第１回　微積分とベクトルの基礎

理学部　齊藤国靖 *

2023 年 4 月 5 日

物理学を学ぶために数学は必要不可欠な道具である．例えば，力学では微積分，ベクトル，行列，常微分方程式の知識が必須であり，電磁気学ではベクトル解析や偏微分方程式の理解が欠かせない．また，弾性論や流体力学など連続体力学を学ぶためには，フーリエ解析を習得する必要がある．この様に，物理学を学ぶにはある程度数学の知識を備えておく必要がある．しかし，数学そのものを追究するのではなく，あくまで物理を理解するための数学的手法や考え方に集中して勉強を進めるべきである．本講義では，物理科学科の１回生が学ぶべき「物理のための数学」を解説する．その内容は，初等的であるが物理学全般で重要な「ベクトル」と「常微分方程式」である．そのための準備として，まず関数および微積分の復習を行い，ベクトルの概念について説明する．

1　三角関数の性質

三角関数，$\cos\theta, \sin\theta, \tan\theta$，は高校数学でもお馴染みだが，それらの逆数を

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}\ , \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}\ , \quad \mathrm{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \tag{1}$$

と表す．読み方はそれぞれ，cot（**コタンジェント**），sec（**セカント**），cosec（**コセカント**）である．これらを使うと，三角関数の性質

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{2}$$

は，両辺を $\cos^2\theta$ で割って，

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \tag{3}$$

と表せる．

三角関数の性質として，

$$\cos(-x) = \cos x\ , \quad \sin(-x) = -\sin x\ , \quad \tan(-x) = -\tan x \tag{4}$$

も重要である．引数の符号を反対にしたとき，$f(-x) = f(x)$ となって関数の符号が変わらなければ，関数 $f(x)$ は**偶関数**であるといい，$f(-x) = -f(x)$ となれば $f(x)$ は**奇関数**であるという．従って，三角関数のうち $\cos x$ は偶関数であり，$\sin x$ と $\tan x$ は奇関数である．

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

- 問題
  $\cot x$, $\sec x$, $\mathrm{cosec} x$ はそれぞれ偶関数か，奇関数か．

三角関数の微分は

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x\ , \qquad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x \tag{5}$$

あるいは

$$(\cos x)' = -\sin x\ , \qquad (\sin x)' = \cos x \tag{6}$$

と簡単に書いてもよい．さらに，分母と分子を関数とする**商の微分**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{7}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned} \tag{8}$$

となる．但し，式 (2) を代入した．

- 問題
  $\cot x$, $\sec x$, $\mathrm{cosec} x$ の微分を計算せよ．

2　指数関数と対数関数

a を定数として，$f(x) = a^x$ を**指数関数**といい，$f(x) = \log_a x$ を**対数関数**という．物理学で大切なのは a が**ネイピア数**

$$e = 2.718281828459045235360287471352\ldots \tag{9}$$

（$e \simeq 2.71$）の場合であり，対数関数は**底**を略記して $\log x$ と書くことにする（本によっては $\ln x$ と書くものもある）．なお，指数関数と対数関数は互いに**逆関数**であることに注意しよう．

- 問題
  $y = a^x$ の逆関数が $y = \log_a x$ であることを示せ．

2.1　指数関数の性質

指数関数の掛け算，割り算，累乗は

$$e^x e^y = e^{x+y} \ , \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \ , \quad (e^x)^y = e^{xy} \tag{10}$$

であり，微分は

$$(e^x)' = e^x \tag{11}$$

また，指数関数の極限として

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \ , \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \tag{12}$$

は重要であり，特に

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \tag{13}$$

なので，指数関数 e^x は x よりも速く発散する．

2.2　対数関数の性質

式 (10) に対応した対数関数の演算は

$$\log xy = \log x + \log y \ , \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \ , \quad \log x^y = y\log x \tag{14}$$

である．対数関数の微分は

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \tag{15}$$

であり，定義より

$$\log e^x = x \ , \quad e^{\log x} = x \tag{16}$$

であることに注意する．また，対数関数の極限として

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0 \tag{17}$$

は覚えておいてもよい．

3　微積分の確認事項

高校数学の微積分のポイントを幾つか確認する．まず，２つの関数の**積の微分**は

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{18}$$

であり，両辺を積分して

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \tag{19}$$

つまり，**部分積分の公式**

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \tag{20}$$

を得る．もちろんこれは定積分の場合にも成り立つ．

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{21}$$

次に，**合成関数** $f(u(x))$ の微分は，$y = u(x)$ と置いて $f(y)$ の微分とみなせば，

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{df(y)}{dy}\frac{dy}{dx} \tag{22}$$

となる．慣れてくれば

$$\frac{d}{dx}f(u(x)) = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} \tag{23}$$

と書けばよい．また，

$$g(y) \equiv \frac{df(y)}{dy}\ , \qquad \therefore f(y) = \int g(y)dy \tag{24}$$

とすれば，式 (22) は

$$\frac{d}{dx}\int g(y)dy = g(y)\frac{dy}{dx} \tag{25}$$

となり，両辺を x で積分して，

$$\int g(y)dy = \int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int g(u(x))\frac{du(x)}{dx}dx \tag{26}$$

となり，積分変数を y から x に変換する**変換公式**を得る．

4　ベクトルの基礎

物体の質量や温度のように大きさだけをもつ量を**スカラー**といい，速度や力のように大きさと方向をもつ量を**ベクトル**という．ベクトルの定義は**始点と終点を結ぶ有向線分**である．「有向線分」とは向きを持った線分の意味で，線分の長さに加え，向きも表すという特徴がある．簡単のため平面内のベクトルを考えると，始点の座標 (x_1, y_1) と終点の座標 (x_2, y_2) を結ぶベクトルは

$$\boldsymbol{A} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \tag{27}$$

と書ける．この様に，終点の座標から始点の座標を引いてベクトルを表すことを**成分表示**という．なお，物理学ではベクトルを太字 $\boldsymbol{A}$ で表すのが慣例なので注意しよう．

4.1　ベクトルの大きさ

ベクトル $\boldsymbol{A}$ の**大きさ**は，始点と終点を頂点とする直角三角形の斜辺の長さと同じであるから，

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{28}$$

である．また，ベクトルの大きさを 2 倍するには，$\boldsymbol{A}$ の各成分を 2 倍すればよく，

$$2\boldsymbol{A} = (2(x_2 - x_1), 2(y_2 - y_1)) \tag{29}$$

とすればよい．実際，式 (28) を $2\boldsymbol{A}$ に適用すると，

$$\begin{aligned} |2\boldsymbol{A}| &= \sqrt{\{2(x_2 - x_1)\}^2 + \{2(y_2 - y_1)\}^2} \\ &= 2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= 2|\boldsymbol{A}| \end{aligned} \tag{30}$$

となり，元のベクトルの大きさ $|\boldsymbol{A}|$ の 2 倍になっているのが解る．一般に，$\boldsymbol{A}$ の n 倍は各成分を n 倍して

$$n\boldsymbol{A} = (n(x_2 - x_1), n(y_2 - y_1)) \tag{31}$$

であり，その大きさは $|n\boldsymbol{A}| = n|\boldsymbol{A}|$，つまり元のベクトルの n 倍である．

因みに，ベクトルの大きさは絶対値の代わりに通常の文字で

$$A = |\boldsymbol{A}|$$

と書く場合もあるので注意しよう．

4.2　ベクトルの足し算と引き算

2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の足し算は，それぞれの**始点と終点を結ぶ**ことによって定義される．例えば，$\boldsymbol{A}$ の終点 (x_2, y_2) を $\boldsymbol{B}$ の始点として，$\boldsymbol{B} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2)$ とすると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1) + (x_3 - x_2, y_3 - y_2) \\ &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1) \end{aligned} \tag{32}$$

となり，$\boldsymbol{A}$ の始点と $\boldsymbol{B}$ の終点を結ぶベクトルになる．この様に，ベクトルの足し算を行うには，ベクトルの各成分同士を足せばよい．同様に，ベクトルの引き算では各成分同士を引けばよい．

4.3　位置ベクトル

始点が原点 $(0, 0)$ である様なベクトルを**位置ベクトル**という．これまでの例だと単に $(x_1, y_1) = (0, 0)$ であるから，位置ベクトルとして

$$\boldsymbol{A} = (x_2, y_2) \tag{33}$$

が得られる．このベクトルは終点の座標 (x_2, y_2) と等価であり，終点の位置を表すベクトルという意味で位置ベクトルと呼ばれる．

4.4　基本ベクトル

位置ベクトルを以下の様に分解する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= (x_2, y_2) \\ &= (x_2, 0) + (0, y_2) \\ &= x_2(1,0) + y_2(0,1) \end{aligned} \tag{34}$$

このとき，ベクトル $(1,0)$ と $(0,1)$ はそれぞれ x 軸と y 軸に沿った**単位ベクトル**（大きさが 1 のベクトル）であり，**基本ベクトル**と呼ばれる．基本ベクトルを

$$\boldsymbol{e}_x = (1,0)\ , \qquad \boldsymbol{e}_y = (0,1) \tag{35}$$

と書けば，位置ベクトルは

$$\boldsymbol{A} = x_2\boldsymbol{e}_x + y_2\boldsymbol{e}_y \tag{36}$$

と表される．

３次元空間の位置ベクトル

$$\boldsymbol{A} = (x_2, y_2, z_2) \tag{37}$$

についても同様で，x 軸，y 軸，z 軸に沿った基本ベクトルをそれぞれ

$$\boldsymbol{e}_x = (1,0,0)\ , \qquad \boldsymbol{e}_y = (0,1,0)\ , \qquad \boldsymbol{e}_z = (0,0,1) \tag{38}$$

とすれば，位置ベクトルは

$$\boldsymbol{A} = x_2\boldsymbol{e}_x + y_2\boldsymbol{e}_y + z_2\boldsymbol{e}_z \tag{39}$$

と表される．

なお，３次元空間においても，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさは

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \tag{40}$$

であり，$\boldsymbol{A}$ の n 倍は

$$n\boldsymbol{A} = (nx_2, ny_2, nz_2) \tag{41}$$

となる．また，ベクトル $\boldsymbol{B} = (x_3, y_3, z_3)$ との足し算は

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3) \tag{42}$$

であり，引き算は

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (x_2 - x_3, y_2 - y_3, z_2 - z_3) \tag{43}$$

であるから，各成分同士の演算でよい．