第２回　整級数展開と正則点

理学部　齊藤国靖 *

2022 年 10 月 5 日

２階線型微分方程式の一般解法として，整級数展開による方法を説明する．整級数展開を用いれば，微分方程式を解く問題は，展開係数の漸化式を解く問題に置き換わる．また，２階線型微分方程式の係数が変数であっても，それらが解析的であれば，整級数展開で求めた解も解析的である．まずは整級数展開の簡単な例から始め，収束半径や正則点の順に説明を進める．

1　整級数展開

微分方程式の係数が定数であるか変数であるかに依らず，２階線型微分方程式の一般的な解き方として，**整級数展開**を用いる方法がある．まずは整級数展開に慣れるため，２階線型微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \tag{1}$$

を考えよう．式 (1) は定数係数なので**特性方程式**による方法で解けるが，ここでは練習のため別のやり方で解いてみよう．まず，$x = 0$ の近傍における解を求めるという前提で，式 (1) の解を

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{2}$$

と展開する．これは x のべき級数であり，$n = \infty$ まで和をとるので**無限級数**である．式 (2) を用いて $y(x)$ の１階および２階導関数を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n\end{aligned}$$

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

となる．従って，式 (2) を (1) に代入すれば，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+2)(n+1)c_{n+2}-3(n+1)c_{n+1}+2c_n\right\}x^n=0$$

が得られる．この方程式が成立するには，x の各べきの係数がゼロでなければならないので，

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}-3(n+1)c_{n+1}+2c_n=0 \tag{3}$$

である．式 (3) は c_n に関する**漸化式**であり，これを解いて c_n を求めれば，x のべき級数で展開した式 (2) が確定し，$x=0$ の近傍における解が求まったことになる．つまり，２階線型微分方程式 (1) を解く問題は，式 (2) の**整級数展開**により，漸化式 (3) を解く問題に置き換わったことになる．

1.1 漸化式の解き方

c_n を具体的に求めるため，式 (3) を次の様に変形しよう．

$$(n+1)\left\{(n+2)c_{n+2}-2c_{n+1}\right\}-\left\{(n+1)c_{n+1}-2c_n\right\}=0 \tag{4}$$

ここで，

$$d_n \equiv (n+1)c_{n+1}-2c_n \tag{5}$$

を導入すると，式 (4) は

$$(n+1)d_{n+1}-d_n=0$$

と書ける．つまり，

$$d_{n+1}=\frac{1}{n+1}d_n$$

なので，これを d_n から繰り返し使うと，

$$d_n=\frac{1}{n}d_{n-1}=\frac{1}{n(n-1)}d_{n-2}=\cdots=\frac{1}{n!}d_0$$

が得られる．これを式 (5) に代入して整理すると，

$$(n+1)c_{n+1}-2c_n=\frac{1}{n!}d_0$$

$$\therefore (n+1)!c_{n+1}-2n!c_n=d_0 \tag{6}$$

となる．さらに，

$$f_n \equiv n!c_n \tag{7}$$

と置けば，式 (6) は

$$f_{n+1}-2f_n=d_0$$

となる．ここで，両辺に $2f_n+d_0$ を足すと

$$f_{n+1}+d_0=2(f_n+d_0)$$

なので，これを $f_n + d_0$ から繰り返し使うと，

$$f_n + d_0 = 2(f_{n-1} + d_0) = 2^2(f_{n-2} + d_0) = \cdots = 2^n(f_0 + d_0)$$

が得られる．従って，

$$f_n = 2^n(f_0 + d_0) - d_0$$

なので，これに式 (7) を代入して整理すると，

$$n!c_n = 2^n(f_0 + d_0) - d_0$$

$$\therefore c_n = a\frac{2^n}{n!} + b\frac{1}{n!} \tag{8}$$

となる．但し，

$$a \equiv f_0 + d_0 \ , \qquad b \equiv -d_0$$

とした．式 (8) が求める係数であり，これを式 (2) に代入すると，微分方程式の解

$$y(x) = a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n + b\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \tag{9}$$

が得られる．指数関数のテイラー展開を用いると，式 (9) は

$$y(x) = ae^{2x} + be^x \tag{10}$$

と書き換えられるので，確かに式 (1) の解であることが解る．

1.2　無限級数の収束半径

一般に，整級数展開で取り敢えず求めた微分方程式の解を**形式解**という．形式解が本当の解として意味があるのは，式 (2) の無限級数が収束する場合である．このとき，形式解は**解析的**であるという．ところで，x が $|x| < \rho$ の範囲であれば式 (2) が収束するとき，ρ のことを**収束半径**という．上述の例で収束半径を計算すると，

$$\rho \equiv \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

なので，式 (2) の無限級数は $|x| < \infty$ で収束する．つまり，整級数展開で求めた式 (9) あるいは (10) は，x の全域で意味のある解である．

2　正則点

式 (1) は定数係数の簡単な例であったが，より一般に，変数係数の 2 階線型微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \tag{11}$$

を考えよう．ここで，$p(x)$, $q(x)$ は x の関数であり，$x = x_0$ で解析的であるとする．つまり，

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n \ , \qquad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n \tag{12}$$

と展開した無限級数が収束するものとする．例えば，$p(x)$, $q(x)$ が $x = x_0$ の周りでテイラー展開できる場合，式 (12) の様に書ける．このとき，式 (11) の解の整級数展開

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \tag{13}$$

は解析的であることが言える．また，$x = x_0$ を微分方程式 (11) の**正則点**という．

2.1　例題

変数係数の 2 階線型微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - y = 0 \tag{14}$$

に対し，$x = 0$ で解析的な解 $y(x)$ を求めよ．

まず，式 (14) を (11) と比べると

$$p(x) = -x \ , \qquad q(x) = -1$$

であり，これらは式 (12) において $x_0 = 0$ として

$$\begin{aligned} p_1 &= -1 \ , \qquad p_0 = p_2 = \cdots = 0 \\ q_0 &= -1 \ , \qquad p_1 = p_2 = \cdots = 0 \end{aligned}$$

とした場合に等しい．よって，$x = 0$ は微分方程式 (14) の正則点であり，解を $x = 0$ の周りで整級数展開すると

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{15}$$

となる．式 (15) を (14) に代入し，各項を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n \\ x\frac{dy}{dx} &= x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n \end{aligned}$$

となるので（2 番目の最後の式は，$n = 0$ のときゼロになることに注意)，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+2)(n+1)c_{n+2} - (n+1)c_n \right\} x^n = 0$$

が得られる．従って，x の各べきの係数がゼロでなければならないので，

$$(n+2)c_{n+2} = c_n \tag{16}$$

である．

c_n に関する漸化式 (16) を解くため，まずは n が偶数の場合を考える．m を整数として $n = 2m$ だから，式 (16) は

$$2(m+1)c_{2(m+1)} = c_{2m}$$

となる．つまり，

$$c_{2(m+1)} = \frac{c_{2m}}{2(m+1)}$$

なので，これを c_{2m} から繰り返し使うと

$$c_{2m} = \frac{c_{2(m-1)}}{2m} = \frac{c_{2(m-2)}}{2m \cdot 2(m-1)} = \cdots = \frac{c_0}{2m \cdot 2(m-1) \cdots 4 \cdot 2}$$

$$\therefore c_{2m} = \frac{c_0}{2^m m!}$$

である．同様に，n が奇数の場合を考えると $n = 2m+1$ だから，式 (16) は

$$(2m+3)c_{2m+3} = c_{2m+1}$$

となる．つまり，

$$c_{2m+3} = \frac{c_{2m+1}}{2m+3}$$

なので，これを c_{2m+1} から繰り返し使うと

$$c_{2m+1} = \frac{c_{2m-1}}{2m+1} = \frac{c_{2m-3}}{(2m+1)\cdot(2m-1)} = \cdots = \frac{c_1}{(2m+1)\cdot(2m-1)\cdots 5 \cdot 3}$$

である．

以上により，式 (15) は

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} x^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m+1} x^{2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_0}{2^m m!} x^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_1}{(2m+1)\cdot(2m-1)\cdots 5\cdot 3} x^{2m+1} \\ &= c_0 e^{x^2/2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_1}{(2m+1)\cdot(2m-1)\cdots 5\cdot 3} x^{2m+1} \end{aligned} \tag{17}$$

となる．但し，右辺の第１項に対して指数関数のテイラー展開の表式を用いた．

- 問題

  変数係数の２階線型微分方程式

  $$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x^2-1} y = 0 \tag{18}$$

  に対し，$x = 0$ で解析的な解 $y(x)$ を求めよ．