第7回　ロドリーグの公式

理学部　齊藤国靖 *

2022年12月7日

直交多項式を逐次的に求める方法としてモーメント法を学んだが、直交多項式を求める方法はそれ以外にもある。ロドリーグの公式と呼ばれる方法により、n 次の直交多項式が得られることを示し、具体例としてルジャンドル多項式とエルミート多項式を求める。ロドリーグの公式で得られる直交多項式は全て微分形であり、モーメント法で得られる多項式とは形が異なる点に注意しよう。

1　ロドリーグの公式

まず、n 次の多項式 $\phi_n(x)$ を次の様に定義しよう。

$$\phi_n(x) \equiv \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} G_n(x) \tag{1}$$

ここで、$w(x)$ は重み関数、$G_n(x)$ は x のある関数である。多項式 $\phi_n(x) = x^n + \ldots$ はたかだか n 次なので、x で $n+1$ 回微分するとゼロになる。つまり、

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \phi_n(x) = 0$$

である。従って、式 (1) の両辺を $n+1$ 回微分すれば

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left\{ \frac{1}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} G_n(x) \right\} = 0 \tag{2}$$

となる。また、関数 $G_n(x)$ の定義域を $a \le x \le b$ として、$G_n(x)$ の境界条件を

$$G_n^{(k)}(a) = G_n^{(k)}(b) = 0 \tag{3}$$

で与える。但し、$k = 0, 1, \ldots, n-1$ は n より小さい整数であり、k 階の導関数を

$$G_n^{(k)}(x) \equiv \frac{d^k}{dx^k} G_n(x)$$

と表した。

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

次に、$n-1$ 次以下の多項式 $\phi_m(x)$ $(m<n)$ と $\phi_n(x)$ の重み付き内積を計算すると

$$\begin{aligned}\langle \phi_n, \phi_m \rangle &= \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)w(x)dx \\ &= \int_a^b \left\{ \frac{d^n}{dx^n} G_n(x) \right\} \phi_m(x)dx\end{aligned}$$

となる。但し、$\phi_n(x)$ に式 (1) を代入した。最後の定積分を部分積分すると

$$\int_a^b \left\{ \frac{d^n}{dx^n} G_n(x) \right\} \phi_m(x)dx = \left[G_n^{(n-1)}(x)\phi_m(x) \right]_a^b - \int_a^b G_n^{(n-1)}(x)\phi_m^{(1)}(x)dx$$

となる。ここで、式 (3) の境界条件より $G_n^{(n-1)}(a) = G_n^{(n-1)}(b) = 0$ なので、上式の右辺第 1 項はゼロになる。従って、

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = -\int_a^b G_n^{(n-1)}(x)\phi_m^{(1)}(x)dx$$

である。これをさらに部分積分し、境界条件 $G_n^{(n-2)}(a) = G_n^{(n-2)}(b) = 0$ を使うと

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_a^b G_n^{(n-2)}(x)\phi_m^{(2)}(x)dx$$

となる。以下、同様に部分積分を繰り返すと、最終的に

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = (-1)^n \int_a^b G_n(x)\phi_m^{(n)}(x)dx \tag{4}$$

が得られる。ところが、$\phi_m(x)$ $(m<n)$ は $n-1$ 次以下の多項式なので

$$\phi_m^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\phi_m(x) = 0$$

である。よって、式 (4) より

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$$

が成立する。つまり、式 (1) で定義した $\phi_n(x)$ は $n-1$ 次以下の多項式 $\phi_m(x)$ と常に直交する。

式 (1) は**ロドリーグの公式**と呼ばれるもので、これを用いて直交多項式 $\phi_n(x)$ を求める手順は以下の様にまとめられる。

1. $G_n(x)$ に関する $2n+1$ 階微分方程式 (2) を、式 (3) の $2n$ 個の境界条件を用いて解く。
2. 求めた $G_n(x)$ をロドリーグの公式 (1) に代入し、n 次の多項式 $\phi_n(x)$ を求める。

2　例：ルジャンドル多項式

ロドリーグの公式を用いて**ルジャンドル多項式**を求めよう。x の範囲を $-1 \leq x \leq 1$、重み関数を $w(x) = 1$ とすると、式 (2) は

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} G_n(x) = 0$$

となる。この微分方程式の解のうち、式 (3) の境界条件を満たすのは

$$\begin{aligned} G_n(x) &= c_n(x-1)^n(x+1)^n \\ &= c_n\left(x^2-1\right)^n \end{aligned}$$

である。但し、c_n は定数である。よって、これを式 (1) に代入すると

$$\phi_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

が得られる。特に、

$$c_n = \frac{1}{2^n n!}$$

としたものが**ルジャンドル多項式の微分形**

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \quad , \qquad (-1 \le x \le 1) \tag{5}$$

である。

証明は省略するが、ルジャンドル多項式は

$$P_n(1) = 1$$

を満たし、直交条件は

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}$$

で与えられる。

3 例：エルミート多項式

次に、ロドリーグの公式を用いて**エルミート多項式**を求めよう。x の範囲を $-\infty < x < \infty$、重み関数を $w(x) = e^{-x^2}$ として、

$$G_n(x) = e^{-x^2}$$

とする。このとき、式 (1) より

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \frac{1}{w(x)}G_0(x) = e^{x^2}e^{-x^2} = 1 \\ \phi_1(x) &= \frac{1}{w(x)}\frac{d}{dx}G_1(x) = e^{x^2}\left(-2xe^{-x^2}\right) = -2x \\ \phi_2(x) &= \frac{1}{w(x)}\frac{d^2}{dx^2}G_2(x) = e^{x^2}\left(-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}\right) = 4x^2 - 2 \\ &\cdots \end{aligned}$$

となり、$\phi_n(x)$ は確かに n 次多項式になっている。また、$G_n(x)$ の k 階導関数は

$$G_n^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} G_n(x) = (k\text{ 次多項式}) \times e^{-x^2}$$

の形に書けるから、

$$G_n^{(k)}(\pm\infty) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(k\text{ 次多項式})}{e^{x^2}} = 0$$

となり、式 (3) の境界条件も満たしている。よって、ロドリーグの公式 (1) より、

$$\phi_n(x) = c_n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

が得られる。特に、定数を

$$c_n = (-1)^n$$

としたのが**エルミート多項式の微分形**

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\ , \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{6}$$

である。