第１０回　ベッセル関数

理学部　齊藤国靖 [*]

2022 年 12 月 27 日

第３回で登場したベッセルの微分方程式を級数展開の方法で解き、第１種ベッセル関数を導入する。第１種ベッセル関数はガンマ関数を用いて与えられ、計算に便利な微分に関する公式や漸化式を説明する。さらに、第２種、第３種ベッセル関数や変形ベッセル関数など、ベッセル関数の様々な形についても紹介する。

1　第１種ベッセル関数

第 3 回で導入した**ベッセルの微分方程式**は

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0 \tag{1}$$

で与えられる。但し、定数 ν はゼロ以上 $\nu\geq 0$ であることに注意。式 (1) は確定特異点 $x=0$ を持つから、級数展開の方法で解を求めることができる。まず、$x=0$ のまわりで解を展開すると

$$y(x)=x^k\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \tag{2}$$

となる。但し、$c_0\neq 0$ であり、k は指数である。式 (2) を使うと、x に関する微分は

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)c_nx^{n+k-1}\\ \frac{d^2y}{dx^2}&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)c_nx^{n+k-2}\end{aligned}$$

で与えられるので、式 (1) に (2) を代入し、両辺に x^2 を掛ければ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+k)(n+k-1)c_nx^{n+k}+(n+k)c_nx^{n+k}+c_nx^{n+k+2}-\nu^2c_nx^{n+k}\right\}=0$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+k)^2-\nu^2\right\}c_nx^{n+k}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+k+2}=0 \tag{3}$$

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

となる。ここで、左辺第２項は

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+k+2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+k}$$

と書き直せるから、これを式 (3) に代入し、両辺を x^k で割れば

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{(n+k)^2 - \nu^2\right\} c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n = 0 \tag{4}$$

となる。さらに、左辺第１項を $n=0,\ n=1,\ n \geq 2$ の項に分解すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{(n+k)^2 - \nu^2\right\} c_n x^n = \left(k^2 - \nu^2\right) c_0 + \left\{(k+1)^2 - \nu^2\right\} c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{(n+k)^2 - \nu^2\right\} c_n x^n$$

となるので、式 (4) は

$$\left(k^2 - \nu^2\right) c_0 + \left\{(k+1)^2 - \nu^2\right\} c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left\{(n+k)^2 - \nu^2\right\} c_n + c_{n-2}\right] x^n = 0 \tag{5}$$

となる。上式が成り立つには、x の各べきの係数がゼロでなければならないので、

$$\left(k^2 - \nu^2\right) c_0 = 0 \tag{6}$$

$$\left\{(k+1)^2 - \nu^2\right\} c_1 = 0 \tag{7}$$

$$\left\{(n+k)^2 - \nu^2\right\} c_n + c_{n-2} = 0 \tag{8}$$

が得られる。但し、最後の式は $n \geq 2$ に対して成り立つ。

式 (6)-(8) より、展開係数 c_n と指数 k を求めよう。まず、$c_0 \neq 0$ であるから、式 (6) より

$$k^2 - \nu^2 = 0$$

$$\therefore k = \pm\nu$$

である。指数が２つ求まるが、以下では $k = \nu$ の場合のみ考えよう。式 (7) に $k = \nu$ を代入すると

$$(2\nu + 1)\, c_1 = 0$$

となるが、$\nu \geq 0$ なので

$$\therefore c_1 = 0 \tag{9}$$

である。また、式 (8) に $k = \nu$ を代入すると

$$\left(n^2 + 2\nu n\right) c_n + c_{n-2} = 0$$

$$\therefore c_n = -\frac{c_{n-2}}{n\,(n+2\nu)}\ , \qquad (n \geq 2) \tag{10}$$

となる。式 (10) は n について一つおきの漸化式であり、式 (9) より

$$c_3 = c_5 = \cdots = 0$$

であることが解る。従って、n が偶数のものだけが残るので、$n = 2m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ を式 (10) に代入すると

$$\begin{aligned} c_{2m} &= -\frac{c_{2m-2}}{2m\,(2m+2\nu)} \\ &= -\frac{c_{2(m-1)}}{2^2 m\,(m+\nu)} \end{aligned} \tag{11}$$

が得られる。上式を繰り返し使うと

$$\begin{aligned} c_{2m} &= -\frac{c_{2(m-1)}}{2^2 m(\nu+m)} \\ &= (-1)^2 \frac{c_{2(m-2)}}{2^4 m(m-1)(\nu+m)(\nu+m-1)} \\ &= (-1)^3 \frac{c_{2(m-3)}}{2^6 m(m-1)(m-2)(\nu+m)(\nu+m-1)(\nu+m-2)} \\ &= \cdots \\ &= (-1)^m \frac{c_0}{2^{2m} m!(\nu+m)(\nu+m-1)(\nu+m-2)\cdots(\nu+2)(\nu+1)} \end{aligned} \tag{12}$$

となる。ここで、**ガンマ関数の公式**より

$$(\nu+m)(\nu+m-1)(\nu+m-2)\cdots(\nu+2)(\nu+1) = \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu+1)}$$

が成り立つので、式 (12) は

$$\begin{aligned} c_{2m} &= (-1)^m \frac{c_0}{2^{2m} m!} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m} m!\Gamma(\nu+m+1)} \times 2^\nu \Gamma(\nu+1) c_0 \end{aligned}$$

と書ける。そこで、

$$c_0 \equiv \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \tag{13}$$

とすると

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m} m!\Gamma(\nu+m+1)} \tag{14}$$

となり、式 (13) は (14) で $m = 0$ とした場合に一致する。

以上より、ベッセルの微分方程式 (1) の解が

$$\begin{aligned} y(x) &= x^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} x^{2m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m} m! \Gamma(\nu+m+1)} x^{\nu+2m} \end{aligned}$$

と求まり、最後の表式を

$$J_{\nu}(x) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m} m! \Gamma(\nu+m+1)} x^{\nu+2m} \tag{15}$$

と書いて、**第１種ベッセル関数**という。式 (15) は定数 ν にも依存するから、$J_{\nu}(x)$ のことを ν 次の第１種ベッセル関数ということもある。

2　ベッセル関数の微分

次の微分を考えよう。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left\{x^{\nu} J_{\nu}(x)\right\} &= \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m} m! \Gamma(\nu+m+1)} x^{2(\nu+m)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\nu+m)}{2^{\nu+2m-1} m! \Gamma(\nu+m+1)} x^{2(\nu+m)-1} \end{aligned} \tag{16}$$

ガンマ関数の公式より

$$\Gamma(\nu+m+1) = (\nu+m)\Gamma(\nu+m)$$

なので、式 (16) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left\{x^{\nu} J_{\nu}(x)\right\} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m-1} m! \Gamma(\nu+m)} x^{2(\nu+m)-1} \\ &= x^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{\nu-1+2m} m! \Gamma(\nu-1+m+1)} x^{\nu-1+2m} \\ &= x^{\nu} J_{\nu-1}(x) \end{aligned}$$

となる。

同様に、次の微分を考える。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left\{x^{-\nu} J_{\nu}(x)\right\} &= \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m} m! \Gamma(\nu+m+1)} x^{2m} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m-1} (m-1)! \Gamma(\nu+m+1)} x^{2m-1} \end{aligned} \tag{17}$$

但し、$m=0$ の項は定数なので、微分してゼロになっていることに注意。式 (17) の和を $m=0$ からの和に書き直すと

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left\{x^{-\nu}J_\nu(x)\right\} &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2^{\nu+2(m+1)-1}m!\Gamma(\nu+m+1+1)}x^{2(m+1)-1}\\ &= -x^{-\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{\nu+1+2m}m!\Gamma(\nu+1+m+1)}x^{\nu+1+2m}\\ &= -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\end{aligned}$$

となる。

以上、ベッセル関数の微分に関する公式として

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{\nu}J_\nu(x)\right\} = x^{\nu}J_{\nu-1}(x) \tag{18}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{-\nu}J_\nu(x)\right\} = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) \tag{19}$$

が得られる。

3　ベッセル関数の漸化式

式 (18) の左辺の微分を計算すると

$$\nu x^{\nu-1}J_\nu(x) + x^{\nu}J_\nu(x)' = x^{\nu}J_{\nu-1}(x) \tag{20}$$

となる。同様に、式 (19) の左辺の微分を計算すると

$$-\nu x^{-\nu-1}J_\nu(x) + x^{-\nu}J_\nu(x)' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

となるので、両辺に $x^{2\nu}$ を掛けて

$$-\nu x^{\nu-1}J_\nu(x) + x^{\nu}J_\nu(x)' = -x^{\nu}J_{\nu+1}(x) \tag{21}$$

が得られる。

まず、式 (20) から (21) を引くと

$$2\nu x^{\nu-1}J_\nu(x) = x^{\nu}\left\{J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)\right\}$$

$$\therefore J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) \tag{22}$$

が得られる。

一方、式 (20) と (21) を足すと

$$2x^{\nu}J_{\nu}(x)' = x^{\nu}\left\{J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\right\}$$
$$\therefore J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J_{\nu}(x)' \tag{23}$$

となる。

以上、ベッセル関数の漸化式として

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x) \tag{24}$$
$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J_{\nu}(x)' \tag{25}$$

が得られる。

4　参考：その他のベッセル関数

最後に、第１種ベッセル関数以外のベッセル関数を紹介しよう。

4.1　負の次数の第１種ベッセル関数

すでに見た様に、式 (2) の級数解の指数は $k = -\nu \leq 0$ でもよい。この場合、式 (15) の $J_{\nu}(x)$ の表式で $\nu \to -\nu$ に置き換えた

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m-\nu}m!\Gamma(m-\nu+1)}x^{2m-\nu} \tag{26}$$

が得られる。式 (26) は $-\nu$ 次の第１種ベッセル関数であり、ν が非整数の場合、$J_{-\nu}(x)$ は $J_{\nu}(x)$ と独立である。よって、ベッセルの微分方程式 (1) の一般解を $J_{\nu}(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ の線形結合として

$$y(x) = a_{+}J_{\nu}(x) + a_{-}J_{-\nu}(x)$$

で与えることができる。

4.2　第２種ベッセル関数

次式で定義される関数

$$Y_{\nu}(x) \equiv \frac{\cos\nu\pi J_{\nu}(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \tag{27}$$

を**第２種ベッセル関数**という。式 (27) は ν 次の第２種ベッセル関数と呼ばれることもあり、$Y_{\nu}(x)$ と $J_{\nu}(x)$ は互いに独立な関数である。

4.3　第３種ベッセル関数（ハンケル関数）

次式で定義される関数

$$H_\nu^{(1)}(x) \equiv J_\nu(x) + iY_\nu(x) \tag{28}$$
$$H_\nu^{(2)}(x) \equiv J_\nu(x) - iY_\nu(x) \tag{29}$$

を**第３種ベッセル関数**といい、**ハンケル関数**と呼ばれることもある。式 (28), (29) の $H_\nu^{(1)}(x)$ と $H_\nu^{(2)}(x)$ は互いに独立な関数である。

4.4　変形ベッセル関数

ベッセル関数の変数が純虚数 ix である場合、

$$I_\nu(x) \equiv i^{-\nu} J_\nu(ix) \tag{30}$$

を**第１種変形ベッセル関数**という。また、第１種変形ベッセル関数を用いて定義される

$$K_\nu(x) \equiv \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi} \tag{31}$$

を**第２種変形ベッセル関数**という。