# 第 3 回　確定特異点

理学部　齊藤国靖 *

2022 年 10 月 4 日

２階線型微分方程式の変数係数が確定特異点をもつ場合の解法について説明する．第２回で微分方程式の解を正則点の周りで整級数展開したのと同じように，確定特異点の周りで解を整級数展開することが可能である．但し，新たな指数を導入する必要があり，整級数展開の係数を求めるのと同時に，指数も決定しなければならない．この指数を決める方程式は決定方程式と呼ばれ，係数の漸化式と並んで重要である．

## 1　確定特異点

次の変数係数の２階線型微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{p(x)}{x-x_0}\frac{dy}{dx} + \frac{q(x)}{(x-x_0)^2}y = 0 \tag{1}$$

において，$p(x)$, $q(x)$ が $x = x_0$ で解析的である（定義できる）とする．または，$p(x)$, $q(x)$ が $x = x_0$ の周りで

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n (x-x_0)^n \tag{2}$$

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n (x-x_0)^n \tag{3}$$

の様に整級数展開できるとする．このとき，$x_0$ を微分方程式 (1) の**確定特異点**という．

### 1.1　オイラーの微分方程式

$a$, $b$ を定数，$r(x)$ をある関数とするとき，次の変数係数の２階線型微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = r(x) \tag{4}$$

を**オイラーの微分方程式**という．ここで，$a = 1$, $b = -1$, $r(x) = 0$ の場合を考えると，式 (4) は

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

となる．両辺を $x^2$ で割ると

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x^2}y = 0 \tag{5}$$

となるから，これを式 (1) と比較すると，

$$x_0 = 0\ , \quad p(x) = 1\ , \quad q(x) = -1$$

の場合であることが解る．従って，$x = 0$ は式 (5) の確定特異点である．

ところで，新しい変数 $z = 1/x$ を導入すると，

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} \\
&= -z^2\frac{dy}{dz} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} \\
&= \frac{1}{x^4}\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dz} \\
&= z^4\frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\frac{dy}{dz}
\end{aligned}$$

となるので，これらを式 (5) に代入して整理すると，

$$\begin{aligned}
z^4\frac{d^2y}{dz^2} + z^3\frac{dy}{dz} - z^2y = 0 \\
\therefore \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} - \frac{1}{z^2}y = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

となる．これを式 (5) と比較すると，$x$ が $z$ に置き換わっただけで同じ式であるから，$z = 0$ は式 (6) の確定特異点である．すなわち，$x = \infty$ も式 (5) の確定特異点であることが解る．

## 1.2　ベッセルの微分方程式

$\nu$ を定数とするとき，次の変数係数の 2 階線型微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{7}$$

を**ベッセルの微分方程式**という．両辺を $x^2$ で割ると

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}y = 0 \tag{8}$$

となるから，これを式 (1) と比較すると，

$$x_0 = 0\ , \quad p(x) = 1\ , \quad q(x) = x^2 - \nu^2$$

の場合であることが解る．従って，$x=0$ は式 (8) の確定特異点である．

一方，先程と同様に変数 $z=1/x$ を用いると，

$$\frac{dy}{dx}=-z^2\frac{dy}{dz}\ , \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=z^4\frac{d^2y}{dz^2}+2z^3\frac{dy}{dz}$$

であるから，式 (7) に代入して整理すると，

$$\begin{aligned} z^4\frac{d^2y}{dz^2}+z^3\frac{dy}{dz}+z^2\left(\frac{1}{z^2}-\nu^2\right)y=0 \\ \therefore \frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z^2}-\nu^2\right)y=0 \end{aligned} \tag{9}$$

となる．これを式 (1) と比較すると，今度は

$$z_0=0\ , \quad p(z)=1\ , \quad q(z)=\frac{1}{z^2}-\nu^2$$

ということになり，$q(z)$ が $z=0$ で発散する（解析的ではない）のが解る．従って，$z=0$ は式 (9) の特異点であることに変わりはないが，確定特異点ではない．この様な場合，$z=0$ つまり $x=\infty$ は式 (7) の**不確定特異点**という．

# 2　確定特異点があるときの整級数展開

第 2 回の内容を復習すると，変数係数の 2 階線型微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \tag{10}$$

において，$p(x)$, $q(x)$ が $x=x_0$ で解析的ならば，式 (10) の解は

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n \tag{11}$$

の様に整級数展開できる．このとき，$x_0$ を式 (10) の**正則点**というのであった．

一方，変数係数の 2 階線型微分方程式が

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{p(x)}{x-x_0}\frac{dy}{dx}+\frac{q(x)}{(x-x_0)^2}y=0 \tag{12}$$

で与えられ，$p(x)$, $q(x)$ が $x=x_0$ で解析的ならば，$x_0$ は式 (12) の確定特異点である．このとき，式 (12) の解は

$$y(x)=(x-x_0)^k\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n \tag{13}$$

の様に整級数展開できる．但し，$c_0\neq 0$ であり，**指数** $k$ は整数でなくてもよい．

## 2.1　漸化式

確定特異点がある 2 階線型微分方程式の解を式 (13) で与えるためには，係数 $c_n$ と指数 $k$ を求めなければならない．まず，式 (13) の 1 階および 2 階導関数を計算すると

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+k)c_n(x-x_0)^{n+k-1} \tag{14}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)c_n(x-x_0)^{n+k-2} \tag{15}$$

であるから，式 (12) の左辺の第 2 項は

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{x-x_0}\frac{dy}{dx} &= \sum_{m=0}^{\infty}P_m(x-x_0)^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)c_n(x-x_0)^{n+k-1}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)P_m c_n(x-x_0)^{n+m+k-2} \qquad (16)\end{aligned}$$

となる．但し，$p(x)$ に式 (2) を代入した．ここで，$s=n+m$ と置けば，$n$ と $m$ は

$$\begin{array}{ccccccc} n &=& 0\,, & 1\,, & 2\,, & \ldots\,, & s\\ m &=& s\,, & s-1\,, & s-2\,, & \ldots\,, & 0\end{array}$$

という組み合わせで変化する．つまり，$n$ が 0 から $s$ まで変化すれば，$m=s-n$ は $s$ から 0 まで自動的に変化する．$s$ は 0 から $\infty$ まで自由に値を取るから，式 (16) の和の取り方を

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{s}$$

に変更すると，

$$\frac{p(x)}{x-x_0}\frac{dy}{dx} = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{s}(n+k)P_{s-n}c_n(x-x_0)^{s+k-2} \tag{17}$$

となる．但し，$m=s-n$ を用いた．同様に，式 (12) の左辺の第 3 項は

$$\begin{aligned}\frac{q(x)}{(x-x_0)^2}y &= \sum_{m=0}^{\infty}Q_m(x-x_0)^{m-2}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+k}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}Q_m c_n(x-x_0)^{n+m+k-2}\\ &= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{s}Q_{s-n}c_n(x-x_0)^{s+k-2} \qquad (18)\end{aligned}$$

となる．但し，$q(x)$ に式 (3) を代入し，$n$ と $m$ の和を $n$ と $s$ の和に変更した．

以上，式 (15), (17), (18) を元の微分方程式 (12) に代入すると，

$$\sum_{s=0}^{\infty}\left[(s+k)(s+k-1)c_s+\sum_{n=0}^{s}\left\{(n+k)P_{s-n}+Q_{s-n}\right\}c_n\right](x-x_0)^{s+k-2}=0$$

となる．但し，式 (15) の $n$ を $s$ に書き換えた．この等式が成り立つのは，$(x-x_0)^{s+k-2}$ の各係数がゼロのときなので，

$$(s+k)(s+k-1)c_s+\sum_{n=0}^{s}\left\{(n+k)P_{s-n}+Q_{s-n}\right\}c_n=0 \tag{19}$$

が得られる．上式には $c_n$ と $k$ が含まれており，これらを決めるには具体的に $s$ の値を与える必要がある．

## 2.2 決定方程式

式 (19) の最も簡単な場合は $s=0$ のときである．このとき，$n$ も $n=0$ だけだから，式 (19) は

$$k(k-1)c_0+\left\{kP_0+Q_0\right\}c_0=0$$
$$\therefore k^2+(P_0-1)k+Q_0=0 \tag{20}$$

となる．これは**決定方程式**と呼ばれ，$k$ の 2 次方程式なので解くことができて，2 つの指数 $k_1, k_2$ が求まる．

## 2.3 例題

オイラーの微分方程式 (5) の解を，式 (13) の様に整級数展開して求めよ．但し，確定特異点は $x=0$ とする．

式 (5) を式 (1), (2), (3) と比べると，$p(x), q(x)$ を $x=0$ の周りで展開したときの係数は

$$P_0=1\ , \quad Q_0=-1\ , \quad P_n=Q_n=0 \quad (n\geq 1) \tag{21}$$

で与えられることが解る．まず，$P_0, Q_0$ を決定方程式 (20) に代入すると

$$k^2-1=0$$

となるので，2 つの指数 $k=\pm 1$ が求まる．次に，式 (19) の左辺の $n$ に関する和をばらして，各 $c_s$ について整理し直すと

$$\left\{(s+k)(s+k-1)+(s+k)P_0+Q_0\right\}c_s+\left\{(s+k-1)P_1+Q_1\right\}c_{s-1}$$
$$+\cdots+\left\{(k+1)P_{s-1}+Q_{s-1}\right\}c_1+(kP_s+Q_s)\,c_0=0$$

となるから，これに式 (21) を用いて

$$\left\{(s+k)^2-1\right\}c_s=0 \quad (s\geq 1)$$

を得る．ここで，$k=1$ を代入すると

$$\left\{(s+1)^2-1\right\}c_s=0\ ,\qquad \therefore s(s+2)c_s=0$$

となる．しかし，$s\geq 1$ でこれを満たすには，常に $c_s=0$ でなければならない．一方，$k=-1$ を代入すると

$$\left\{(s-1)^2-1\right\}c_s=0\ ,\qquad \therefore s(s-2)c_s=0$$

となる．よって，$s\geq 1$ でこれを満たすには，$s=2$ 以外の係数は全てゼロ，つまり $c_s=0$ $(s\neq 2)$ であることが解る．

以上の結果を整理すると，

- $k=1$ のとき，ゼロでない係数は $c_0$ のみ
- $k=-1$ のとき，ゼロでない係数は $c_0$ と $c_2$

であるから，確定特異点 $x=0$ の周りの整級数展開の式 (13) は，$k=\pm 1$ の場合を合わせて

$$y=c_0x+\frac{1}{x}\left(c_0'+c_2'x^2\right)$$

となる．但し，$k=-1$ のときの係数を $c_0',c_2'$ として区別した．よって，オイラーの微分方程式 (5) の解は

$$y=\left(c_0+c_2'\right)x+\frac{c_0'}{x}$$

で与えられる．

- 問題
  変数係数の 2 階線型微分方程式

$$x(x+2)\frac{d^2y}{dx^2}+(x+1)\frac{dy}{dx}-4y=0 \tag{22}$$

の解を，式 (13) の様に整級数展開して求めよ．但し，確定特異点は $x=0$ とする．