第８回　スツルム・リウヴィル形式

理学部　齊藤国靖 *

2022 年 12 月 13 日

ロドリーグの公式で得られる直交多項式はスツルム・リウヴィル型と呼ばれる微分方程式の解である。スツルム・リウヴィル型微分方程式はこれまで扱ってきた変数係数の２階線型微分方程式であり、ルジャンドルの微分方程式など、様々な微分方程式がこの形式に当てはまる。具体例として、ロドリーグの公式によるルジャンドル多項式、エルミート多項式、ラゲール多項式がスツルム・リウヴィル型微分方程式の解であることを示そう。

1　スツルム・リウヴィル型微分方程式

ロドリーグの公式（第７回参照）で

$$G_n(x) = c_n w(x) g(x)^n \tag{1}$$

とすると、n 次の多項式は

$$\phi_n(x) = \frac{c_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ w(x) g(x)^n \right\} \tag{2}$$

で与えられる。但し、c_n は定数である。式 (2) の左辺は n 次多項式であり、右辺は $w(x)g(x)^n$ を n 回微分したものなので、関数 $g(x)$ はたかだか２次の多項式である。証明は５節で示すが、式 (2) で与えられる直交多項式 $\phi_n(x)$ は**スツルム・リウヴィル型微分方程式**

$$\frac{d}{dx} \left\{ w(x) g(x) \frac{dy}{dx} \right\} + \lambda_n w(x) y = 0 \tag{3}$$

の解である。式 (3) は変数係数の２階線型常微分方程式であり、定数 λ_n は

$$\lambda_n = -n \left(\frac{\phi_1'}{c_1} + \frac{n-1}{2} g'' \right) \tag{4}$$

で与えられる。ここで、$\phi_1(x)$ は１次多項式、$g(x)$ はたかだか２次多項式なので、ϕ_1' と g'' は共に定数である。以下、これまでに学んだ直交多項式

- ルジャンドル多項式 $P_n(x)$

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

- エルミート多項式 $H_n(x)$
- ラゲール多項式 $L_n(x)$

が全てスツルム・リウヴィル型微分方程式 (3) の解であることを示そう。

2　ルジャンドルの微分方程式

ルジャンドル多項式の微分形（第 7 回参照）

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \tag{5}$$

は、式 (2) において

$$c_n = \frac{1}{2^n n!}\ , \qquad w(x) = 1\ , \qquad g(x) = x^2 - 1$$

とする場合に等しく、$g(x)$ は 2 次多項式である。また、

$$c_1 = \frac{1}{2}\ , \qquad g'' = 2$$

であり、式 (5) で $n = 1$ とすると、

$$P_1(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right) = x$$

となる。つまり、

$$\phi_1' \equiv P_1'(x) = 1$$

なので、式 (4) より

$$\lambda_n = -n\left(2 + \frac{n-1}{2}\times 2\right) = -n(n+1)$$

となる。従って、スツルム・リウヴィル型微分方程式 (3) は

$$\frac{d}{dx}\left\{\left(x^2-1\right)\frac{dy}{dx}\right\} - n(n+1)y = 0 \tag{6}$$

で与えられる。式 (6) は**ルジャンドルの微分方程式**と呼ばれ、$y = P_n(x)$ が解である。

3　エルミートの微分方程式

エルミート多項式の微分形（第 7 回参照）

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \tag{7}$$

は、式 (2) において

$$c_n = (-1)^n\ , \qquad w(x) = e^{-x^2}\ , \qquad g(x) = 1$$

とする場合に等しく、$g(x)$ は定数である。また、

$$c_1 = -1 \ , \qquad g'' = 0$$

であり、式 (7) で $n = 1$ とすると、

$$H_1(x) = -e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2} = 2x$$

となる。つまり、

$$\phi_1' \equiv H_1'(x) = 2$$

なので、式 (4) より

$$\lambda_n = -n \left(-2 + \frac{n-1}{2} \times 0 \right) = 2n$$

となる。従って、スツルム・リウヴィル型微分方程式 (3) は

$$\frac{d}{dx} \left\{ e^{-x^2} \frac{dy}{dx} \right\} + 2ne^{-x^2} y = 0 \tag{8}$$

で与えられる。式 (8) を少し計算すると

$$(-2x)e^{-x^2} \frac{dy}{dx} + e^{-x^2} \frac{d^2y}{dx^2} + 2ne^{-x^2} y = 0$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2ny = 0 \tag{9}$$

となる。式 (9) は**エルミートの微分方程式**と呼ばれ、$y = H_n(x)$ が解である。

4　ラゲールの微分方程式

　ラゲール多項式の微分形は

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x} x^n \right) \tag{10}$$

で与えられる。これは、式 (2) において

$$c_n = 1 \ , \qquad w(x) = e^{-x} \ , \qquad g(x) = x$$

とする場合に等しく、$g(x)$ は 1 次多項式である。また、

$$c_1 = 1 \ , \qquad g'' = 0$$

であり、式 (10) で $n = 1$ とすると、

$$L_1(x) = e^x \frac{d}{dx} \left(e^{-x} x \right) = 1 - x$$

となる。つまり、

$$\phi_1' \equiv L_1'(x) = -1$$

なので、式 (4) より

$$\lambda_n = -n\left(-1 + \frac{n-1}{2} \times 0\right) = n$$

となる。従って、スツルム・リウヴィル型微分方程式 (3) は

$$\frac{d}{dx}\left\{e^{-x}x\frac{dy}{dx}\right\} + ne^{-x}y = 0$$

$$\therefore -e^{-x}x\frac{dy}{dx} + e^{-x}\frac{dy}{dx} + e^{-x}x\frac{d^2y}{dx^2} + ne^{-x}y = 0$$

$$\therefore x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0 \tag{11}$$

となる。式 (11) は**ラゲールの微分方程式**と呼ばれ、$y = L_n(x)$ が解である。

5 補足

ロドリーグの公式 (2) で与えられる n 次多項式 $\phi_n(x)$ がスツルム・リウヴィル型微分方程式 (3) の解になることを示す。まず、x の関数

$$F(x) \equiv c_n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[g(x)\frac{d}{dx}\left\{w(x)g(x)^n\right\}\right] \tag{12}$$

を考え、右辺の $\{\dots\}$ の中身を次の様に微分する。

$$\begin{aligned}
F(x) &= c_n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[g\frac{d}{dx}\left\{g^{n-1}\cdot wg\right\}\right] \\
&= c_n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[g\left\{(n-1)g^{n-2}g'\cdot wg + g^{n-1}\frac{d}{dx}(wg)\right\}\right] \\
&= c_n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[\left\{(n-1)g'w + \frac{d}{dx}(wg)\right\}g^n\right]
\end{aligned} \tag{13}$$

但し、簡単のため各関数の引数 (x) は省いた。次に、ロドリーグの公式 (2) で $n=1$ とすると

$$\phi_1(x) = \frac{c_1}{w(x)}\frac{d}{dx}\left\{w(x)g(x)\right\}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(wg) = \frac{w\phi_1}{c_1} \tag{14}$$

なので、これを式 (13) の右辺の最後の項に代入すると

$$\begin{aligned}
F(x) &= c_n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[\left\{(n-1)g'w + \frac{w\phi_1}{c_1}\right\}g^n\right] \\
&= c_n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[\left\{(n-1)g' + \frac{\phi_1}{c_1}\right\}wg^n\right]
\end{aligned} \tag{15}$$

が得られる。ここで、

$$Z(x) \equiv w(x)g(x)^n$$

と置いて、**ライプニッツの積の微分公式**

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left\{X(x)Y(x)\right\}=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}X^{(n+1-k)}Y^{(k)} \tag{16}$$

を用いると、式 (15) は

$$\begin{aligned}F(x)&=c_n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[\left\{(n-1)g'+\frac{\phi_1}{c_1}\right\}Z\right]\\&=c_n\left[\left\{(n-1)g'+\frac{\phi_1}{c_1}\right\}Z^{(n+1)}+(n+1)\left\{(n-1)g''+\frac{\phi_1'}{c_1}\right\}Z^{(n)}\right.\\&\qquad\left.+\frac{n(n+1)}{2}\left\{(n-1)g'''+\frac{\phi_1''}{c_1}\right\}Z^{(n-1)}+\dots\right]\end{aligned} \tag{17}$$

と計算できる。但し、

$$Z^{(n)}\equiv\frac{d^n}{dx^n}Z(x)$$

とした。式 (17) の右辺において、$g(x)$ は x のたかだか 2 次の多項式、$\phi_1(x)$ は 1 次多項式なので、

$$g'''=g^{(4)}=\dots=0\ ,\qquad \phi_1''=\phi_1^{(4)}=\dots=0$$

である。従って、式 (17) は

$$F(x)=c_n\left[\left\{(n-1)g'+\frac{\phi_1}{c_1}\right\}Z^{(n+1)}+(n+1)\left\{(n-1)g''+\frac{\phi_1'}{c_1}\right\}Z^{(n)}\right] \tag{18}$$

と書ける。ここで、$Z(x)$ を用いてロドリーグの公式 (2) を書き直すと

$$\phi_n(x)=\frac{c_n}{w(x)}Z^{(n)}$$

$$\therefore Z^{(n)}=\frac{w\phi_n}{c_n} \tag{19}$$

となる。よって、これを式 (18) に代入すると

$$F(x)=\left\{(n-1)g'+\frac{\phi_1}{c_1}\right\}(w\phi_n)'+(n+1)\left\{(n-1)g''+\frac{\phi_1'}{c_1}\right\}w\phi_n \tag{20}$$

が得られる。

一方、$Z(x)$ を用いて式 (12) を書き直すと

$$F(x)=c_n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left\{gZ^{(1)}\right\}$$

となり、$g(x)$ がたかだか 2 次多項式であることを考えて、ライプニッツの積の微分公式 (16) を適用すると

$$F(x)=c_n\left[gZ^{(n+2)}+(n+1)g'Z^{(n+1)}+\frac{n(n+1)}{2}g''Z^{(n)}\right]$$

となる。これに式 (19) を代入すると

$$F(x) = g(w\phi_n)'' + (n+1)g'(w\phi_n)' + \frac{n(n+1)}{2}g''w\phi_n \tag{21}$$

が得られる。

$F(x)$ の表式 (20) と (21) は等価なので、両式の右辺を等しいとすると

$$\begin{aligned}
&\left\{(n-1)g' + \frac{\phi_1}{c_1}\right\}(w\phi_n)' + (n+1)\left\{(n-1)g'' + \frac{\phi_1'}{c_1}\right\}w\phi_n \\
&\qquad = g(w\phi_n)'' + (n+1)g'(w\phi_n)' + \frac{n(n+1)}{2}g''w\phi_n \\
&\therefore g(w\phi_n)'' + \left(2g' - \frac{\phi_1}{c_1}\right)(w\phi_n)' - (n+1)\left(\frac{\phi_1'}{c_1} + \frac{n-2}{2}g''\right)w\phi_n = 0 \qquad (22)
\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
(w\phi_n)' &= w'\phi_n + w\phi_n' \\
(w\phi_n)'' &= w''\phi_n + 2w'\phi_n' + w\phi_n''
\end{aligned}$$

と分解し、ϕ_n, ϕ_n', ϕ_n'' に比例する項をまとめると

$$\begin{aligned}
&gw\phi_n'' + \left\{2gw' + \left(2g' - \frac{\phi_1}{c_1}\right)w\right\}\phi_n' \\
&+ \left\{gw'' + \left(2g' - \frac{\phi_1}{c_1}\right)w' - (n+1)\left(\frac{\phi_1'}{c_1} + \frac{n-2}{2}g''\right)w\right\}\phi_n = 0 \qquad (23)
\end{aligned}$$

となる。まず、ϕ_n' の係数に式 (14) を用いると

$$\begin{aligned}
2gw' + \left(2g' - \frac{\phi_1}{c_1}\right)w &= 2gw' + 2g'w - \frac{w\phi_1}{c_1} \\
&= 2(wg)' - (wg)' \\
&= (wg)'
\end{aligned}$$

となる。また、ϕ_n の係数は

$$\begin{aligned}
&gw'' + \left(2g' - \frac{\phi_1}{c_1}\right)w' - (n+1)\left(\frac{\phi_1'}{c_1} + \frac{n-2}{2}g''\right)w \\
&= (wg)'' - \frac{(w\phi_1)'}{c_1} - n\left(\frac{\phi_1'}{c_1} + \frac{n-1}{2}g''\right)w
\end{aligned}$$

と変形することができる。ここで、式 (14) の両辺を x で微分すると

$$(wg)'' = \frac{(w\phi_1)'}{c_1}$$

となり、式 (4) の λ_n を用いると、ϕ_n の係数は

$$(wg)'' - \frac{(w\phi_1)'}{c_1} - n\left(\frac{\phi_1'}{c_1} + \frac{n-1}{2}g''\right)w = \lambda_n w$$

となる。従って、式 (23) は

$$wg\phi_n'' + (wg)'\phi_n' + \lambda_n w\phi_n = 0$$

$$\therefore (wg\phi_n')' + \lambda_n w\phi_n = 0$$

となり、これはスツルム・リウヴィル型微分方程式

$$\frac{d}{dx}\left\{w(x)g(x)\frac{d}{dx}\phi_n(x)\right\} + \lambda_n w(x)\phi_n(x) = 0 \tag{24}$$

である。

以上により、ロドリーグの公式で与えられる n 次多項式 $\phi_n(x)$ はスツルム・リウヴィル型微分方程式を満たすことが示された。