第 1 回　完全微分型の微分方程式

理学部　齊藤国靖 *

2022 年 9 月 20 日

１階微分方程式の典型的な問題として，完全微分型の微分方程式を説明する．完全微分型であるための必要十分条件や一般解の求め方を解説し，微分方程式を完全微分型に帰着させる積分因子の方法について説明する．また，熱力学で扱うエントロピーと完全微分型の関係も紹介する．

1　完全微分型

$p(x,y)$ と $q(x,y)$ を x と y の 2 変数関数として，次の 1 階微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+\frac{p(x,y)}{q(x,y)}=0 \tag{1}$$

を y について解く．まず，上式を x と y に対称な形に書き直せば

$$p(x,y)dx+q(x,y)dy=0 \tag{2}$$

となる．ところで，x と y のある関数 $u(x,y)$ の**全微分**は

$$\begin{aligned} du(x,y) &= u(x+dx,y+dy)-u(x,y) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \end{aligned} \tag{3}$$

である．もし，$p(x,y)$ と $q(x,y)$ が

$$p(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\ , \qquad q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y} \tag{4}$$

で与えられる場合，これらを式 (2) に代入して

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0 \tag{5}$$

が得られる．これを式 (3) と比較すれば，

$$du(x,y)=0 \tag{6}$$

* k.saitoh@cc.kyoto-su.ac.jp

となることが解る．

つまり，2つの関数 $p(x,y)$ と $q(x,y)$ が，ある関数 $u(x,y)$ を用いて式 (4) の様に表されれば，式 (1) は $u(x,y)$ の全微分がゼロ，つまり式 (6) に置き換わる．この様に，式 (4) が成り立つ場合，微分方程式は**完全微分型**であるという．

1.1　完全微分型の必要十分条件

式 (1) が完全微分型であるための条件式 (4) は少し厳しい様に見えるが，実は

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \tag{7}$$

が成り立てば完全微分型であると言える．ここでは，式 (7) が完全微分型の**必要十分条件**であることを示そう．

1.1.1　必要条件

まず，式 (1) が完全微分型であれば，式 (4) が成り立つので，$p(x,y)$ を y で微分して

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

である．同様に，$q(x,y)$ を x で微分すると

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

であるから，（右辺の微分の順序を入れ替えれば）これらは等しく，

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

である．つまり，式 (7) が導かれた．

1.1.2　十分条件

次に，式 (7) が成り立つとして，$p(x,y)$ の x に関する不定積分

$$F(x,y) = \int p(x,y)dx$$

を導入する．このとき，$p(x,y)$ は

$$p(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} \tag{8}$$

で与えられ，式 (7) を用いると，$q(x,y)$ の x に関する微分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

となる．上式は

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(q-\frac{\partial F}{\partial y}\right)=0$$

と変形できるから，これを x で積分して

$$q-\frac{\partial F}{\partial y}=G(y) \tag{9}$$

を得る．但し，$G(y)$ は y のみの関数である．

一方，$q(x,y)$ の y に関する不定積分を

$$u(x,y)=\int q(x,y)dy \tag{10}$$

と置けば，$q(x,y)$ は

$$q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y} \tag{11}$$

で与えられる．また，式 (9) を (10) に代入すると

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\int\left(\frac{\partial F}{\partial y}+G(y)\right)dy \\ &=F(x,y)+\int G(y)dy \end{aligned}$$

となり，最後の右辺の第 2 項は y のみの関数である．上式の両辺を x で微分すると

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}=p(x,y) \tag{12}$$

である．但し，式 (8) を用いた．よって，式 (11) および (12) は式 (4) に一致するので，式 (7) から完全微分型の条件式が導かれた．

1.1.3　コメント

$p(x,y)$, $q(x,y)$ を x, y 成分とするベクトル場

$$\boldsymbol{A}(x,y)=(p(x,y),q(x,y),0)$$

を考えると，完全微分型の条件式 (4) は，このベクトル場が $u(x,y)$ の**勾配**であること，つまり

$$\boldsymbol{A}(x,y)=\nabla u(x,y)$$

であることを意味している．一方，完全微分型の必要十分条件である式 (7) は，このベクトル場の**回転**がゼロであることを示している．例えば，回転の z 成分を計算すると

$$[\nabla\times\boldsymbol{A}(x,y)]_z=\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

である．つまり，式 (4) と (7) の関係は，$\boldsymbol{A}(x,y)=\nabla u(x,y)$ と $\nabla\times\boldsymbol{A}(x,y)=\mathbf{0}$ の関係と同じである．

1.2　完全微分型の解

式 (1) が完全微分型であれば，微分方程式の解 $y(x)$ は式 (6) を満たしている．全微分がゼロということは，$u(x, y)$ が x と y に依らない定数ということだから，c を定数として

$$u(x, y(x)) = c \tag{13}$$

となる．従って，この式を $y(x)$ について解けば，式 (1) の解が求められる．

もう少し具体的に解の形を調べるため，式 (4) の最初の式を x について a から x まで積分すると

$$\begin{aligned} u(x, y) - u(a, y) &= \int_a^x p(s, y) ds \\ \therefore u(x, y) &= \int_a^x p(s, y) ds + G(y) \end{aligned} \tag{14}$$

となる．但し，$G(y) \equiv u(a, y)$ は y のみの関数である．式 (14) の両辺を y で微分すると

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial p(s, y)}{\partial y} ds + \frac{\partial G}{\partial y} \tag{15}$$

となる．ここで，右辺の第 1 項の被積分関数に式 (7) を用いると，

$$\frac{\partial p(s, y)}{\partial y} = \frac{\partial q(s, y)}{\partial s}$$

であるから，式 (15) は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \int_a^x \frac{\partial q(s, y)}{\partial s} ds + \frac{\partial G}{\partial y} \\ &= q(x, y) - q(a, y) + \frac{\partial G}{\partial y} \end{aligned} \tag{16}$$

となる．ここで，式 (4) の 2 番目の式を代入すると，

$$q(a, y) = \frac{\partial G}{\partial y}$$

であることが解る．従って，これを y に関して b から y まで積分すると

$$G(y) = \int_b^y q(a, t) dt + G(b) \tag{17}$$

が得られる．式 (17) を (14) に代入すれば，

$$u(x, y) = \int_a^x p(s, y) ds + \int_b^y q(a, t) dt + G(b) \tag{18}$$

となる．

$y = y(x)$ が微分方程式の解であれば，式 (13) を満たすので，式 (18) を使って

$$\int_a^x p(s, y(x))ds + \int_b^{y(x)} q(a, t)dt = c \tag{19}$$

となる．但し，$G(b)$ は移項して定数 c に含めた．式 (19) は任意定数 c を 1 個だけ含むので，これを解いて求めた $y(x)$ は（いま考えている 1 階微分方程式の）**一般解**である．

1.3　例題

1 階微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{Ax + By}{Bx + Cy} = 0 \tag{20}$$

の一般解 $y(x)$ を求めよ．但し，A, B, C は定数とする．

まず，

$$p(x, y) = Ax + By \ , \qquad q(x, y) = Bx + Cy$$

とすれば，式 (20) は

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

の形に書ける．このとき，

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = B$$

だから，いまの $p(x, y)$ と $q(x, y)$ は条件式 (7) を満たし，微分方程式 (20) は完全微分型である．一般解を求めるため，式 (19) の左辺を計算すると

$$\begin{aligned}
\int_a^x p(s, y(x))ds + \int_b^{y(x)} q(a, t)dt &= \int_a^x \{As + By(x)\} \, ds + \int_b^{y(x)} (Ba + Ct) \, dt \\
&= \frac{A}{2}\left(x^2 - a^2\right) + B(x - a)y(x) \\
&\quad + Ba\,\{y(x) - b\} + \frac{C}{2}\left\{y(x)^2 - b^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{Ax^2 + 2Bxy(x) + Cy(x)^2\right\} + d
\end{aligned}$$

となる．但し，定数は全て d に含めた．従って，式 (19) に戻って整理すると，一般解は

$$Ax^2 + 2Bxy(x) + Cy(x)^2 = c'$$

を $y(x)$ について解けば求められる（c' は任意定数）．

- 問題

  1 階微分方程式

  $$\frac{dy}{dx} + \frac{y + \cos x}{x} = 0 \tag{21}$$

  の一般解 $y(x)$ を求めよ．

2　積分因子

式 (1) が完全微分型にならなくても，式 (2) の両辺に適当な関数 $\mu(x,y)$ をかけて，

$$\mu(x,y)p(x,y)dx + \mu(x,y)q(x,y)dy = 0 \tag{22}$$

が完全微分型になる場合がある．このとき，$\mu(x,y)$ を**積分因子**と呼ぶ．式 (22) が完全微分型であるための必要十分条件は，式 (7) と同様に

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu p) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu q) \tag{23}$$

である．但し，積分因子を求める一般的な方法はないので，いくつか特別な場合だけを説明する．

2.1　$\mu = \mu(x)$ の場合

積分因子が x のみの関数の場合，$\mu = \mu(x)$ を式 (23) に代入すると，

$$\mu \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} q + \mu \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\therefore \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) \tag{24}$$

となる．ここで，左辺は x のみの関数なので，右辺に y が含まれてはならない．もし右辺に y が含まれなければ，式 (24) の両辺を x で積分して，

$$\log \mu(x) = \int \frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) dx$$

$$\therefore \mu(x) = C \exp\left[\int \frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) dx\right] \tag{25}$$

が得られる．但し，積分因子には定数倍の不定性があるので，右辺の定数は $C = 1$ としてよい．

2.2　$\mu = \mu(y)$ の場合

同様に，$\mu = \mu(y)$ の場合，式 (23) より

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} p + \mu \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\therefore \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) \tag{26}$$

である．左辺は y のみの関数なので，右辺に x が含まれてはならない．もし右辺に x が含まれなければ，式 (26) の両辺を y で積分して，

$$\log \mu(y) = \int \frac{1}{p}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dy$$

$$\therefore \mu(y) = \exp\left[\int \frac{1}{p}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dy\right] \tag{27}$$

が得られる．但し，積分因子にかかる定数を $C = 1$ とした．

2.3　例題

１階微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - 2xy^3}{3x^2y^2} = 0 \tag{28}$$

の一般解 $y(x)$ を求めよ．

まず，式 (28) を書き換えて

$$(x^2 - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0 \tag{29}$$

とする．このとき，$p(x,y) = x^2 - 2xy^3$, $q(x,y) = 3x^2y^2$ として，式 (24) の右辺を計算すると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) &= \frac{1}{3x^2y^2}\left(-6xy^2 - 6xy^2\right) \\ &= -\frac{4}{x} \end{aligned}$$

となる．従って，積分因子は x のみの関数であり，式 (25) を使うと，

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \exp\left[\int \frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) dx\right] \\ &= \exp\left[\int \left(-\frac{4}{x}\right) dx\right] \\ &= \exp\left(-4\log|x|\right) \\ &= \frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

が得られる．式 (29) に求めた積分因子 $\mu(x)$ をかけると，

$$\left(\frac{x - 2y^3}{x^3}\right) dx + \frac{3y^2}{x^2} dy = 0$$

である．これが完全微分型であることを確認し，これまでの手順で解けばよい（省略）．

2.4　エントロピー

最後に，完全微分型の微分方程式の例として，一原子分子の理想気体のエントロピーを求める．熱力学第１法則より，系に熱量 ΔQ を加えたことによる内部エネルギーの変化 dU と外部にした仕事 ΔW の関係は

$$\Delta Q = dU + \Delta W \tag{30}$$

で与えられる．系の圧力は p で，dV だけ体積変化が生じたとすると，外部にした仕事は $\Delta W = pdV$ である．また，内部エネルギーは $U = (3/2)RT$（R は気体定数）なので，式 (30) は

$$\Delta Q = \frac{3}{2}RdT + pdV \tag{31}$$

となる．状態方程式 $pV = RT$ を使って圧力を消去し，断熱変化 $\Delta Q = 0$ の場合を考えると，式 (31) は

$$\frac{3}{2}RdT + \frac{RT}{V}dV = 0 \tag{32}$$

となる．これは一見，完全微分型の微分方程式に見えるが，このままでは完全微分型にならない．そこで，式 (32) の両辺に積分因子 $1/T$ をかけると

$$\frac{3}{2}\frac{R}{T}dT + \frac{R}{V}dV = 0 \tag{33}$$

となり，完全微分型になる．実際に，関数

$$S \equiv R\left(\frac{3}{2}\log T + \log V\right) \tag{34}$$

を導入すれば，式 (33) は

$$dS = 0$$

となる．ここで，S は**エントロピー**と呼ばれる量である．