# 第６回　チェビシェフ多項式

理学部　齊藤国靖 *

2022 年 11 月 28 日

第５回では、ルジャンドル多項式やラゲール多項式など、モーメント法によって様々な直交多項式を導出した。これに関連し、三角関数の直交性に基づいて新たな直交多項式を導出する。チェビシェフ多項式と呼ばれる直交多項式は三角関数によって定義され、倍角の公式により多項式であることを示すことができ、漸化式など重要な関係式を比較的容易に導出することができる。また、チェビシェフ多項式を解とするチェビシェフの微分方程式についても解説する。

## 1　第１種チェビシェフ多項式

三角関数に関連した直交多項式を考えよう。まず、**三角関数の直交性**とは、$m, n$ を整数として

$$\int_0^\pi \cos(m\theta)\cos(n\theta)d\theta = \frac{\pi}{2}\left(\delta_{m,n} + \delta_{m,-n}\right) \tag{1}$$

が成立することである（微分積分学 C 参照）。ここで、新しい変数

$$x \equiv \cos\theta$$

を導入すると、

$$d\theta = -\frac{dx}{\sin\theta} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

なので、式 (1) の左辺は

$$\int_1^{-1} T_m(x)T_n(x)\left(-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \int_{-1}^1 T_m(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

と書くことができる。但し、$T_m(x) \equiv \cos(m\theta)$, $T_n(x) \equiv \cos(n\theta)$ と置いた。つまり、$x$ の関数 $T_m(x)$ に対して

$$\int_{-1}^1 T_m(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\left(\delta_{m,n} + \delta_{m,-n}\right) \tag{2}$$

が成り立つ。

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

式 (2) の左辺の積分は、

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

を重み関数とする重み付き内積を使って

$$\langle T_m, T_n \rangle = \frac{\pi}{2} \left( \delta_{m,n} + \delta_{m,-n} \right) \tag{3}$$

と表せる。つまり、$T_m(x)$ は互いに直交する関数列である。さらに、$T_m(x)$ を具体的に書き出してみると、

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= \cos 0 = 1 \\
T_1(x) &= \cos\theta = x \\
T_2(x) &= \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1 \\
T_3(x) &= \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4x^3 - 3x \\
&\cdots
\end{aligned}$$

となる。これらの一番右側の表式を見ると、$T_m(x)$ は $x$ の $m$ 次多項式であることが解る。従って、$T_m(x)$ は $m$ 次の直交多項式であり、**第１種チェビシェフ多項式**と呼ばれる。

［補足］$m$, $n$ を 0 以上の整数に限定すれば、式 (3) は

$$\langle T_m, T_n \rangle = \frac{\pi}{2} \delta_{m,n}$$

となる。よって、$T'_m(x) \equiv \sqrt{2/\pi} T_m(x)$ として右辺の $\pi/2$ を第 1 種チェビシェフ多項式に含めれば、

$$\langle T'_m, T'_n \rangle = \delta_{m,n}$$

となり、正規直交条件が得られる。

# 2 チェビシェフの漸化式

オイラーの公式を用いた次の等式を考えよう。

$$\begin{aligned}
e^{i(n+1)\theta} + e^{i(n-1)\theta} &= \left( e^{i\theta} + e^{-i\theta} \right) e^{in\theta} \\
&= 2\cos\theta e^{in\theta}
\end{aligned}$$

ここで、両辺の実部を比べると

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos(n\theta)$$
$$\therefore T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x T_n(x)$$

という関係が得られる。これは第 1 種チェビシェフ多項式の漸化式になっており、$T_{n+1}(x)$ について解いた

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{4}$$

を**チェビシェフの漸化式**という。

# 3　チェビシェフの微分方程式

第１種チェビシェフ多項式 $T_n(x) = \cos(n\theta)$ を $\theta$ の関数とみなして $y(\theta) \equiv \cos(n\theta)$ とすると、関数 $y(\theta)$ は次の微分方程式を満たす。

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + n^2 y = 0 \tag{5}$$

一方、$x = \cos\theta$ より、

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx} = -\sin\theta\frac{d}{dx} \tag{6}$$

となるので、$y(\theta)$ の２階導関数は

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{d\theta^2} &= \left(-\sin\theta\frac{d}{dx}\right)\left(-\sin\theta\frac{d}{dx}\right)y \\ &= \sin\theta\frac{d}{dx}\left(\sin\theta\frac{dy}{dx}\right) \\ &= \sin^2\theta\frac{d^2y}{dx^2} + \sin\theta\left(\frac{d}{dx}\sin\theta\right)\frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

と書ける。ここで、$\sin\theta = \sqrt{1-x^2}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{d\theta^2} &= (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{1-x^2}\left(\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\right)\frac{dy}{dx} \\ &= (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} \end{aligned} \tag{7}$$

となる。但し、

$$\sqrt{1-x^2}\left(\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2}\right) = -x$$

を用いた。式 (7) を (5) に代入すると

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0 \tag{8}$$

となる。これを**チェビシェフの微分方程式**といい、元々 $y(\theta) = T_n(x)$ だったから、式 (8) の解は第１種チェビシェフ多項式である。

式 (5) は $y(\theta) = \sin(n\theta)$ でも成り立つ。従って、

$$U_n(x) \equiv \sin(n\theta) \tag{9}$$

もチェビシェフの微分方程式の解となり、$U_n(x)$ のことを**第２種チェビシェフ関数**という。但し、$T_n(x)$ とは違い、$U_n(x)$ は多項式ではないことに注意しよう。

# 4 チェビシェフの微分漸化式

式 (6) より

$$\frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}$$

なので、

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{d}{dx}T_n(x) &= \sin^2\theta\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)\cos(n\theta)\\ &= -\sin\theta\frac{d}{d\theta}\cos(n\theta)\\ &= n\sin\theta\sin(n\theta)\end{aligned} \tag{10}$$

と計算できる。但し、$1-x^2=\sin^2\theta$ を用いた。ここで、加法定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos(n-1)\theta &= \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta\\ \cos(n+1)\theta &= \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta\end{aligned}$$

なので、

$$\sin\theta\sin(n\theta) = \frac{1}{2}\left\{\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta\right\}$$

と書ける。従って、式 (10) は

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{d}{dx}T_n(x) &= \frac{n}{2}\left\{\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta\right\}\\ &= \frac{n}{2}\left\{T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)\right\}\end{aligned}$$

となる。最後の $T_{n+1}(x)$ にチェビシェフの漸化式 (4) を代入すると、

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}T_n(x) = n\left\{-xT_n(x) + T_{n-1}(x)\right\}$$

$$\therefore (1-x^2)\frac{d}{dx}T_n(x) + nxT_n(x) = nT_{n-1}(x) \tag{11}$$

となる。これを**チェビシェフの微分漸化式**という。