第 2 回　ベクトルの 1 次独立と内積

理学部　物理科学科　齊藤 国靖

2025 年 5 月 26 日

2 つのベクトルの足し算や引き算は成分同士の演算で簡単に計算できる．また，ベクトルの n 倍のように，スカラーとベクトルの掛け算や割り算はベクトルの各成分をスカラーで掛けたり割ったりすればよい．それでは，2 つのベクトルの掛け算はどのように計算すればよいか? 高校数学で習う**内積**はベクトルの掛け算の一つだが，それ以外の掛け算を定義することもできる．第 2 回では，まず内積の復習を行い，一般の次元に内積の定義を拡張する．

1　1 次独立と 1 次従属

3 次元空間の位置ベクトル $\boldsymbol{A} = (a_x, a_y, a_z)$ を 3 つの基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ で表せば

$$\boldsymbol{A} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z \tag{1}$$

となる．上式の右辺の様に，複数のベクトルに係数を掛けて足し合わせたものを 1 **次結合**（または**線形結合**）という．基本ベクトルは互いに直交するので，もし

$$a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

であれば，係数は全てゼロ $a_x = a_y = a_z = 0$ である．但し，右辺のベクトル $\boldsymbol{0} = (0, 0, 0)$ は**ゼロベクトル**である．仮に，$a_x \neq 0$ として式 (2) を変形すると

$$\boldsymbol{e}_x = -\frac{a_y}{a_x}\boldsymbol{e}_y - \frac{a_z}{a_x}\boldsymbol{e}_z$$

となるが，左辺の $\boldsymbol{e}_x$ は x 軸に平行なのに対し，右辺は yz 平面内のベクトルを表すので矛盾する．同様に，$a_y \neq 0$ や $a_z \neq 0$ であっても矛盾する．この様に，線形結合がゼロベクトルであるために，係数が全てゼロでなければならないベクトルの組は 1 **次独立**（または**線形独立**）であるという．

基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ は 1 次独立であるが，一般に 3 つのベクトルが同一平面内になければ，それらは 1 次独立である．一方，3 つのベクトルが同一平面内にあれば，それらは 1 次独立ではなく，1 **次従属**（または**線形従属**）であるという．

- 問題

  3 つのベクトル

$$\boldsymbol{x}_1 = (1, 2, 8)\ , \qquad \boldsymbol{x}_2 = (2, 5, 6)\ , \qquad \boldsymbol{x}_3 = (1, 9, 2)$$

は 1 次独立か 1 次従属か答えよ．また，

$$\boldsymbol{x}_4 = (3, 8, 4)$$

とするとき，3 つのベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_4$ は 1 次独立か 1 次従属か答えよ．

3 次元空間のベクトルは式 (1) の様に 1 次独立な 3 つのベクトルの 1 次結合で表すことができる．3 つのベクトルは基本ベクトルである必要はなく，例えば $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ が 1 次独立であれば，

$$\boldsymbol{A} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3$$

と書くこともできる．この様に，任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ を 1 次結合で表すことのできるベクトルの組を**基底**といい，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ や 1 次独立な 3 つのベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ は共に基底である．また，基底となるベクトルは 3 次元であれば 3 つ，2 次元であれば 2 つ必要なので，

次元の数　＝　基底となるベクトルの数

であることに注意しよう．

- 補足

  基底となるベクトルは単位ベクトルである必要はない．例えば，$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ はいずれも大きさが $|\boldsymbol{x}_1| \neq 1$, $|\boldsymbol{x}_2| \neq 1$, $|\boldsymbol{x}_3| \neq 1$ であってもよい．便宜上，単位ベクトルにしたければ，

  $$\boldsymbol{x}_1' = \frac{\boldsymbol{x}_1}{|\boldsymbol{x}_1|}\ , \qquad \boldsymbol{x}_2' = \frac{\boldsymbol{x}_2}{|\boldsymbol{x}_2|}\ , \qquad \boldsymbol{x}_3' = \frac{\boldsymbol{x}_3}{|\boldsymbol{x}_3|}$$

  として，大きさが 1 の新しいベクトル $\boldsymbol{x}_1'$, $\boldsymbol{x}_2'$, $\boldsymbol{x}_3'$ を基底にすればよい．この様に，ベクトルの大きさを 1 にすることを**正規化**（または**規格化**）という．

- 発展

  4 次元空間や 5 次元空間など，一般に n 次元空間のベクトルに対しても 1 次独立や 1 次従属の概念を適用することができる．まず，n 次元空間のベクトル $\boldsymbol{A}$ は成分が n 個あり，

  $$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= (a_1, \ldots, a_n) \\ &= a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n\end{aligned}$$

  と書ける．但し，$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は n 次元空間における基本ベクトルである．一方，1 次独立な n 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ の 1 次結合として $\boldsymbol{A}$ を書き換えると

  $$\boldsymbol{A} = c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$$

  となる．$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は 1 次独立（基底）なので，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ であれば，展開係数 $c_1, \ldots, c_n$ は全てゼロである．つまり，

  $$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0} \iff c_1 = \cdots = c_n = 0$$

  が成立する．

2　ベクトルの内積

2.1　内積の定義

2 つのベクトル $\boldsymbol{A} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\boldsymbol{B} = (b_x, b_y, b_z)$ の各成分の積を足し合わせたもの

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{3}$$

を**内積**という．$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ はもはやベクトルではなく，大きさを表すスカラーなので，式 (3) のことを**スカラー積**ということもある．一方，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積を図形的に定義すれば，

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta \tag{4}$$

となる．但し，図 1 の様に $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の間の角を θ とした．ベクトルの掛け算という意味では式 (3) の方が解り易いが，これは式 (4) と同値である．実際，原点と (a_x, a_y, a_z) および (b_x, b_y, b_z) を頂点とする三角形に**余弦定理**を用いると

$$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}|^2 = |\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2 - 2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta$$

である．式 (4) より，上式の右辺の最後の項は $-2\,(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ なので，$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ について解くと

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \frac{|\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2 - |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}|^2}{2}$$

が得られる．ここで，$\boldsymbol{A} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\boldsymbol{B} = (b_x, b_y, b_z)$ を代入して整理すると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= \frac{\left(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\right) + \left(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2\right) - \left\{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2\right\}}{2} \\
&= \frac{2a_x b_x + 2a_y b_y + 2a_z b_z}{2} \\
&= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z
\end{aligned}$$

となり，式 (3) に一致する．

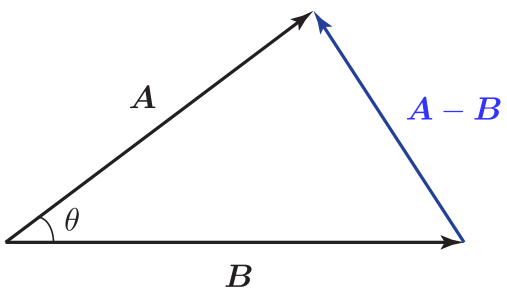

図 1

2.2　内積の性質

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が垂直であれば $\theta = \pi/2$．つまり，$\cos\theta = 0$ なので，式 (4) より

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

となる．ここで，内積はスカラーなので，右辺のゼロ 0 はゼロベクトル $\mathbf{0}$ ではないことに注意しよう．また，任意の θ に対して $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ なので，式 (4) より

$$-|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \leq \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \leq |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

が成立する．これを**シュワルツの不等式**という．さらに，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ であれば $\theta = 0$．つまり，$\cos\theta = 1$ なので，式 (4) より

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|^2$$

である．従って，ベクトルの大きさは $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$ であり，式 (3) を用いると

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{5}$$

が得られる．

内積の演算について幾つか確認しておこう．まず，内積は順序に依らない．

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$

これは**交換法則**と呼ばれるが，両辺に定義式 (3) を用いれば

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z$$

なので自明であろう．また，**分配法則**

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B} \tag{7}$$

も式 (3) を代入すれば確認できる．なお，交換法則 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}$ により，式 (6) と (7) は一致する．さらに，n 倍したベクトルとの内積は，内積の n 倍に一致し，

$$(n\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\cdot(n\boldsymbol{B}) = n\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{8}$$

となる．これを**結合法則**という．

- 補足
  ベクトルの大きさを通常の文字で $A = |\boldsymbol{A}|$, $B = |\boldsymbol{B}|$ などと書けば，式 (4) やシュワルツの不等式などを次の様に書くことができる．

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta\ , \qquad -AB \leq \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \leq AB\ ,$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = A^2\ , \qquad A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- 問題
  定義式 (3) を用いて，式 (6), (7), (8) が成り立つことを確認せよ．

2.3　基本ベクトルの内積

基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ は互いに直交する単位ベクトルなので，これらの内積は

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = 1\ , \quad &&\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0\ , \quad &&\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_z = 0 \\ &\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_x = 0\ , \quad &&\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y = 1\ , \quad &&\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z = 0 \\ &\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x = 0\ , \quad &&\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_y = 0\ , \quad &&\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z = 1 \end{aligned}$$

となる．毎回この様な式を書き出すのは面倒なので，

クロネッカーのデルタ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

という記号を導入し，

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \qquad (i, j = x, y, z)$$

と書くのが便利である．ここで，下付きの添え字 i と j は x, y, z のいずれかを表している．

- 補足
  基本ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ は互いに 1 次独立であり，基底でもあるが，それに加えて互いに直交する単位ベクトルという性質を持っている．この様に，互いに直交する単位ベクトルの組を**正規直交系**という．さらに，正規直交系が基底でもある場合，**完全正規直交系**（または**正規直交基底**）という．基本ベクトルは完全正規直交系であることに注意しよう．

2.4　列ベクトルと行ベクトル

これまで，ベクトルは各成分を横に並べて書いてきたが，この様な表式は 2 次元や 3 次元に限らず，4 次元や 5 次元，あるいは一般に n 次元のベクトルについても同様である．例えば，

$$(a_1, a_2)\ , \qquad (a_1, a_2, a_3)\ , \qquad (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \tag{9}$$

は順に 2 次元ベクトル，3 次元ベクトル，n 次元ベクトルである．この様な場合，ベクトルを空間内に制約する必要はなくなり，式 (9) はむしろ 1 行 2 列，1 行 3 列，1 行 n 列の行列と考える方が自然である．これらベクトルの各成分を横一列に並べた行列を**行ベクトル**といい，n 次元の行ベクトルは

$$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \tag{10}$$

と書ける．

一方，ベクトルの各成分を縦に並べて書く場合もあり，

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

は順に 2 行 1 列，3 行 1 列，n 行 1 列の行列である．これらベクトルの各成分を縦一列に並べた行列を**列ベクトル**といい，n 次元の列ベクトルは式 (10) の**転置**として

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書ける．

行ベクトル $\boldsymbol{a}$ と列ベクトル $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ の掛け算には行列の掛け算の規則をそのまま適用できて，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} &= (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\ &= a_1^2 + \cdots + a_n^2 \end{aligned}$$

となる．また，n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさは

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}| &= \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \\ &= \sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}} \end{aligned} \tag{11}$$

と定義され，$n = 3$ の場合が式 (5) に一致する．特に，式 (11) はベクトルの大きさを n 次元に拡張したものなので，

$$\|\boldsymbol{a}\| \equiv \sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}$$

と書いて**ノルム**と呼ばれることもある．

$\boldsymbol{a}$ の転置とは異なる列ベクトル

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

に対し，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} &= (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \end{aligned} \tag{12}$$

と定義される．式 (12) で $n = 3$ にすると式 (3) に一致する．また，式 (12) はベクトルの内積を n 次元に拡張したもので，物理学のあらゆる場面で使われる．

- 発展
  ベクトルの各成分が**複素数**の場合，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{b} &= (a_1^*, \ldots, a_n^*)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= a_1^* b_1 + \cdots + a_n^* b_n \end{aligned} \tag{13}$$

  と定義される．ここで，$\boldsymbol{a}^*$ は $\boldsymbol{a}$ の各成分の複素共役をとったもので，式 (13) を**エルミート内積**ということもある．なお，$\boldsymbol{b}$ の代わりに $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ を用いると，式 (13) は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} &= a_1^* a_1 + \cdots + a_n^* a_n \\ &= |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 \geq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

  となり，非負の実数である．

課題と探求

教科書『ベクトル解析』戸田盛和著（岩波書店）の第 1 章（15〜25 ページ）を読んで復習せよ．また，『ベクトル解析』の第 1 章（20〜24 ページ）にある**ヘッセの標準形**について読んで学習せよ．