第 1 回　微積分とベクトルの基礎

理学部　物理科学科　齊藤 国靖

2025 年 4 月 1 日

物理を学ぶため，数学は必要不可欠な道具である．例えば，力学では微積分，ベクトル，行列，常微分方程式の知識が必須であり，電磁気学ではベクトル解析や偏微分方程式の理解が欠かせない．また，弾性論や流体力学など連続体力学を学ぶには，フーリエ解析を習得する必要がある．つまり，物理を学ぶにはある程度数学の知識を備えておく必要がある．しかし，数学そのものを追究するのではなく，あくまで物理を理解するための数学的手法に集中して勉強を進めるべきである．本講義では，物理科学科の 1 回生が学ぶべき物理のための数学がテーマであり，初等的であるが物理学全般で重要な**ベクトル**と**常微分方程式**について学ぶ．そのための準備として，まずは関数および微積分の復習を行い，ベクトルの概念について説明する．

1　三角関数の性質

$\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ は高校数学でもお馴染みだが，これらの逆数をそれぞれ

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}\ , \qquad \mathrm{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}\ , \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

と表す．読み方はそれぞれ，sec（**セカント**），cosec（**コセカント**），cot（**コタンジェント**）である．三角関数の逆数を使うと，三角関数の性質

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{1}$$

は，両辺を $\cos^2\theta$ で割って

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

と表せる．

三角関数の性質として，

$$\cos(-x) = \cos x\ , \qquad \sin(-x) = -\sin x\ , \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

も重要である．引数の符号を反対にしたとき，$f(-x) = f(x)$ となって関数の符号が変わらなければ，関数 $f(x)$ は**偶関数**であるといい，$f(-x) = -f(x)$ となれば $f(x)$ は**奇関数**であるという．従って，三角関数のうち $\cos x$ は偶関数であり，$\sin x$ と $\tan x$ は奇関数である．

- 問題

  $\sec x$, $\mathrm{cosec} x$, $\cot x$ はそれぞれ偶関数か，奇関数か．

三角関数の微分は

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x\ , \qquad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

あるいは

$$(\cos x)' = -\sin x\ , \qquad (\sin x)' = \cos x$$

と簡単に書いてもよい．また，分母と分子を関数とする**商の微分**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

となる．但し，式 (1) を代入した．

- 問題

  $\sec x$, $\mathrm{cosec} x$, $\cot x$ の微分を計算せよ．

2　指数関数と対数関数

a を定数として，a^x を**指数関数**といい，$\log_a x$ を**対数関数**という．物理学で大切なのは a が

ネイピア数

$$e = 2.718281828459045235360287471352\cdots \simeq 2.71$$

の場合であり，対数関数は**底**を略記して $\log x$ と書く（本によっては $\ln x$ と書くものもある）．なお，指数関数と対数関数は互いに**逆関数**であることに注意しよう．

- 問題

  $y = a^x$ の逆関数が $y = \log_a x$ であることを示せ．

2.1　指数関数の性質

指数関数の掛け算，割り算，累乗はそれぞれ

$$e^x e^y = e^{x+y}\ , \qquad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}\ , \qquad (e^x)^y = e^{xy} \tag{2}$$

であり，微分は

$$(e^x)' = e^x$$

である．また，指数関数の極限として

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty\ , \qquad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

は重要であり，特に

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0}$$

なので，指数関数 e^x は x よりも速く発散する．

- 問題
  $(a^x)' = a^x \log a$ となることを示せ．

2.2　対数関数の性質

式 (2) に対応した対数関数の演算はそれぞれ

$$\log xy = \log x + \log y\ , \qquad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y\ , \qquad \log x^y = y \log x$$

である．対数関数の微分は

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

であり，定義より

$$\log e^x = x\ , \qquad e^{\log x} = x$$

であることに注意しよう．また，対数関数の極限として

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0}$$

は覚えておくと便利であり，対数関数 $\log x$ は x よりも遅く発散する．

- 問題
  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$ となることを示せ．

3　微積分の確認事項

高校数学の微積分のポイントを幾つか確認する．まず，２つの関数の**積の微分**は

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

であり，両辺を積分して

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

となる．つまり，

部分積分の公式

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

を得る．もちろん，これは定積分の場合にも成り立つ．

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

次に，**合成関数** $f(u(x))$ の微分は，$y = u(x)$ と置いて $f(y)$ の微分とみなせば，

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{df(y)}{dy}\frac{dy}{dx} \tag{3}$$

となる．慣れてくれば

$$\frac{d}{dx}f(u(x)) = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} \tag{4}$$

と書けばよい．また，

$$g(y) \equiv \frac{df(y)}{dy}\ , \qquad \therefore f(y) = \int g(y)dy \tag{5}$$

とすれば，式 (3) は

$$\frac{d}{dx}\int g(y)dy = g(y)\frac{dy}{dx} \tag{6}$$

となり，両辺を x で積分して，

置換積分の公式（積分変数の変換）

$$\int g(y)dy = \int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int g(u(x))\frac{du(x)}{dx}dx$$

を得る．もちろん，これは定積分の場合にも成り立ち，$y_a \equiv u(a)$, $y_b \equiv u(b)$ とすれば，

$$\int_{y_a}^{y_b} g(y)dy = \int_a^b g(u(x))\frac{du(x)}{dx}dx$$

となる．

4　ベクトルの性質

物体の質量や温度の様に大きさを表す量を**スカラー**といい，速度や力の様に大きさと向きを表す量を**ベクトル**という．ベクトルの定義は始点と終点を結ぶ有向線分である．有向線分とは向きを持った線分の意味で，線分の長さに加え，向きも表すという特徴がある．簡単のため平面内のベクトルを考えると，始点の座標 (x_1, y_1) と終点の座標 (x_2, y_2) を結ぶベクトルは

$$\boldsymbol{A} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \tag{7}$$

と書ける．この様に，終点の座標から始点の座標を引いてベクトルを表すことを**成分表示**という．なお，物理学ではベクトルを太字 $\boldsymbol{A}$ で表すのが慣例である．

4.1　ベクトルの大きさ

ベクトル $\boldsymbol{A}$ の**大きさ**は，始点と終点を頂点とする直角三角形の斜辺の長さと同じであるから，

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{8}$$

である．また，ベクトルの大きさを 2 倍するには，$\boldsymbol{A}$ の各成分を 2 倍すればよく，

$$2\boldsymbol{A} = (2(x_2 - x_1), 2(y_2 - y_1))$$

とすればよい．実際，式 (8) を $2\boldsymbol{A}$ に適用すると，

$$\begin{aligned} |2\boldsymbol{A}| &= \sqrt{\{2(x_2 - x_1)\}^2 + \{2(y_2 - y_1)\}^2} \\ &= 2\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= 2|\boldsymbol{A}| \end{aligned}$$

となり，元のベクトルの大きさ $|\boldsymbol{A}|$ の 2 倍になっている．一般に，$\boldsymbol{A}$ の n 倍は各成分を n 倍して

$$n\boldsymbol{A} = (n(x_2 - x_1), n(y_2 - y_1))$$

であり，その大きさは $|n\boldsymbol{A}| = n|\boldsymbol{A}|$，つまり元のベクトルの n 倍である．

因みに，ベクトルの大きさは絶対値の代わりに通常の文字で

$$A = |\boldsymbol{A}|$$

と書く場合もあるので注意しよう．

4.2　ベクトルの足し算と引き算

2 つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の足し算は，それぞれの始点と終点を結ぶことで定義される．例えば，$\boldsymbol{A}$ の終点 (x_2, y_2) を $\boldsymbol{B}$ の始点として，$\boldsymbol{B} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2)$ とすると，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1) + (x_3 - x_2, y_3 - y_2) \\ &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1)\end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{A}$ の始点と $\boldsymbol{B}$ の終点を結ぶベクトルになる．また，上式の様に

ベクトルの足し算（引き算）を行うには，**ベクトルの各成分を足せ（引け）ばよい**.

4.3　位置ベクトル

始点が原点 O である様なベクトルを**位置ベクトル**という．式 (7) では単に $(x_1, y_1) = (0, 0)$ であるから，位置ベクトルとして

$$\boldsymbol{A} = (x_2, y_2)$$

が得られる．このベクトルは終点の座標 (x_2, y_2) と等価であり，終点の位置を表すベクトルという意味で位置ベクトルと呼ばれる．

- 問題
  平面内の 2 つの点 $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2)$ を通る直線を考え，直線上の点を位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y)$ で表すとき，$\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ および新しい変数（パラメータ）t を用いて表せ．また，得られる式から t を消去し，直線の方程式を求めよ．

4.4　基本ベクトル

位置ベクトルを次の様に分解する．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= (x_2, y_2) \\ &= (x_2, 0) + (0, y_2) \\ &= x_2(1, 0) + y_2(0, 1)\end{aligned} \tag{9}$$

このとき，ベクトル $(1, 0)$ と $(0, 1)$ はそれぞれ x 軸と y 軸に沿った**単位ベクトル**（大きさが 1 のベクトル）であり，**基本ベクトル**と呼ばれる．基本ベクトルを

$$\boldsymbol{e}_x = (1, 0)\ , \qquad \boldsymbol{e}_y = (0, 1)$$

と書けば，式 (9) の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{A} = x_2\boldsymbol{e}_x + y_2\boldsymbol{e}_y$$

と表される．

3 次元空間の位置ベクトル

$$\boldsymbol{A} = (x_2, y_2, z_2) \tag{10}$$

についても同様で，x 軸，y 軸，z 軸に沿った基本ベクトルをそれぞれ

$$\boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0)\ , \qquad \boldsymbol{e}_y = (0, 1, 0)\ , \qquad \boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$$

とすれば，式 (10) の位置ベクトルは

$$\boldsymbol{A} = x_2\boldsymbol{e}_x + y_2\boldsymbol{e}_y + z_2\boldsymbol{e}_z$$

と表される．

なお，3 次元空間においても，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさは

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

であり，$\boldsymbol{A}$ の n 倍は

$$n\boldsymbol{A} = (nx_2, ny_2, nz_2)$$

となる．また，ベクトル $\boldsymbol{B} = (x_3, y_3, z_3)$ との足し算は

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (x_2 + x_3, y_2 + y_3, z_2 + z_3)$$

であり，引き算は

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (x_2 - x_3, y_2 - y_3, z_2 - z_3)$$

であるから，やはり各成分同士の演算でよい．

課題と探求

教科書『常微分方程式』矢嶋信男著（岩波書店）の第 1 章（1〜4 ページ）と教科書『ベクトル解析』戸田盛和著（岩波書店）の第 1 章（1〜15 ページ）を読んで復習せよ．また，『ベクトル解析』の第 1 章（10 ページ）にある**方向余弦**について読んで学習せよ．