれかを表している．

- 補足
  基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ は互いに１次独立であり，基底でもあるが，それに加えて互いに直交する単位ベクトルという性質を持っている．この様に，互いに直交する単位ベクトルの組を**正規直交系**という．さらに，正規直交系が基底でもある場合，**完全正規直交系**（または**正規直交基底**）という．基本ベクトルは完全正規直交系であることに注意しよう．

2.4　列ベクトルと行ベクトル

これまで，ベクトルは各成分を横に並べて書いてきたが，この様な表式は２次元や３次元に限らず，４次元や５次元，あるいはより一般に n 次元のベクトルについても同様である．例えば,

$$(a_1,a_2)\,,\qquad(a_1,a_2,a_3)\,,\qquad(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n) \tag{21}$$

は左から順に 2 次元のベクトル，3 次元のベクトル，n 次元のベクトルということになる．そうすると，もはやベクトルを空間次元に制約する必要はなく，式 (21) はむしろ 1 行 2 列，1 行 3 列，1 行 n 列の行列と考える方が自然である．式 (21) の様に，ベクトルの各成分を横一列に並べた行列を**行ベクトル**といい，n 次元の行ベクトルは

$$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \tag{22}$$

で与えられる．

一方，ベクトルの各成分を縦に並べて書く場合もあり，

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{23}$$

は左から順に 2 行 1 列，3 行 1 列，n 行 1 列の行列である．この様に，ベクトルの各成分を縦一列に並べた行列を**列ベクトル**といい，n 次元の列ベクトルは

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{24}$$

であり，n 次元の行ベクトル $\boldsymbol{a}$ の**転置**で与えられる．

行ベクトル $\boldsymbol{a}$ と列ベクトル $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ の掛け算には，行列の掛け算の規則をそのまま適用することができて，

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \tag{25}$$

と計算される．そこで，n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさは

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}} \tag{26}$$

と定義され，$n = 3$ の場合が式 (13) に一致する．また，式 (26) はベクトルの大きさを n 次元に拡張したものなので，特別に

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}} \tag{27}$$

と書いて**ノルム**と呼ばれることもある．

$\boldsymbol{a}$ の転置とは異なる列ベクトル

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{28}$$

との内積は

$$\boldsymbol{ab} = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \tag{29}$$

と定義され，$n = 3$ の場合が式 (5) に一致する．式 (29) はベクトルの内積を n 次元に拡張したもので，物理学のあらゆる場面で使われる．また，ベクトルの各成分が**複素数**である場合，内積は

$$\boldsymbol{ab}^* = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_n^* \end{pmatrix} = a_1 b_1^* + \cdots + a_n b_n^* \tag{30}$$

と定義される．ここで，列ベクトル $\boldsymbol{b}^*$ は $\boldsymbol{b}$ の各成分の複素共役をとったもので，式 (30) を**エルミート内積**ということもある．なお，$\boldsymbol{b}^*$ の代わりに $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}*}$ を用いると，式 (30) は

$$\boldsymbol{aa}^{\mathrm{T}*} = a_1 b_1^* + \cdots + a_n a_n^* = |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 \geq 0 \tag{31}$$

となり，非負の実数である．