第９回　球面調和関数

理学部　齊藤国靖 *

2022 年 12 月 20 日

ルジャンドルの微分方程式に類似の式からルジャンドル陪関数が導入されることを示す。ルジャンドル多項式が次数 n で特徴付けられるのに対し、ルジャンドル陪関数は２つの整数 n, m で指定される。ルジャンドル陪関数を用いると球面調和関数を定義することができ、球面調和関数は球座標における正規直交関数であることを説明する。

1　ルジャンドル陪関数

ルジャンドルの微分方程式（第８回参照）

$$\frac{d}{dx}\left\{(x^2-1)\frac{dy}{dx}\right\}-n(n+1)y=0$$

を次の様に変形する。

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0 \tag{1}$$

そこで、上式の左辺第３項を書き換えて

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0 \tag{2}$$

とすると、式 (2) の解はルジャンドル多項式 $P_n(x)$ を使って

$$P_n^m(x)\equiv(-1)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) \tag{3}$$

で与えられる。式 (3) を**ルジャンドル陪関数**という。なお、$m=0$ のとき式 (2) は (1) に一致し、解はルジャンドル多項式 $P_n(x)$ で与えられる。つまり、$P_n^0(x)=P_n(x)$ である。

1.1　解の確認

ルジャンドル陪関数 $P_n^m(x)$ が微分方程式 (2) の解になっているか確認しよう。まず、式 (2) の解を

$$y_2=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}f(x) \tag{4}$$

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

とすると、式 (2) は

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}f(x)-2(m+1)x\frac{d}{dx}f(x)+(n-m)(n+m+1)f(x)=0 \tag{5}$$

となる（証明は後述)。一方、式 (1) の解を y_1 として、式 (1) の両辺を x で m 回微分すると

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2}y_1^{(m)}-2(m+1)x\frac{d}{dx}y_1^{(m)}+(n-m)(n+m+1)y_1^{(m)}=0 \tag{6}$$

となる（証明は後述)。式 (5) と (6) を比較すると、$f(x)$ と $y_1^{(m)}$ が同じ微分方程式を満たしていることが解る。さらに、式 (5) と (6) は線型なので

$$f(x)\propto y_1^{(m)} \tag{7}$$

となる。一方、式 (1) の解 y_1 はルジャンドル多項式 $P_n(x)$ なので

$$y_1^{(m)}=\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$

である。よって、式 (7) の比例定数を $(-1)^m$ とすると

$$\begin{aligned}f(x)&=(-1)^m y_1^{(m)}\\&=(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\end{aligned}$$

となる。従って、式 (4) より、微分方程式 (2) の解は

$$\begin{aligned}y_2&=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}f(x)\\&=(-1)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\end{aligned}$$

となり、これはルジャンドル陪関数 $P_n^m(x)$ である。

1.2　ルジャンドル陪関数の微分形

ルジャンドル多項式の微分形（第 7 回参照）

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \tag{8}$$

を式 (3) に代入すると、ルジャンドル陪関数の微分形

$$P_n^m(x)=\frac{(-1)^m}{2^n n!}\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}\left(x^2-1\right)^n \tag{9}$$

が得られる。

2　球面調和関数

式 (2) を次の様に変形する。

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right\}y=0 \tag{10}$$

これは式変形しただけなので、式 (2) と同じ微分方程式であることに注意。従って、式 (10) の解もルジャンドル陪関数 $P_n^m(x)$ である。第１種チェビシェフ多項式（第 6 回参照）と同様に

$$x=\cos\theta$$

と変数変換すると

$$1-x^2=\sin^2\theta$$

であり、x に関する微分は

$$\frac{d}{dx}=\frac{d\theta}{dx}\frac{d}{d\theta}=\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^{-1}\frac{d}{d\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}$$

となるので、式 (10) は

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin\theta\frac{dy}{d\theta}\right\}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}y=0 \tag{11}$$

となる。式 (10) の解はルジャンドル陪関数 $P_n^m(x)$ なので、式 (11) は

$$y=P_n^m(\cos\theta)$$

が解である。

式 (11) の解 $P_n^m(\cos\theta)$ を用いて、**球面調和関数**は

$$Y_n^m(\theta,\varphi)\equiv(-1)^m\left\{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right\}^{1/2}P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{12}$$

と定義される。ここで、θ,φ は球座標の偏角であり、変域はそれぞれ

$$0\le\theta\le\pi\ ,\qquad 0\le\varphi\le 2\pi$$

である。また、球面調和関数は球座標において正規直交関数であり、偏角の任意の関数 $f(\theta,\varphi)$ を

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}a_{nm}Y_n^m(\theta,\varphi) \tag{13}$$

と展開できる。但し、m に関する和が $-n$ から n までという点に注意。なお、展開係数は

$$a_{nm}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)Y_n^m(\theta,\varphi)f(\theta,\varphi)$$

で与えられる。

3　補足

3.1　式 (5) の導出

まず、式 (4) と同じ様に

$$y = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} f(x) \tag{14}$$

と仮定し、両辺を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx} = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} f'(x) - mx\left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}-1} f(x) \tag{15}$$

が得られる。これをさらに微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} f''(x) - 2mx\left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}-1} f'(x)\\ &\quad -m\left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}-1}\left\{1 - (m-2)\frac{x^2}{1-x^2}\right\} f(x)\end{aligned} \tag{16}$$

となる。

式 (15) の両辺に $-2x$ を掛けて整理すると

$$-2x\frac{dy}{dx} = -2x\left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}-1}\left\{\left(1 - x^2\right) f'(x) - mxf(x)\right\} \tag{17}$$

となる。また、式 (16) の両辺に $(1 - x^2)$ を掛けて整理すると

$$\begin{aligned}\left(1 - x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} &= \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}-1}\Big[\left(1 - x^2\right)^2 f''(x)\\ &\quad -2mx\left(1 - x^2\right) f'(x) + m\left\{(m-1)x^2 - 1\right\} f(x)\Big]\end{aligned} \tag{18}$$

が得られる。よって、式 (14), (17), (18) を式 (2) に代入し、両辺を $(1 - x^2)^{\frac{m}{2}-1}$ で割ると

$$\begin{aligned}&\left(1 - x^2\right)^2 f''(x) - 2mx\left(1 - x^2\right) f'(x) + m\left\{(m-1)x^2 - 1\right\} f(x)\\ &-2x\left\{\left(1 - x^2\right) f'(x) - mxf(x)\right\} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}\left(1 - x^2\right) f(x) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\left(1 - x^2\right)^2 f''(x) - 2(m+1)x\left(1 - x^2\right) f'(x)\\ &+\left[m\left\{(m-1)x^2 - 1\right\} + 2mx^2 + n(n+1)\left(1 - x^2\right) - m^2\right] f(x) = 0\end{aligned} \tag{19}$$

となる。ここで、左辺第 3 項の係数は

$$\begin{aligned}&m\left\{(m-1)x^2 - 1\right\} + 2mx^2 + n(n+1)\left(1 - x^2\right) - m^2\\ &= \left\{n(n+1) - m(m+1)\right\}(1 - x^2)\\ &= (n-m)(n+m+1)(1 - x^2)\end{aligned}$$

と変形できるから、式 (19) は

$$\left(1-x^2\right)^2 f''(x) - 2(m+1)x\left(1-x^2\right)f'(x) + (n-m)(n+m+1)\left(1-x^2\right)f(x) = 0$$

$$\therefore \left(1-x^2\right)f''(x) - 2(m+1)xf'(x) + (n-m)(n+m+1)f(x) = 0 \tag{20}$$

となる。これは式 (5) に他ならない。

3.2　式 (6) の導出

ルジャンドルの微分方程式 (1) の両辺を x で m 回微分することを考える。まず、

$$\frac{d^m}{dx^m}y = y^{(m)} \tag{21}$$

である。また、第 8 回で利用した**ライプニッツの積の微分公式**

$$\frac{d^m}{dx^m}\left\{X(x)Y(x)\right\} = \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}X^{(m-k)}Y^{(k)} \tag{22}$$

を用いると

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dx^m}\left(x\frac{dy}{dx}\right) &= \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}x^{(m-k)}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{(k)} \\ &= my^{(m)} + xy^{(m+1)}\end{aligned} \tag{23}$$

となる。但し、右辺の $k=m-1, m$ 以外の項はゼロになるので注意。同様に、

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{dx^m}\left\{(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}\right\} &= \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}(1-x^2)^{(m-k)}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{(k)} \\ &= \frac{m(m-1)}{2}(1-x^2)^{(2)}y^{(m)} + m(1-x^2)^{(1)}y^{(m+1)} + (1-x^2)y^{(m+2)} \\ &= -m(m-1)y^{(m)} - 2mxy^{(m+1)} + (1-x^2)y^{(m+2)}\end{aligned} \tag{24}$$

であり、右辺の $k=m-2, m-1, m$ 以外の項はゼロである。

よって、式 (21), (23), (24) より、式 (1) の両辺を x で m 回微分すると

$$\begin{aligned}&-m(m-1)y^{(m)} - 2mxy^{(m+1)} + (1-x^2)y^{(m+2)} \\ &-2\left\{my^{(m)} + xy^{(m+1)}\right\} + n(n+1)y^{(m)} = 0\end{aligned}$$

$$\therefore (1-x^2)y^{(m+2)} - 2(m+1)xy^{(m+1)} + \left\{n(n+1) - m^2 - m\right\}y^{(m)} = 0 \tag{25}$$

が得られる。ここで、左辺第 3 項の係数は

$$n(n+1) - m^2 - m = (n-m)(n+m+1)$$

と変形できるから、式 (25) は

$$(1-x^2)y^{(m+2)} - 2(m+1)xy^{(m+1)} + (n-m)(n+m+1)y^{(m)} = 0 \tag{26}$$

となる。これは式 (6) に他ならない。