

第4回 特別な微分方程式の級数解

理学部 齊藤国靖*

2022年10月19日

第3回で学んだ確定特異点をもつ微分方程式を応用し、オイラーの微分方程式とガウスの微分方程式について考える。2つの確定特異点をもつ微分方程式はオイラーの微分方程式に帰着し、 $x = \infty$ も含めて3つの確定特異点をもつ微分方程式はガウスの微分方程式に帰着することを示す。また、ガウスの微分方程式の解が超幾何関数によって与えられることも説明する。

1 オイラーの微分方程式

第3回では、 $x = x_0$ を確定特異点とする変数係数の2階線型微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{p(x)}{x-x_0} \frac{dy}{dx} + \frac{q(x)}{(x-x_0)^2} y = 0 \quad (1)$$

を考えた。ここでは、式(1)のタイプの微分方程式をいくつか扱う。

例えば、2階線型微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{a}{x-x_1} + \frac{2-a}{x-x_2} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{b}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2} y = 0 \quad (2)$$

を考える。但し、 a, b は定数であり、 $x_1 \neq x_2$ とする。上式の変数係数を

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x-x_1} \left\{ a + \frac{(2-a)(x-x_1)}{x-x_2} \right\} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{(x-x_1)^2} \left\{ \frac{b}{(x-x_2)^2} \right\} y = 0$$

と変形し、式(1)と比べると、

$$x_0 = x_1, \quad p(x) = a + \frac{(2-a)(x-x_1)}{x-x_2}, \quad q(x) = \frac{b}{(x-x_2)^2}$$

の場合に相当している。 $x_1 \neq x_2$ なので、 $p(x), q(x)$ は $x = x_1$ で解析的であり(定義でき)、 x_1 は式(2)の確定特異点であることが解る。一方、式(2)の変数係数を

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x-x_2} \left\{ \frac{a(x-x_2)}{x-x_1} + 2-a \right\} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{(x-x_2)^2} \left\{ \frac{b}{(x-x_1)^2} \right\} y = 0$$

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

と変形すると、今度は

$$x_0 = x_2, \quad p(x) = \frac{a(x-x_2)}{x-x_1} + 2 - a, \quad q(x) = \frac{b}{(x-x_1)^2}$$

の場合に相当している。 $p(x), q(x)$ は $x = x_2$ で解析的なので、 x_2 も式 (2) の確定特異点である。つまり、式 (2) の確定特異点は $x = x_1, x_2$ の2つである。

ここで、新しい変数 z を

$$z \equiv \frac{x-x_1}{x-x_2} \tag{3}$$

として導入すると、

$$1-z = \frac{x_1-x_2}{x-x_2}$$

なので、 z の x に関する1階微分は

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{d}{dx}(1-z) = \frac{x_1-x_2}{(x-x_2)^2} = \frac{(1-z)^2}{x_1-x_2} \tag{4}$$

となる。よって、 y の x に関する1階微分は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{(z-1)^2}{x_1-x_2} \frac{dy}{dz} \tag{5}$$

で与えられる。さらに、 y の x に関する2階微分は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dz}{dx} \frac{d}{dz} \left(\frac{dy}{dx} \right) \tag{6}$$

となるが、

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{2(z-1)}{x_1-x_2} \frac{dy}{dz} + \frac{(z-1)^2}{x_1-x_2} \frac{d^2y}{dz^2}$$

なので、式 (6) の最後の dz/dx に式 (4) を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{(z-1)^2}{x_1-x_2} \left\{ \frac{2(z-1)}{x_1-x_2} \frac{dy}{dz} + \frac{(z-1)^2}{x_1-x_2} \frac{d^2y}{dz^2} \right\} \\ &= \frac{2(z-1)^3}{(x_1-x_2)^2} \frac{dy}{dz} + \frac{(z-1)^4}{(x_1-x_2)^2} \frac{d^2y}{dz^2} \end{aligned} \tag{7}$$

となる。従って、これらを式 (2) に代入し、両辺に z^2 をかけて整理すると [計算略]

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + az \frac{dy}{dz} + \frac{b}{(x_1-x_2)^2} y = 0 \tag{8}$$

となる。これは第3回で扱ったオイラーの微分方程式と同じ形であり、解を確定特異点の周りで展開して解くことができる。なお、式 (8) の確定特異点 $z = 0, \infty$ は、式 (3) より、それぞれ $x = x_1, x_2$ に対応している。この様に、2つの確定特異点をもつ2階線型微分方程式はオイラーの微分方程式に帰着できる。

2 ガウスの微分方程式

a, b, c を定数とすると、次の変数係数の2階線型微分方程式

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + \{(1+a+b)x-c\}\frac{dy}{dx} + aby = 0 \quad (9)$$

をガウスの微分方程式という。両辺を $x(x-1)$ で割ると

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left\{ \frac{(1+a+b)x-c}{x(x-1)} \right\} \frac{dy}{dx} + \frac{ab}{x(x-1)}y = 0 \quad (10)$$

となる。まず、式(10)の変数係数を

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \left\{ \frac{(1+a+b)x-c}{x-1} \right\} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2} \left(\frac{abx}{x-1} \right) y = 0$$

と変形し、式(1)と比較すると、

$$x_0 = 0, \quad p(x) = \frac{(1+a+b)x-c}{x-1}, \quad q(x) = \frac{abx}{x-1}$$

の場合に相当している。 $p(x), q(x)$ は $x=0$ で解析的であり(定義でき)、 $x=0$ は式(10)の確定特異点であることが解る。一方、式(10)の変数係数を

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x-1} \left\{ \frac{(1+a+b)x-c}{x} \right\} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{(x-1)^2} \left\{ \frac{ab(x-1)}{x} \right\} y = 0$$

と変形し、式(1)と比較すると、今度は

$$x_0 = 1, \quad p(x) = \frac{(1+a+b)x-c}{x}, \quad q(x) = \frac{ab(x-1)}{x}$$

の場合に相当している。 $p(x), q(x)$ は $x=1$ で解析的なので、 $x=1$ も式(10)の確定特異点である。さらに、 $z=1/x$ を用いると、式(10)は [計算略]

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z} \left\{ \frac{1-a-b+(c-2)z}{1-z} \right\} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{z^2} \left(\frac{ab}{1-z} \right) y = 0 \quad (11)$$

となり、 $z=0$ つまり $x=\infty$ も式(10)の確定特異点であることが解る。以上により、ガウスの微分方程式(9)の確定特異点は $x=0, 1, \infty$ の3つであることが解った。一般に、 $x=\infty$ も含めて3つの確定特異点をもつ2階線型微分方程式はガウスの微分方程式に帰着できる。

2.1 級数解法

式(9)の解を確定特異点 $x=0$ の周りで展開して求める。指数 k を導入して解を展開すると、

$$y = x^k \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+k} \quad (12)$$

となる.

まず, 展開した式 (12) を (9) の左辺の第 1 項に代入すると

$$\begin{aligned} x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} &= (x^2-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)c_nx^{n+k-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)c_nx^{n+k} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)c_nx^{n+k-1} \end{aligned}$$

となる. ここで, 上式の右辺の第 2 項の和において, $n=0$ の項だけ抜き出して書くと

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)c_nx^{n+k-1} &= k(k-1)c_0x^{k-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+k)(n+k-1)c_nx^{n+k-1} \\ &= k(k-1)c_0x^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1+k)(n+k)c_{n+1}x^{n+k} \end{aligned}$$

となる. 但し, 最後に $n=1$ からの和を $n=0$ からの和に書き直した. これを元の式に戻すと

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} = -k(k-1)c_0x^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\{(n+k)(n+k-1)c_n - (n+k+1)(n+k)c_{n+1}\}x^{n+k} \quad (13)$$

となる.

次に, 展開した式 (12) を (9) の左辺の第 2 項に代入すると

$$\begin{aligned} \{(1+a+b)x-c\}\frac{dy}{dx} &= \{(1+a+b)x-c\}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)c_nx^{n+k-1} \\ &= (1+a+b)\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)c_nx^{n+k} - c\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)c_nx^{n+k-1} \end{aligned}$$

となる. ここで, 上式の右辺の第 2 項の和において, $n=0$ の項だけ抜き出して書くと

$$\begin{aligned} c\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)c_nx^{n+k-1} &= ckc_0x^{k-1} + c\sum_{n=1}^{\infty}(n+k)c_nx^{n+k-1} \\ &= ckc_0x^{k-1} + c\sum_{n=0}^{\infty}(n+1+k)c_{n+1}x^{n+k} \end{aligned}$$

となる. 但し, 最後に $n=1$ からの和を $n=0$ からの和に書き直した. これを元の式に戻すと

$$\{(1+a+b)x-c\}\frac{dy}{dx} = -ckc_0x^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\{(1+a+b)(n+k)c_n - c(n+k+1)c_{n+1}\}x^{n+k} \quad (14)$$

となる.

従って, 式 (13), (14) を使うと, ガウスの微分方程式 (9) は

$$-k(k-1+c)c_0x^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [(n+k)(n+k-1) + (1+a+b)(n+k) + ab] c_n - [(n+k+1)(n+k) + c(n+k+1)] c_{n+1} \right\} x^{n+k} = 0 \quad (15)$$

となる. 式 (15) が成立するには, x の各べきの係数がゼロでなければならない. まず, x^{n+k} の係数をゼロにすると, 漸化式

$$[(n+k)(n+k-1) + (1+a+b)(n+k) + ab] c_n - [(n+k+1)(n+k) + c(n+k+1)] c_{n+1} = 0 \quad (16)$$

が得られる. また, x^{k-1} の係数をゼロにすると

$$\begin{aligned} -k(k-1+c)c_0 &= 0 \\ \therefore k &= 0, 1-c \end{aligned}$$

となる. 但し, $c_0 \neq 0$ であることを使った. よって, 指数は $k=0$ か $1-c$ のいずれかなので, それぞれ場合分けして考える.

2.1.1 $k=0$ の場合

このとき, 漸化式 (16) は

$$\begin{aligned} [n^2 + (a+b)n + ab] c_n - [n(n+1) + c(n+1)] c_{n+1} &= 0 \\ \therefore (n+a)(n+b)c_n &= (n+1)(n+c)c_{n+1} \\ \therefore c_{n+1} &= \frac{(n+a)(n+b)}{(n+1)(n+c)} c_n \end{aligned}$$

となるので, これを繰り返し使って,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{ab}{c} c_0 \\ c_2 &= \frac{(a+1)(b+1)}{2(c+1)} c_1 = \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{2c(c+1)} c_0 \\ c_3 &= \frac{(a+2)(b+2)}{3(c+2)} c_2 = \frac{a(a+1)(a+2) \cdot b(b+1)(b+2)}{3 \cdot 2c(c+1)(c+2)} c_0 \\ &\dots \\ &\dots \\ c_n &= \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1) \cdot b(b+1) \cdots (b+n-1)}{n!c(c+1) \cdots (c+n-1)} c_0 \end{aligned}$$

が得られる。従って、式 (12) より、微分方程式の解は

$$y(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1) \cdot b(b+1) \cdots (b+n-1)}{n!c(c+1) \cdots (c+n-1)} c_0 x^n \quad (17)$$

で与えられる。ここで、式 (17) の様な無限級数は**超幾何級数**と呼ばれ、 x に加えて、 a, b, c もパラメータとした関数

$$F(a, b, c; x) \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1) \cdot b(b+1) \cdots (b+n-1)}{n!c(c+1) \cdots (c+n-1)} x^n$$

を**超幾何関数**という。

2.1.2 $k = 1 - c$ の場合

このとき、漸化式 (16) を解いて同様に解を求めることができる。計算は省略するが、解は超幾何関数を使って

$$y(x) = c_0 x^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1, -c + 2; x) \quad (18)$$

と表される。