重力と熱力学

宇宙物理学研究室　酒井啓太

Abstract

この論文ではよくある Black Hole のエントロピーの求め方をまず紹介しておいて、その後に物理的解釈からエントロピーを導出した。また Black Hole だけでなく同様の考え方で Λ 項のある宇宙や一様加速する系についてのエントロピーも導出し、それらを高次元に展開した。そして別の視点から見るために熱力学から重力を導出し、情報のパラドックスについて論じた。

目次

第1章　Introduction

1.1　Prelude

Black Hole に落ちていく物質や放射が増えるほど、Black Hole の境界である事象の地平面の表面積は大きくなっていく。その上さらに、もし二つの Black Hole が衝突し合体して一つの Black Hole になったとすると、その新しい Black Hole の事象の地平面の表面積は元である二つの Black Hole 個々の表面積の和よりも大きくなる。これらの性質から、Black Hole の事象の地平面の表面積と熱力学のエントロピーという概念の間に類似点があることに気づく。

エントロピーは、一つの系の無秩序の測度であると考えられる。言い換えると、その系が呈している状態の正確な形に関する情報の欠落度とも考えられる。有名な熱力学の第二法則によれば、エントロピーは熱的過程と共に増加する。

Black Hole と熱力学の法則の類似は、Washington 大学の James M Bardeen と Medon 天文台の Brandon Carter、そして S. W. Hawking によって拡張された [1]。

そもそも熱力学の第一法則によると、系のエントロピーが少し変化すると、系のエネルギーはそれに比例して変わる。その比例係数が、系の温度と呼ばれるものである。そしてある時、Black Hole の質量変化と事象の地平面の表面積変化とを関係付ける似たような法則が見付かった。この場合の比例係数は、表面重力と呼ばれている物理量である。これは、事象の地平面での重力場の強さの度合いを示すものである。事象の地平面の表面積をエントロピーに対応させて考えると、表面重力が温度に対応する物理量となる。表面積と温度の類似点は、熱平衡にある物体では何処でも同じであるように、事象の地平面上の表面重力の強さが何処でも同じであると云う事実により確かめられる。

また、Black Hole には情報を隠してしまうという面白い性質がある。Black Hole は落ちてきたものの全ての性質を消してしまい、質量・角運動量・電荷の唯三つの性質だけを持ったものに変えてしまう。これを「無毛定理」と言う。質量・角運動量・電荷は知りたいだけ正確に測ることができるが、何がその原因になったのか外からは窺い知る事ができない。

これら隠された情報の混合の割合を詳細に記述するのは途方もない情報である。この意味で、有限の数でこの乱雑な物質と放射の混合全てを詳細に記述する事ができるのであろうか？もし系が古典物理学で記述されているのであれば、直ちに答えることは不可能である。古典物理学に従うと、位置や速度、エネルギーや運動量等の全ての物理的な量は無限にある数学の一つを使って表せる事になってい

る。しかしそれは正しくない。例えば角運動量は角運動量の基本的な単位と整数の積で表せてしまう。普通の単位は、Planck 定数 $\hbar = 1.054 \times 10^{-35}$ [$\mathrm{kgm^2/s}$] である。質量も時間も [m] で表す幾何学的な単位ではこの基本的な角運動量の単位は面積の次元となる。この小さな面積が基本的な面積量子である。世界そのものの基礎となっているこの粒子性の結果として Black Hole に隠された情報は無限でなく有限であると言える。

Black Hole に隠された情報量は一つの明らかな数字、いわゆる Black Hole のエントロピーという量で表せる。そしてこのエントロピー、いわゆる Bekenstein のナット数は Black Hole の事象の地平面の表面積を領域の基本単位の 4 倍で割ったものである。この方法で思い出されるのが純粋な形の質量、つまり Black Hole の質量との不思議な結び付きのように思える。

1.2　History

そもそもこの重力と熱力学とを結びつける前に、歴史的な道筋を踏むのが良いであろう。

この結びつきの発端は、Penrose 過程と呼ばれる Kerr Black Hole からエネルギーを抽出する問題である。これより Penrose と Floyd によって「任意の変化の下では Black Hole の事象の地平面の表面積は増加する」という事実が注目された [2, 3]。

そしてそれに独立して Christodulou が「Kerr Black Hole によって粒子を捕らえる事で Black Hole の既約な質量を減少させる事はない」という事 [4, 5, 6] を考えついた。そしてその既約な質量は、Black Hole の事象の地平面の表面積の平方根に比例している事が分かった。この彼の結果は、多くの過程においてその表面積が増加することを示唆している。そしてそれが Penrose と Floyd の推測の後押しにもなった。彼の計算では、電荷を帯びた Kerr Black Hole（いわゆる Kerr-Newman Black Hole）においても妥当な結果を導く事ができたのである。

しかし、これらとは根本的に異なったアプローチを展開したのが Hawking である。彼は「Black Hole の事象の地平面の表面積が任意の過程において減少しない」という証明を試みた [7]。Black Hole がいくつかある系において、Hawking の理論はそれぞれ個々の Black Hole の事象の地表面の表面積が減少せず、さらに二つの Black Hole が合体し一つになることによって、Black Hole の表面積はその元の表面積の和よりも小さくなることはないことを導いた。

Black Hole の変化が事象の地平面の表面積が増加する事と同義である。これは、閉じた熱力学的系の変化でエントロピーが増加するという事と同義であるという熱力学第二法則を思い起こさせてくれる。これが、熱力学から Black Hole 物理学を記述しようという所以である。

そして、これを最初に行ったであろう人物の一人が Greif であろう [8]。しかし彼は Black Hole のエントロピーの定義を試みたが、当時の Black Hole 物理におけ

る情報が不足していたために具体的な案を作るところまでには至らなかった。

その後 Carter が彼の結果を、厳密に回転する星の熱力学的に可逆な変化に対する基準を Black Hole に適用し「Kerr Black Hole の既約な質量が可逆変化の下では変化しない」という例で導き直した [9]。これは Black Hole 物理学に熱力学の argument を用いる事が可能であることを示唆している。

そして 1970 年ごろ、当時大学院生だった Bekenstein はあるアイデアを得た。それは「Black Hole の事象の地平面の表面積はエントロピーそのものであり、Black Hole の表面重力は温度の類似物ではなく温度そのものである」という考えである [10]。

この時までの Black Hole 物理学は、量子や物体の粒子性そしてエネルギーの世界について成す術を持ってはいなかった。そこで Bekenstein はそれらを関係付けようとした。そもそも自然そのものが長さや面積の自然な単位を示さない限り、エントロピーは自然な単位では表す事ができないであろう。しかし自然は古典的物理学によると、太陽の 10 倍程度の質量を持つ Black Hole と太陽の 10^7 倍の質量をもつ Black Hole とでは単純なスケール因子以外に区別する方法がなかった。けれども、量子論的には自然な長さの単位と 2.612×10^{-70} [m^2] の面積量子を与えてくれる。1 単位のエントロピー、つまり 1 単位の無秩序さはこのオーダーの大きさの面積に付随しているはずであり、それに 2 や π などの予測できない数因子を掛けたものであると彼は考えた。従って、Black Hole の表面積のそれぞれ 1.04×10^{-69} [m^2] に 1 単位のエントロピーが付随しているという事になると予測した。

このエントロピーの自然な単位の大きさについて理解するために、太陽質量の 3 倍の Black Hole を考えよう。1 太陽質量の Black Hole の幾何学的単位は 1.47 [km] に対応するので、この物体の質量は 4.41 [km] になり、事象の地平面の半径はこの量の 2 倍となる。そして、事象の地平面の表面積はこの半径の 2 乗の 4 π 倍。つまり、$4\pi r_g^2 = 9.8 \times 10^8$ [m^2] となる。1 単位のエントロピーに付随する面積でこの数字を割ると本当に途方も無い数字となるし、もっと大きな Black Hole はもっとたくさんの情報をもっていると言える。そして Bekenstein と同様のオーダーの見積もりでは太陽質量の 3 倍ほどの Black Hole には 10^{-6} [K] 程度 の温度しかなく、もっと大きな Black Hole はもっと低温であると考えられる。

その後、t'Hoot によって Black Hole のエントロピーが事象の地平面の外側で起こる量子場励起の熱的ガスのエントロピーと同等であるという「brick wall モデル」が考えられた [11]。このモデルでは、「brick wall cutoff」（事象の地平面近傍に固定された境界）が事象の地平面近くの状態密度の発散を除去する為に産まれた。この方法は、様々な Black Hole に適用されている。

そして今日では Black Hole だけではなく、多くの重力系においても議論が進められている。勿論宇宙等も例外ではなく、これからもどんどん研究されていくだろう。

1.3　重力とエントロピー

エントロピーという概念は 1865 年に R.J.E.Clausius によって導入された熱力学的変数である。これは「変換」を意味するギリシア語「$\tau\rho o\pi\bar{\eta}$」に由来する。そもそもエントロピーとは熱力学的系が温度 T の熱源から熱量 ΔQ を吸収する可逆な微小変化において、$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$ だけ増加する系の状態量 S の事を指す [12]。このエントロピーの性質と重力との関係を照らし合わせていくと、「なぜ Black Hole にエントロピーが存在するのか？」「重力とエントロピーとの相互関係は？」などの疑問に何かしらの光明が見えてくるだろう。

エントロピーは系の熱力学的状態にのみ関係する量である。つまり、状態 A から状態 B への可逆変化の経路に沿って $\Delta Q/T$ を積分したものは経路に無関係に、状態 B、A におけるエントロピーの差 $S_B - S_A$ に等しい。これを Black Hole に置き換えて考えてみると、Black Hole における可逆変化というのは Hawkin 放射という概念によって考える事ができ、そして重力が経路に無関係に、つまりどのような過程があろうとも始状態と終状態における情報にのみ Black Hole の重力が関係してくるという事である。Black Hole に落ち込むものは質量・角運動量・電荷のみを保存していてその他の一切の情報は失ってしまうという「無毛定理」からもその事実が伺える。

次にエントロピーの性質として加算的である事がある。つまり系 1 と系 2 のエントロピーがそれぞれ S_1、S_2 であるならば、これらの二つの系を合わせた系のエントロピーは $S = S_1 + S_2$ である。すなわち示量変数である。これは二つの Black Hole が衝突する事で重力が加算された重力に等しいという事になる。確かにこれは当然だ。なぜなら、Black Hole に落ち込むもの自体が Black Hole なので両方の Black Hole の情報が無毛定理により三つのみを保存するからである。

体積が一定の条件下で、系のエントロピー S は内部エネルギー U が増すに連れて増大する。これは Black Hole のエネルギーが増える事になるので、体積が一定の下では密度が増大するし、密度が増大すれば当然その Black Hole の重力は増大する。

熱も仕事も外部との間に閉じた系が自発的に起こす系の変化では、エントロピーは常に増加する。これはエントロピー増大則といって熱力学の第二法則である。例えば真空の部屋との間の仕切りを取り去ると気体は自発的に膨張する。そして自由膨張後の気体を元の状態に戻すには仕事を加えなければならないが、内部エネルギーを一定に保つには仕事を相殺するだけの熱を外部に吐き出す必要がある。よって膨張後のエントロピーは膨張前より大きくなる。これは Black Hole が何も吐き出さずに吸い込むだけなら増大し続ける。そしてこの仕事を相殺するために外部に熱を吐き出している現象を Hawking 放射という。

絶対零度におけるエントロピーは常に 0。これが熱力学の第三法則である。これは $J^2/M^4 + Q^2/M^2 = 1$ の時、表面重力は 0 になる。この時に表面重力が消えて裸の特異点が出現する。しかし絶対零度が存在しないのと同様に裸の特異点も存在

しない。

以上の論点から、エントロピーと重力（より詳細に言うと表面重力）には大いなる関係が存在するといっても過言ではない。つまり Black Hole にもエントロピーなるものが存在するという事だ（Bekenstein は表面重力は温度そのものであると言っている）。しかし通常の熱力学とは違い、Black Hole のエントロピーは巨視的なものだ。そして断熱壁の中に Black Hole と放射（光）があるとすると比熱が定義できる。その場合 Black Hole は自己重力系なので比熱は負になる。エントロピーが熱力学からきている限り非定常な Black Hole にもエントロピーは存在するはずであり、それは定常な Black Hole と同様に Bekenstein-Hawking エントロピーと等しくなるだろう。

この論文では 2 章で統計と不確定さをそれぞれ用いて単純な Black Hole におけるエントロピーを導出し、続いて回転する Black Hole についても考慮した。3 章では純粋に物理的解釈によって 3 つの重力系について考え、そして更にそれらを高次元まで展開している。4 章ではこれまでと違ったアプローチを試みた。それは重力からエントロピーを導くのではなく、熱力学から重力を導出しようとする考えである。5 章では GUP（Generalized Uncertainty Principle）について少し触れている。そして最後に 6 章で結論と今後の課題を挙げる。

第2章　Black Holeのエントロピー

2.1　Schwarzschild

実際にエントロピーを求めてみよう。今は簡単のために静的な Black Hole、つまり質量のみが保存された Black Hole、いわゆる Schwarzschild Black Hole を考える。

2.1.1　統計的アプローチ

まず星がブラックホールになる寸前を考えよう。なぜなら、Black Hole になってからでは内部の情報は取り出せないからである。
粒子のエネルギーを ε とすると、この粒子の de Broglie 波長は

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}$$

となる。ここで h は Planck 定数 ($\simeq 6.626 \times 10^{-34}$ [Js])、c は光速度 ($\simeq 2.997 \times 10^{8}$ [m / s]) である。Black Hole になるためには de Broglie 波長が Schwarzschild 半径 $r_{\mathrm{g}}(= 2GM/c^2)$ 内に収まる必要があるので

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} \geq \frac{hc}{r_{\mathrm{g}}} = \frac{hc^2}{2GM} \tag{2.1}$$

となる。ここで G は重力定数 ($\simeq 6.673 \times 10^{-11}$ [$\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$])、M は Black Hole の質量を表している。そして、Black Hole を構成する粒子のおよその個数は (2.1) 式から

$$N = \frac{Mc^2}{\varepsilon} \sim \frac{2GM^2}{hc}$$

となる。つまり、微視的な状態数はおよそ $N!$ 程度なので、Black Hole のエントロピーは

$$S = k_{\mathrm{B}} \ln(N!) \simeq k_{\mathrm{B}}(N \ln N - N) \sim \frac{4\pi k_{\mathrm{B}} GM^2}{\hbar c} \tag{2.2}$$

であるといえる。ここで $k_{\rm B}$ は Boltzmann 定数 ($\simeq 1.381\times\ 10^{-38}$ [J / K])、$\hbar$ は Dirac の $h(=h/2\pi)$ 。

　Black Hole の量子半径は、重力ポテンシャルと運動エネルギーの平衡から

$$\frac{2GM}{c^2}=\frac{\hbar}{Mc}\Longrightarrow m_{\rm pl}=\sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

と Planck 質量 ($\simeq 10^{-8}$ [kg]) が求まり、これより Planck 長さは

$$\ell_{\rm pl}=\frac{\hbar}{m_{\rm pl}c}=\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$$

と書ける。すなわち Black Hole のエントロピーは、事象の地平面を Planck 長さ ($\simeq 10^{-35}$ [m]) 程度の周をもつ面要素で覆い尽くした時の面要素の個数に Boltzmann 定数を乗じた程度のものと言えよう。

　また、Black Hole の事象の地平面の表面積は

$$A=4\pi{r_{\rm g}}^2=4\pi\times\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \tag{2.3}$$

と書けるので、エントロピーは

$$S=\frac{k_{\rm B}c^3}{4G\hbar}\times A \tag{2.4}$$

で、これに自然単位系 $(c=\hbar=G=k_{\rm B}=1)$ を用いると

$$S=\frac{A}{4}$$

となる。これが有名なエントロピーは表面積に比例する（より詳細には 4 分の 1 倍）という事を示す関係式である。

2.1.2　不確定性を用いて

　次に不確定性関係を用いてエントロピーを計算してみよう。まず Black Hole を横切る光の波長は、Black Hole は Schwarzschild 半径よりも長くなければ Black Hole に落ち込んでしまう。と言うことは、この波長程度の不確定さが生じる。つまり言い換えると、Scharzschild 半径程度の不確定さをもっていると言える。また光は光速度で伝播するので、この位置の不確定さに伴う時間の不確定さは

$$\delta t = \frac{r_{\mathrm{g}}}{c} = \frac{2GM}{c^3}$$

となる。ここで ω を角振動数、エネルギーを E として、

$$\hbar\delta\omega = \delta E$$

という de Broglie の関係を用いると

$$\delta E = \frac{\hbar}{\delta t} = \frac{\hbar c^3}{2GM} \tag{2.5}$$

となる。ここで $\delta\omega\delta t = 1$ という関係も用いた。Black Hole ではこのエネルギーの揺らぎによって仮想粒子の対生成が起こるが、ちょうど事象の地平面の付近で生成された粒子・反粒子のうち、一方は地平面の内側に飛んで行き二度と出て来ない。このため、対消滅する相手を失った粒子が実在の粒子として放出されて今に至ったと考えられる。

話を元に戻すと、(2.5) 式により Black Hole の温度は

$$T = \frac{\delta E}{4\pi k} = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_{\mathrm{B}} GM} \propto \frac{1}{M} \tag{2.6}$$

となる。これは Hawking 温度とよばれるものである [13]。ここで注意することは、Black Hole は質量が小さければ小さいほど温度が高くなるという事である。粒子がもしも点だとすると、その密度は δ 関数で描けるであろう。するとそこに Black Hole ができてしまう。これは粒子の波動性により波束が十分にシャープなときのことではあるが。けれどもこのような点粒子は質量が十分に小さいので、我々の身の回りに非常に高温の量子 Black Hole が無数に存在している事になる（電子などの素粒子は Kerr-Newman Black Hole の判別式により Black Hole にはなれない)。しかし、この量子 Black Hole は非常にエネルギーが小さいのですぐに蒸発してしまう。

そして、質量 M を変数として

$$E = Mc^2$$

を用いると、Black Hole のエントロピーは (2.6) 式より

$$S = \int \frac{d(Mc^2)}{T} = \frac{8\pi k_{\mathrm{B}} G}{\hbar c} \times \int M dM = \frac{4\pi k_{\mathrm{B}} GM^2}{\hbar c}$$

となる。これは当然の事ながら先ほどの計算 (2.2) 式と同じ結果になった。

2.2　Kerr 計量

これまでは質量のみの定常 Black Hole、一般には Schwarzschild Black Hole と呼ばれるものを扱ってきた。しかし Black Hole は質量だけでなく角運動量と電荷もパラメータとして残るものである。ここでは質量と角運動量をもつ Black Hole、つまり回転していて質量のある Black Hole、一般に Kerr Black Hole と呼ばれるものを考えていこう。

2.2.1　表面積

まず、Kerr Black Hole の事象の地平面の表面積はというと

$$A = \iint \sqrt{g_{\theta\phi}} d\theta d\phi \tag{2.7}$$

となる。ここで、$g_{\theta\phi}$ は Kerr 計量の (θ, ϕ) 成分の行列式である。Kerr 時空は質量 M と角運動量 J をもつ軸対称な時空なので、その線素は

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{r_\mathrm{g} r}{\Sigma}\right) c^2 dt^2 - \left(\frac{2car_\mathrm{g} r \sin^2\theta}{\Sigma}\right) dt d\phi \\ &+ \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{r_\mathrm{g} r a^2 \sin^2\theta}{\Sigma}\right) \sin^2\theta d\phi^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$r_\mathrm{g} = \frac{2GM}{c^2}$$

$$a = \frac{J}{cM}$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta$$

$$\Delta = r^2 - r_\mathrm{g} r + a^2$$

である [15]。

これは、赤道面上 ($\cos\theta = 0$) で $r = 0$ の特異点をもつ。そして事象の地平面は $g_{rr} = \infty$ 、つまり $\Delta = 0$ の半径

$$r^2 - r_{\rm g} r + a^2 = 0 \tag{2.8}$$

$$r = \frac{r_{\rm g}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r_{\rm g}}{2}\right)^2 - a^2} \tag{2.9}$$

のところに現れる。ここで、$r = r_+$ ((2.9) 式の＋の方を採用)、$dr = 0$、 $dt = 0$ とおくと

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (r_+^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 + \left(r_+^2 + a^2 + \frac{r_{\rm g} r_+ a^2 \sin^2\theta}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta d\phi^2 \\
&= (r_+^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 + \left(r_{\rm g} r_+ + \frac{r_{\rm g} r_+ a^2 \sin^2\theta}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta d\phi^2 \\
&= (r_+^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 + \left(\frac{r_{\rm g} r_+^3 + r_{\rm g} r_+ a^2}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta d\phi^2 \\
&= (r_+^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 + r_{\rm g} r_+\left(\frac{r_+^2 + a^2}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta d\phi^2 \\
&= (r_+^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 + \frac{r_+^2 r_g^2}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta}\sin^2\theta d\phi^2
\end{aligned}$$

ここで 1 行目から 2 行目、4 行目から 5 行目の式変形において (2.8) 式を用いている。そしてこれを (2.7) 式に代入すると

$$A = \iint r_{\rm g} r_+ \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi r_{\rm g} r_+ = 2\pi r_{\rm g}^2\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{r_{\rm g}}\right)^2}\right) \tag{2.10}$$

となり、これが Kerr Black Hole の事象の地平面の表面積である。

確かに、角運動量 $J = 0$、つまり $a = 0$ とすると (2.10) 式より表面積は

$$A = 4\pi r_{\rm g}^2$$

となり、(2.3) 式に一致する。これは前述の静止した Black Hole、つまり Schwarzschild Black Hole の事象の地平面の表面積に相違ないと言えよう。

2.2.2　Kerr Black Hole の熱力学

ここで調べてみたい事は、回転する Black Hole の温度は質量のみの Black Hole と異なっているのか？と云う事である。

まず、角運動量を含めた熱力学の式はというと

$$d(Mc^2) = T\,dS + \Omega\,dJ \tag{2.11}$$

と拡張されるはずである [15]。ここで、T は Kerr Black Hole の温度、Ω は時間の逆数の次元を持った比例定数である。

そして、Kerr Black Hole の事象の地平面の表面積は (2.10) 式のように

$$A = 2\pi r_{\mathrm{g}} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{r_{\mathrm{g}}} \right)^2} \right)$$

である。質量が dM、角運動量が dJ 変化したときの表面積の変化 dA は、これを微分する事によって求められる。一方、エントロピーは (2.4) 式で求めたように

$$S = \left(\frac{k_{\mathrm{B}} c^3}{4G\hbar} \right) \times A$$

を採用する。そして、熱力学の式（(2.11) 式）とを比較すると

$$\Omega = \frac{4\pi J}{MA}$$

$$T = \frac{4\hbar G}{c^3 k_{\mathrm{B}} M A^2} \left(\frac{c^6 A^2}{32\pi G^2} - 2\pi J^2 \right)$$

と求まる。前節と同様に、$J = 0$ を代入すると

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_{\mathrm{B}} G M}$$

となり、(2.6) 式と一致する。やはりこれは Hawking 温度に等しくなる。

第3章　物理的解釈

3.1　Schawarzschild

光子のみからでも Black Hole は形成され [17, 18, 20]、その形成以前には相当なエントロピーがある。そして、形成された後の Black Hole のエントロピーは量子論的な考察によると表面積に比例する。この状況を簡単に理解するためにはどうしたら良いかを調べてみよう。

今簡単にこの時のエントロピーを不確定性関係を用いて推定しよう。以下の議論はほとんどオーダーの推定であると言われるかもしれない。ただそこで用いられた簡単な仮定で、詳細な重力場の量子論を用いて得られた量と対応がつくという点に注目したい。

Black Hole の質量を M としその重力半径を $r_g = 2GM/c^2$ とすると、この大きさに対応する質量 0 の粒子のエネルギー ΔE は

$$\Delta E \simeq \Delta pc \simeq \frac{\hbar c}{2\Delta x} \simeq k_B T \tag{3.1}$$

と推定される。ここで $\Delta E \simeq \Delta pc$、$\Delta x \Delta p \simeq \hbar/2$、$\Delta E \simeq k_B T$ の関係を用いた。今 $\Delta x \simeq c_1 r_g$ とおくと、温度 T は (3.1) 式より

$$T = \frac{\hbar c}{2c_1 k_B (\frac{2GM}{c^2})} \simeq \frac{\hbar c^3}{4c_1 GMk_B} \tag{3.2}$$

となり、更に $c_1 = 2\pi$ とおくと

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_B} (= T_{BH}) \tag{3.3}$$

となり (2.6) 式、つまり Hawking の導いた温度と一致する [13]。

3.1.1　熱力学視点

熱力学の第一法則よりエントロピー S に対しては、$U = Mc^2$ とすると、(3.3) 式の T より

$$S = \int dS = \int \frac{dU}{T} = \int \frac{8\pi GMk_B c^2 dM}{\hbar c^3} = \frac{4\pi GM^2 k_B}{\hbar c}$$

となる。Black Hole の表面積 $A = 4\pi r_{\mathrm{g}}^2$ を用いると

$$\frac{S}{k_{\mathrm{B}}} = \frac{Ac^3}{4G\hbar} = \frac{A}{4\ell_{\mathrm{pl}}^2} \simeq 10^{77}\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^2 \tag{3.4}$$

が成立し、エントロピーが表面積に比例するという関係が因子 1/4 も含め得られる。ここで $M_{\odot}$ は太陽質量である。

これより少なくともエントロピーが Black Hole の表面積に比例するという関係式が得られたが、残念ながらその微視的なエントロピーの起源が分かり難い。特に統計力学的なエントロピーの定義である Boltzmann の関係式 $S = k_{\mathrm{B}} \log W$ における状態数の総量 W が、Black Hole においてはどのような意味をもっているかについては、この導出においては不明である。

また通常の星のエントロピーは、その粒子数を N とすると $S/k_{\mathrm{B}} \sim N \sim 10^{57}(M/M_{\odot})$ であるのに対して、Black Hole のエントロピーは (3.4) 式のように大きく、その大きな違いが現れる原因も物理的に理解し難い。

3.1.2　統計力学視点

この $S \propto A$ の関係の別の導出の試みとして、質量を M、温度 T の黒体放射のガス球に対してそのエントロピーを推定する。放射密度を $\varepsilon = \tilde{a}T^4$ とすると体積は $V = Mc^2/\varepsilon$ であり、エントロピー密度は $s = 4\tilde{a}T^3/3$ であるから、総エントロピーは $S = sV = 4Mc^2/3T$ である。これに (3.2) 式の温度を代入し表面積 A を用いると

$$\frac{S}{k_{\mathrm{B}}} = \frac{c_1}{3\pi}\frac{A}{\ell_{\mathrm{pl}}^2} = \frac{1}{4}\frac{c_1}{3\pi/4}\frac{A}{\ell_{\mathrm{pl}}^2} \tag{3.5}$$

となり、$c_1 = 3\pi/4$ とおくと $S/k_{\mathrm{B}} = A/(4\ell_{\mathrm{pl}}^2)$ の関係式が導かれる。

この導出は Black Hole の大きさからくる不確定性関係により温度 T を推定し、その温度 T の黒体放射により Black Hole が構成されているとすれば、そのエントロピーは表面積に比例するという関係式が得られる事を示している [19]。

この導出において Black Hole の中での熱平衡に意味があるのか等多くの問題が残るが、少なくとも統計力学的によく知られたボーズ粒子である光子の黒体放射のエントロピーを用いる事により、Black Hole のエントロピーの物理的な意味での解釈がある程度は可能となる。また、Black Hole が温度 T の黒体放射を放出していると言う Hawking の主張も、詳細な議論に立ち入らない限りはある面で受け入れ易い [13]。

しかしながら、問題の一つは上で想定した体積 $V = Mc^2/\varepsilon (= V_{\mathrm{BH}})$ である。それは通常予想される Black Hole の体積 $V_{\star} \sim 4\pi r_{\mathrm{g}}^3/3$ よりも桁違いに大きいことである。その比をとると

$$\frac{V_{\rm BH}}{V_\star}=\frac{V}{\frac{4}{3}\pi r_{\rm g}^3}=\frac{\frac{15}{\pi^2}\frac{(3\pi G)^4M^5}{\hbar c^7}}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3}=\frac{45}{4\pi^3}\frac{G}{\hbar c}M^2\frac{(3\pi)^4}{2^3}=\frac{45\times 81}{32}\pi\left(\frac{M}{m_{\rm pl}}\right)^2$$

となり、$M\gg m_{\rm pl}$ であるから $V_{\rm BH}\gg V_\star$ である。これを解釈しようとすれば、Black Hole は平坦ではなく時空が歪んでいて、特に動径方向の距離を想定するのは一般に困難であるとし体積は $V=V_{\rm BH}$ とすることである。例えば Black Hole が形成される以前の物質があるときの時空構造を考えると、球対称として動径方向の物質分布 $M(r)$ を適当に取れば (r,r) 成分の計量 $(1-2GM(r)/rc^2)^{-1}$ をある面ではどれだけでも大きくする事ができ、結果としてその固有体積も大きくする事ができる。

つまりこの導出でのエントロピーを統計力学的に解釈しようとすれば、動径方向の増加による体積の増加を受け入れざるをえない。その意味で $S=sV$ の段階では S は明らかに示量変数であり、$S=4Mc^2/3T$ として不確定性関係からの $T\propto M^{-1}$ を用いると $S\propto A$ となり、見かけ上では示量変数でなくなる。しかし解釈は時空の歪みによる動径方向の増加により体積が増加して、結果としてエントロピーは体積に比例する示量変数と考えるわけである。

議論の視点を少し変えると、系の大きさを $L(\propto M)$ とすると温度は不確定性関係により $T\propto 1/L$ となり、単位体積当たりのエントロピーは $s\propto T^3\propto 1/L^3$ なので系全体のエントロピーを $S\propto sV\propto L^2$ とするためには $V\sim L^5$ でなければならない事になる。

これらについては次節以降引き続き議論する。

3.1.3　球対称重力収縮する黒体放射球

超大質量星は放射圧が優勢で、その重力不安定性から崩壊すると考えられている。オーダーの推定ではあるが、重力エネルギーと放射エネルギーが等しいとすると $GM^2/r\simeq\varepsilon V/3$ が成立し、$M\simeq\varepsilon V/c^2$ を用いると $r\simeq r_{\rm g}$ の関係式を得る。半径 r 程度に質量 M、温度 $T(=T_\star)$ の黒体放射があると $r\simeq(3Mc^2/4\pi\varepsilon)^{1/3}$ であり、これが重力半径程度すれば温度 $T_\star$ に対して

$$\frac{k_{\rm B}T_\star}{m_{\rm pl}c^2}\simeq\left(\frac{45}{32\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m_{\rm pl}}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\tag{3.6}$$

の関係が得られる。ここで $\tilde{a}=k_{\rm B}^4/\hbar^3c^3$ を用いた。これは $T_\star\propto M^{-1/2}$ であり、これよりエントロピー $S=4Mc^2/3T_\star$ を求めると

$$S\simeq\frac{2}{9}\left(\frac{4}{25\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{A}{\ell_{\rm pl}^2}\right)^{\frac{3}{4}}\simeq 10^{57}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{\frac{3}{2}}$$

となり上で導いた結果 ($S \propto A$) と異なる。つまり Black Hole を形成する前の光子の総エントロピーは、Black Hole を形成すると因子 $\sim (A/\ell_{\rm pl}^2)^{1/4} \simeq 10^{20}(M/M_\odot)^{1/2}$ の大きさ程度増加する事になる。

超大質量星は $r \gg r_{\rm g}$ からでも重力不安定で崩壊する。$r \gg r_{\rm g}$ においては、時空の歪みは大きくなくガス球の収縮はほぼ断熱変化と考えればエントロピーは不変であり、ほぼオーダーとして Black Hole を形成する前の星のエントロピーはこの程度である。ところが Black Hole を形成するとエントロピーが不連続的因子 $\sim (A/\ell_{\rm pl})^{1/4}$ 程度大きくなる。この原因は $S \simeq Mc^2/T$ であるから、温度 T が (3.2) 式の $T_{\rm BH} \propto m_{\rm pl}c^2(m_{\rm pl}/M)$ と (3.6) 式の $T_\star \propto m_{\rm pl}c^2(m_{\rm pl}/M)^{1/2}$ の違いによるものである。

体積が増加するという解釈を推し進めると、$Mc^2 \propto \varepsilon V \propto T_\star^4 V_\star \propto T_{\rm BH}^4 V_{\rm BH}$ であるから、$T_{\rm BH} \propto T_\star(V_\star/V_{\rm BH})^{1/4} \propto T_\star(m_{\rm pl}/M)^{1/2}$ より Black Hole を形成する前と後では星の温度は急激に減少し、それがエントロピーの増加になっている。断熱変化であれば $T \propto (1/V)^{1/3}$ であるが、自由膨張であれば内部エネルギーが不変 ($U \propto T^4 V = const$) により、もしくは熱力学的に

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \Big/ \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{c_{\rm V} V}\left(p - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right) = -\frac{T}{4V}$$

であるから $T \propto (1/V)^{1/4}$ が成立する。ここで p は圧力、$c_{\rm V}$ は定積比熱である。要するに Black Hole の形成による体積の増加に対して光子が自由膨張し、その結果としてエントロピーが増加したと考えられる。

3.1.4　宇宙初期の Black Hole の形成

宇宙初期等において温度が十分高温の場合、放射密度のゆらぎが大きいとして、初期宇宙での Black Hole 形成が議論されている [17, 18, 20]。その視点から議論を見ると、体積 $V_\star$ 内に Mc^2 程の放射エネルギーがあるためには温度を T_γ として

$$Mc^2 = \tilde{a} T_\gamma^4 V_\star$$

を満たすと考える。すると $V_\star \propto M^3$ より $T_\gamma \propto M^{-1/2}$ となる。この温度 T_γ の $V_\star$ 内での総エントロピー $S_\gamma = 4\tilde{a}T_\gamma^3 V_\star/3$ より、前節と同様に $S_\gamma \propto M^{3/2}$ を得る。$S_{\rm BH}/k_{\rm B} = A/4\ell_{\rm pl}^2$ とおくとその比は

$$\frac{S_{\rm BH}}{S_\gamma} = \frac{3}{2}\left(\frac{45\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{M}{m_{\rm pl}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}\left(\frac{T_\gamma}{T_{\rm BH}}\right)$$

となり、$S_{\rm BH}T_{\rm BH} \sim S_\gamma T_\gamma \sim U(\sim Mc^2)$ の関係式が成立している。この視点からも、Black Hole のエントロピーは $T_\gamma/T_{\rm BH}(\propto M^{1/2})$ だけ増加している。その問題点は基本的には前節の Black Hole の形成の場合と同様である。

3.1.5　宇宙半径内のエントロピー

宇宙初期の放射優勢時において宇宙半径 $\sim ct$ 内でのエントロピーを考えると、放射密度は $\rho = 3/32\pi G t^2$ であるので $M \simeq \rho (ct)^3 \sim T^{-2}$ が成立し、やはりそのエントロピーは $S \simeq 4M/3T \sim M^{3/2}$ を得る。一方、$M \simeq \rho (ct)^3 \simeq c^3 t/G$ より $ct \simeq GM/c^2$ でほぼ Schwarzschild の半径でもあり、Black Hole とみなすとそのエントロピーは表面積に比例する ($S \propto M^2$) はずである。これも問題点は、基本的には 3.1.3 節の Black Hole の形成と同様である。

3.2　Λ 項のある宇宙

WMAP の観測により我々の宇宙は Λ 項が存在し、現在宇宙は加速度膨張状態に入ったと言える [21]。Λ 項のある宇宙モデルとして、ここでは de Sitter 宇宙を考える。その計量は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

であり [22]、特徴的な事項としては宇宙に $\ell_\Lambda = \sqrt{3/\Lambda}$ の地平面が存在することに注目しよう。

この距離 ℓ_Λ に対して不確定性関係を用いると、この宇宙における粒子のエネルギー ΔE は (3.1) 式と同様に

$$\Delta E \simeq \Delta p c \simeq \frac{\hbar c}{2\Delta x} \simeq k_{\mathrm{B}} T \tag{3.7}$$

と推測され、今 $\Delta x = c_2 \ell_\Lambda$ とおくと温度 T は

$$k_{\mathrm{B}} T = \frac{\hbar c}{2 c_2 \ell_\Lambda} \simeq \frac{\hbar c}{2 c_2 \sqrt{3}} \sqrt{\Lambda} \tag{3.8}$$

と与えられる。ここで $c_2 = \pi$ ととれば Gibbons & Hawking（1977）[22] の導いた $k_{\mathrm{B}} T = \hbar c \Lambda^{1/2}/\sqrt{12}\pi$ となる。

また宇宙項は真空のエネルギー密度 ρ_Λ に対して

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \tag{3.9}$$

と対応しているので、この波長に相当する粒子が (3.9) のエネルギー密度に相当するだけ存在したとする。すると、粒子数密度 n_Λ は

$$n_\Lambda \frac{\Delta E}{c^2} = \rho_\Lambda$$

の式から導かれ、(3.7) 式と (3.8) 式の関係と (3.9) 式より

$$n_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda c^2}{\Delta E} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}\frac{2c_3\ell_\Lambda}{\hbar c} = \frac{3c_3}{4\pi G}\frac{c^3}{\hbar\ell_\Lambda}$$

となる。この粒子の宇宙全体の個数は体積 V を今

$$V = \frac{4}{3}\pi\ell_\Lambda^3$$

とおくと

$$N_\Lambda = n_\Lambda V = \frac{3c_2}{4\pi G}\frac{c^3}{\hbar\ell_\Lambda}\frac{4}{3}\pi\ell_\Lambda^3 = c_2\left(\frac{c^3}{G\hbar}\right)\ell_\Lambda^2 = c_2\frac{\ell_\Lambda^2}{\ell_{\mathrm{pl}}^2}$$

となる。一般に密度、温度が一定ならばエントロピーは粒子数に比例するから、地平面の面積を $A = 4\pi\ell_\Lambda^2$ と考えると、

$$\frac{S}{k_{\mathrm{B}}} \sim N_\Lambda \sim \frac{c_2}{4\pi}\frac{A}{\ell_{\mathrm{pl}}^2}$$

となり、ここで $c_2 = \pi$ とおくと、Gibbons & Hawking の言う $S/k_{\mathrm{B}} = A/4\ell_{\mathrm{pl}}^2$ が得られ [22]、エントロピーが地平面の面積 A に比例する関係式が導かれた。

この粒子のエントロピーを光子のようなボーズ粒子と考えると、粒子数とエントロピーは比例しており ($\frac{N}{S/k_{\mathrm{B}}} \sim 0.2776$)[23]、

$$\frac{S}{k_{\mathrm{B}}} \simeq \frac{N}{0.2776} \simeq 4c_2\left(\frac{\ell_\Lambda}{\ell_{\mathrm{pl}}}\right)^2 \tag{3.10}$$

が得られる。これは

$$\frac{S}{k_B} \sim \frac{c_2}{\pi}\frac{A}{\ell_{\mathrm{pl}}^2}$$

を意味しており、$c_2 = \pi/4$ と考えると、$S/k_{\mathrm{B}} = A/4\ell_{\mathrm{pl}}^2$ となり、エントロピーが地平面の表面積 A に比例するという関係式を得た事になる。

ここで注意しなければいけない事は、宇宙項を物質と考えると、圧力 p と物質の（エネルギー）密度 ρ の間に $p = -\rho c^2$ という状態方程式を満たし、通常の粒子や光子のようには考えられないという事だ。それ故に、(3.10) 式のエントロピーと粒子数の比例関係の定数 0.2776 は必ずしも当てはまるとは限らないだろう。ただし、一般に密度と温度が一定であるならばエントロピーは粒子数に比例するはずである。

上の導出での問題は、温度 T の光子等と粒子を考えた際にそのエネルギー密度は $\varepsilon_\gamma = \tilde{a}T^4$ であったので、ρ_Λ との比をとると

$$\begin{aligned}\frac{\rho_\Lambda}{\rho_\gamma} = \frac{\rho_\Lambda}{\frac{\varepsilon_\gamma}{c^2}} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}\frac{c^2}{\tilde{a}T^4} \quad &\simeq \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}\frac{15\hbar^3 c^3}{\pi^2}\frac{c^2}{\left(\frac{\hbar c}{2c_2\sqrt{3}}\sqrt{\Lambda}\right)^4} \\ = \frac{c^3}{8\pi G\hbar}\frac{15}{\pi^2\Lambda}\left(2c_2\sqrt{3}\right)^4 = \frac{15}{8\pi^3}\frac{16\times 9c_2^4}{\ell_{\mathrm{pl}}^2}\frac{\ell_\Lambda^2}{3} &\simeq \frac{90}{\pi^3}c_2^4\left(\frac{\ell_\Lambda}{\ell_{\mathrm{pl}}}\right)^2\end{aligned} \tag{3.11}$$

であり、$\ell_\Lambda \gg \ell_{\mathrm{pl}}$ を考慮すると $\rho_\Lambda \gg \rho_\gamma$ となる。宇宙定数が示す物質密度 ρ_Λ とその宇宙の温度 T が示す輻射密度 ρ_γ の間には大きな隔たりがある。

一方、零点振動の真空のエネルギー密度 $\rho_{\mathrm{pl}}(\sim 10^{97}[\mathrm{kg/m^3}])$ は

$$\rho_{\mathrm{pl}} \simeq \frac{m_{\mathrm{pl}}}{\ell_{\mathrm{pl}}^3} \simeq \frac{\hbar}{\ell_{\mathrm{pl}}^4 c}$$

とすると [24, 25]、その ρ_Λ との比は

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\mathrm{pl}}} = \frac{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}}{\frac{\hbar}{\ell_{\mathrm{pl}}^4 c}} = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{\ell_{\mathrm{pl}}}{\ell_\Lambda}\right)^2$$

となる。(3.11) 式との対応を見ると

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_\gamma}\times\frac{\rho_\Lambda}{\rho_{pl}} \simeq \frac{90}{\pi^3}c_2^4\left(\frac{\ell_\Lambda}{\ell_{\mathrm{pl}}}\right)^2\times\frac{3}{8\pi}\left(\frac{\ell_{\mathrm{pl}}}{\ell_\Lambda}\right)^2 \simeq O(1)$$

となり

$$\rho_\Lambda \simeq \sqrt{\rho_\gamma\rho_{\mathrm{pl}}} \tag{3.12}$$

と興味深い結果が得られた。

これは宇宙の地平面の大きさ ℓ_Λ から起因する不確定性原理からくる温度 T の輻射密度 ρ_γ と、planck スケールまでの零点振動の寄与を考慮した真空エネルギー（planck 密度）ρ_{pl} の幾何平均が宇宙定数の密度 ρ_Λ を決めているという式である。宇宙定数、もしくは Dark Energy の密度 ρ_Λ の原因が全く不明である現在、(3.12) 式の関係の意味は今後の検討課題となる。

3.3　一様加速する系

一様加速する系の観測者は、その加速度 κ に比例する温度 $k_\mathrm{B}T = \hbar\kappa/2\pi c$ の黒体輻射を観測するという。これは Unruh 効果と呼ばれていて、Minkowski 時空において観測者によって粒子が発生したり消滅したりする例としてよく議論されている [26]。ここでは加速する源として重力を仮定する。

系が加速しているのでその加速度 κ に相当する特徴的な長さ $\ell_\kappa = c^2/\kappa$ が求まる。今 $\Delta x = c_3\ell_\kappa$ として不確定性関係を適用すると、光子（粒子）のエネルギー ΔE は

$$\Delta E \simeq \Delta pc \simeq \frac{\hbar c}{2\Delta x} \simeq \frac{\hbar c}{2c_3\ell_\kappa} \simeq \frac{\hbar\kappa}{2c_3 c} \simeq k_\mathrm{B}T$$

と得られ、温度と加速度 κ の間には

$$k_\mathrm{B}T \simeq \frac{\hbar\kappa}{2c_3 c}$$

という関係があり、更に $c_3 = \pi$ とおくと Unruh の得た結果と一致する [27]。

この温度と地平面の単位面積当たりのエントロピーの関係

$$\frac{S}{Ak_\mathrm{B}} = \frac{1}{4\ell_\mathrm{pl}^2} \tag{3.13}$$

が主張されている [28]。これは球対称の場合 de Sitter 宇宙と同様、地平面の単位面積当たりのエントロピーが等しいという主張が議論されている [29]。それがどうして導出されるかを検討しよう。

この温度 T の黒体輻射に対して観測者が推定するエントロピーであるが、一つの方法として以下のように考える。観測者は一様加速度 κ を感じているのであるから、それがこの輻射による重力と仮定して、その質量を M、領域を V とすると

$$M = \frac{\tilde{a}T^4}{c^2}V$$

が得られる。この質量による重力加速度を κ とすると

$$\kappa = \frac{GM}{V^{\frac{2}{3}}} = \frac{G\tilde{a}T^4}{c^2}\frac{V}{V^{\frac{2}{3}}} = \frac{G\pi^2}{15}\frac{k_\mathrm{B}^4 T^4}{\hbar^3 c^3}\frac{V^{\frac{1}{3}}}{c^2}$$

が得られる。ここで $k_\mathrm{B}T = \hbar c/(2c_3\ell_\kappa)$, $\kappa = c^2/\ell_\kappa$ を用いると

$$\frac{c^2}{\ell_\kappa} = \frac{\pi^2}{15}\frac{1}{16c_3^4}\frac{G\hbar c}{c^2}\frac{V^{\frac{1}{3}}}{\ell_\kappa^4}$$

より

$$V^{\frac{1}{3}} = \frac{15 \times 16 c_3^4}{\pi^2} \frac{\ell_\kappa^3}{\ell_{\text{pl}}^2}$$

となる。

総エントロピーを $S = 4\tilde{a}T^3V/3$ として、その単位面積当たりのエントロピー $S/V^{\frac{2}{3}}$ を考えると

$$\frac{S}{k_{\text{B}}V^{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{15}\frac{k_{\text{B}}^3T^3}{\hbar^3c^3}V^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{15}\frac{\frac{15}{\pi^2} \times 16c_3^4\frac{\ell_\kappa^3}{\ell_{\text{pl}}^2}}{8c_3^3\ell_\kappa^3} = \frac{8}{3}c_3\frac{1}{\ell_{\text{pl}}^2}$$

となり、(3.13) 式より $c_3 = 3/32$ をとり $A = V^{\frac{2}{3}}$ とすると

$$\frac{S}{k_{\text{B}}A} = \frac{1}{4\ell_{\text{pl}}^2}$$

が得られ、エントロピーが単位面積当たり $1/4\ell_{\text{pl}}^2$ という関係が得られる。

上記の想定は加速が温度 T の輻射エネルギーの重力によるものと考えて、一様加速する観測者の単位面積当たりのエントロピーを導出した。一様加速する系の地平面の表面積は無限大であるから単位面積当たりのエントロピーを考えた訳で、オーダーの推定ではあるが $S/k_{\text{B}}A = 1/4\ell_{\text{pl}}^2$ の関係は得られた。これは、Black Hole の場合と共通する事象の地平面当たりのエントロピーが一定であるという関係である。

3.4　多次元の場合への考慮

上の 3 つの場合について (4+n) 次元（空間的には (3+n) 次元）の時にどうなるのかを考えてみよう。

3.4.1　球対称の場合

(4+n) 次元の Schwarzschild の計量は

$$ds^2 = -h(r)c^2dt^2 + h(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_{2+n}^2$$

である [30]。ここで $d\Omega_{2+n}^2$ は (3+n) 次元単位球の表面の線素より $h(r)$ は

$$h(r) = 1 - \left(\frac{r_{\mathrm{H}}}{r}\right)^{n+1} = 1 - \frac{16\pi}{n+2}\frac{G(n)}{A_{n+2}}\frac{M_{\mathrm{BH}}}{c^2}\frac{1}{r}$$

だ。そして、A_{n+2} は単位球の表面積は

$$A_{n+2} = \frac{2\pi^{\frac{n+3}{2}}}{\Gamma(\frac{n+3}{2})}$$

であり [30]、$n = 0$ の場合 $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ となるので、$A_2 = 4\pi$ である。また、$G(n)$ は (4+n) 次元での重力定数である。

また、(4+n) 次元での planck 質量、planck 長さ、planck 時間は

$$m_{\mathrm{pl}}(n) = \left(\frac{\hbar^{n+1}c^{1-n}}{G(n)}\right)^{\frac{1}{2+n}}$$

$$\ell_{\mathrm{pl}}(n) = \left(\frac{G(n)\hbar}{c^3}\right)^{\frac{1}{2+n}}$$

$$t_{\mathrm{pl}}(n) = \left(\frac{G(n)\hbar}{c^{5+n}}\right)^{\frac{1}{2+n}}$$

であり、これより

$$r_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{m_{\mathrm{pl}}(n)}\frac{\hbar}{c}\left(\frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}(n)}\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{8\Gamma(\frac{n+3}{2})}{n+2}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

という関係がある [31]。

Black Hole に閉じ込められた波のエネルギーは不確定性関係により

$$\Delta E \sim \Delta pc \sim \frac{\hbar c}{\Delta r} \sim k_{\mathrm{B}}T \Longrightarrow k_{\mathrm{B}}T \sim \frac{\hbar c}{r_{\mathrm{H}}}$$

と得られる。(4+n) 次元の黒体放射のエネルギー密度 $\varepsilon(T)$ とエントロピー密度 $s(T)$ は

$$\varepsilon(T) = \frac{A_{n+2}}{(2\pi)^{n+3}}k_{\mathrm{B}}T(n+2)\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar c}\right)^{n+3}\Gamma(n+4)\zeta(n+4) \sim (k_{\mathrm{B}}T)^{n+4}$$

$$s(T) = \frac{n+4}{n+3}(n+2)\frac{A_{n+2}}{(2\pi)^{3+n}}k_{\mathrm{B}}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar c}\right)^{n+3}\Gamma(n+4)\zeta(n+4) \sim (k_{\mathrm{B}}T)^{n+3}$$

である。これより

$$V = \frac{Mc^2}{\varepsilon} \propto \frac{Mc^2}{k_\mathrm{B}T\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{\hbar c}\right)^{n+3}}$$

$$S = sV = k_\mathrm{B}\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{\hbar c}\right)^{n+3}\frac{Mc^2}{k_\mathrm{B}T\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{\hbar c}\right)^{n+3}}$$

$$\sim \frac{Mc^2}{T} \sim \frac{k_\mathrm{B}r_\mathrm{H}Mc^2}{\hbar c} \sim \frac{k_\mathrm{B}r_\mathrm{H}}{\hbar c}\left(\frac{r_\mathrm{H}}{\ell_\mathrm{pl}(n)}\right)^{n+1} m_\mathrm{pl}c \sim k_\mathrm{B}\left(\frac{r_\mathrm{H}}{\ell_\mathrm{pl}}\right)^{n+2}$$

となり、エントロピー S は (4+n) 次元では空間の次元が (3+n) 次元である事により、空間の超平面 (2+n) 次元に比例している事になる。当然のことながら、$n = 0$ の時に (3.5) 式と一致する。

　これより高次元においても球対称な Black Hole のエントロピーは表面積に比例するという関係が導かれた。

3.4.2　de Sitter 時空の場合

(4+n) 次元の de Sitter 時空の計量は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}dr^2 + d\Omega_{n+2}^2$$

である。ここで $\ell_\Lambda = \sqrt{3/\Lambda}$ とおくと、宇宙の温度 T は

$$\Delta E \sim \Delta pc \sim \frac{\hbar c}{\ell_\Lambda} \sim k_\mathrm{B}T$$

と関係づく。宇宙定数 Λ はやはり密度と

$$\rho(n) = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G(n)}$$

と関係があるので、粒子密度 n_Λ は

$$n_\Lambda\frac{\Delta E}{c^2} \sim \rho_\Lambda \sim \frac{\Lambda c^2}{8\pi G(n)}$$

の関係より $V \sim \ell_\Lambda^{3+n}$ とおくと、全粒子数は

$$N_\Lambda = n_\Lambda V \sim \frac{\Lambda c^4}{8\pi G(n)} \frac{\ell_\Lambda}{\hbar c} \ell_\Lambda^{3+n} \sim \left(\frac{\ell_\Lambda}{\ell_{\rm pl}}\right)^{2+n}$$

となり、エントロピー S は N_Λ に比例するから

$$S \propto \left(\frac{\ell_\Lambda}{\ell_{\rm pl}}\right)^{2+n}$$

と、超平面に比例するという関係が得られた。

3.4.3　Rindler 時空について

一様加速度を κ とすると、特徴的な長さは $\ell_\kappa = c^2/\kappa$ であり、やはり温度は

$$\Delta E \sim \Delta pc \sim \frac{\hbar c}{2\ell_\kappa} \sim k_{\rm B} T$$

となる。この加速が重力になるとして、質量を M、体積を $V = L^{3+n}$ として

$$M = \frac{\varepsilon}{c^2} V \sim \frac{k_{\rm B} T}{c^2} \left(\frac{k_{\rm B} T}{\hbar c}\right)^{3+n} L^{3+n}$$

とおくと、重力加速度 κ は

$$\frac{c^2}{\ell_\kappa} \sim \kappa = \frac{G(n) M}{L^{2+n}} \sim \frac{G(n)}{L^{2+n}} \frac{k_{\rm B} T}{c^2} \left(\frac{k_{\rm B} T}{\hbar c}\right)^{3+n} L^{3+n} \sim G(n) \left(\frac{1}{\ell_\kappa}\right)^{4+n} \frac{\hbar}{cL} \tag{3.14}$$

となる。すると、長さ L は (3.14) 式の両端を比較して

$$L = \frac{c^3}{G(n)\hbar} \ell_\kappa^{3+n} = \left(\frac{\ell_\kappa}{\ell_{\rm pl}}\right)^{2+n} \ell_\kappa$$

となる。

そして全エントロピーは $S = sV = sL^{3+n}$ より、超平面の単位面積当たりのエントロピーは

$$\frac{S}{L^{2+n}} \sim sL \sim k_{\rm B} \left(\frac{1}{\ell_\kappa}\right)^{2+n} \ell_\kappa \left(\frac{\ell_\kappa}{\ell_{\rm pl}}\right)^{2+n} \sim k_{\rm B} \left(\frac{1}{\ell_{\rm pl}}\right)^{2+n}$$

もしくは

$$\frac{S}{\left(\frac{L}{\ell_{pl}}\right)^{2+n}} \sim k_{\mathrm{B}} \qquad (= constant)$$

という関係が得られた。つまり超平面の単位面積当たりのエントロピーは一定となり、これも高次元への自然な拡張になっている。

第4章　熱力学から生じる重力

4.1　dynamics

等価原理とは重力の幾何学的記述から導かれるものなので、$g_{\mu\nu}$ は基本的なである。それ故ある知られていない作用関数によって記述されることが期待される。

$$I = \int d^4x\sqrt{-g}L(g,\partial g) \equiv \int d^4x\sqrt{-g}L(g,\Gamma)$$

ここで、Γ は標準の Christoffel 記号である。

力学変数の一階微分のみを含んだ任意の Lagrangian $L(q,\partial q)$ が与えられ、同じ力学を記述するような二階微分を含んだ別の Lagrangian $L'\left(q,\partial q,\partial^2 q\right)$

$$L' = L - \frac{d}{dt}\left(q\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

は容易に作れる [32]。この考えは時間と空間に依存する変数の任意の数に対して働いている。L' が変化する間は、q の端点での q の値というよりはむしろ端点に運動量 $\partial L/\partial\dot{q}$ が固定されている。これは、変位によって最も簡単に見る事ができ、

$$\delta I' = \int_{\mathscr{P}_1}^{\mathscr{P}_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right] - \delta\left(q\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\Bigg|_{\mathscr{P}_1}^{\mathscr{P}_2}$$

$$= \int_{\mathscr{P}_1}^{\mathscr{P}_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]\delta q - q\delta p\Big|_{\mathscr{P}_1}^{\mathscr{P}_2}$$

もし L' が変化する間端点で $\delta p = 0$ を保っているのであれば、L が変化し $\delta q = 0$ を保つ事によって得られるのと同じ Euler-Lagrange 方程式が得られる。$L = L(q,\dot{q})$ であるので、量 $q\partial L/\partial\dot{q}$ は $\dot{q}$ に依存し、$d/dt\,(q\partial L/\partial\dot{q})$ は $\ddot{q}$ を含んでいる。こうして L' は、L が q の一階微分のみを含んでいるので q の二階微分を含んでいる事になる。L' が q の二階微分を含んでいるにもかかわらず、L' から生じた運動方程式

は端点で $\delta p = 0$ を保つ変位に対する二次のみのオーダーとなっている。これより量子論の経路積分で修正された Lagrangian L' は与えられた運動量を持つ状態間の遷移振幅を正確に記述している事が分かる [32]。

　このように重力の場合において、同じ運動方程式が別の作用から

$$
\begin{aligned}
I' &= \int d^4x\sqrt{-g}L - \int d^4x\partial_\lambda \left[g_{\mu\nu}\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial\left(\partial_\lambda g_{\mu\nu}\right)}\right] \\
&\equiv I - \int d^4x\partial_\lambda \left(\sqrt{-g}V^\lambda\right) \\
&\equiv I - \int d^4x\partial_\lambda P^\lambda
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

と得ることができる。ここで V^μ は $g_{\mu\nu}$ と $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ でつくられている。さらに V^μ は、元の Lagrangian L が計量の一階微分の二次なので Γ の線形でなければならない。Γ は局所的慣性系で消えて計量が Lorentz 形式に帰するので、作用 I は一般に共変であるはずはない。しかしながら作用 I' は計量の二階微分を含み、その上後で見る事だがこれは共変である。

　量 V^μ は P に対して線形なので、計量 tensor を用いて Γ の添字の内の二つが決まってしまう。V^μ に対する最も一般的な選択は線形結合で

$$
V^\mu = c_1(g)\, g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\nu\lambda} + c_2(g)\, g^{\rho\nu}\Gamma^\mu_{\rho\nu}
$$

となり、ここで $c_1(g)$、$c_2(g)$ は計量の行列式のまだ知られていない関数である。

$$
\Gamma^\lambda_{\nu\lambda} = \partial_\nu\left(\ln\sqrt{-g}\right)
$$

$$
\sqrt{-g}g^{\rho\nu}\Gamma^\mu_{\rho\nu} = -\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\lambda\mu}\right)
$$

を用いて、$P^\mu \equiv \sqrt{-g}V^\mu$ に対する表現を

$$
P^\mu = c_3(g)\, g^{\mu\nu}\partial_\nu\sqrt{-g} + c_4(g)\sqrt{-g}\partial_\nu g^{\nu\mu} \tag{4.2}
$$

と書く事ができる。$c_3 \equiv c_1 - c_2$、$c_4 \equiv -c_2$ は計量の行列式の関数である。物理的に巧く意図された規定を用いる事によってこれらの係数を固定できるなら、表面項と積分によって Lagrangian L を決定する事ができる。

全ての $g_{\mu\nu}$ が x^0 に対して独立（依存していない）で、$g_{0\mu} = 0$ の静的時空を考えよう。任意に与えられた事象 $\mathscr{P}$ 周りで、$\mathbf{x} = constant$ な観測者の加速度（$a^i = (0, \mathbf{a}), \mathbf{a} = \nabla\left(\ln\sqrt{g_{00}}\right)$）をもつ局所的 Rindler 座標を構成する。この Rindler 系は、加速度の方向に直交する平面である地平面とその地平面に関係する温度 $T = |\,\mathbf{a}\,|/2\pi$ をもつ。この地平面に関連したエントロピーはその表面積に比例した形、もしくはより正確に

$$\frac{dS}{dA_\perp} = \frac{1}{A_{\rm pl}} \tag{4.3}$$

と書けると仮定しよう。

$A_{\rm pl}$ は面積の次元をもつ定数であり、情報の単位量をもつ最小の表面積を表している。これは情報をもつ面積が有限であることを示す。地平面の温度を与えると、この温度をもつ canonical ensemble を構成できて Euclid 作用を熱力学のエントロピーに関係付けられる。Euclid 作用は canonical ensemble のエントロピーとして解釈できるので、(4.1) 式の表面項は $S = -A$（負の符号は標準との Euclid 連続から生じる [33]）によりエントロピー S と関係付けることが必要となっている。この時、温度 T をもつ局所 Rindler 系で評価され、特にこの結果は Rindler 系の平坦な時空と一致しなければならない。後で作用 I' が、宇宙定数は無いものとして、一般に共変で平坦な時空では消える事を見よう。そして Rindler 系の作用 I の数値が (4.1) 式の表面項と同じである事も後で見るだろう。

静的な Rindler 系において表面項は

$$A = \int_V d^4x \partial_\mu P^\mu = \int_0^\beta dt \int_{\partial V} d^3x \nabla \cdot \mathbf{P} = \beta \int_{\partial V} d^2x_\perp \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} \tag{4.4}$$

となる。時間積分の範囲である $\beta = 2\pi/|\mathbf{a}|$ は Rindler 系での温度の逆数である。これは Euclid 作用が周期 β をもつ虚時間で周期的になるため必要とされる。加速度が $x^1 \equiv x$ 軸に沿っている Rindler 系を選ぶとする。すると Rindler 系を表す計量の最も一般的な形は

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1+2al)\,dt^2 - \frac{dl^2}{1+2al} - \left(dy^2+dz^2\right) \\ &= [1+2al(x)]\,dt^2 - \frac{l'^2}{1+2al(x)}dx^2 - \left(dy^2+dz^2\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

で表現できる。ここで $l(x)$ は任意の関数で、$l' \equiv dl/dx$ です。加速度は x 軸に沿っているので、垂直方向の計量は不変である。計量は (t,l,y,z) 座標の基本的な Rindler 系の形となっている。けれども平面対称に不変で計量の静的な振る舞いを保ちつつ、l からある他の変数 x への任意の座標変換をする事ができる。これは (4.5) 式の二つ目の等号で (t,l,y,z) の代わりに、(t,x,y,z) の一般的な形とした事を指している。この計量に対する (4.2) 式の表面を評価すると

$$P^\mu = -2ac_4(g) - [1+2al(x)]\frac{l''}{l'^2}[c_3(g) - 2c_4(g)]$$

という 0 でない成分のみが得られる。そのため (4.4) 式の作用は

$$I = \beta P^\mu \int d^2x_\perp = \beta P^\mu A_\perp \quad = -S$$

となるでしょう。ここで $A_\perp$ は $(y-z)$ 平面に垂直な表面である。負の符号は標準の Euclid 作用からきている。仮定 (4.3) から

$$\frac{dS}{dA_\perp} = 2a\beta c_4(g) + \beta(c_3 - 2c_4)(1+2al)\frac{l''}{l'^2} = \frac{1}{A_{\mathrm{pl}}}$$

となる。

この量は x に対して独立で $l(x)$ の任意の選択に対して x に独立なこの量は一定でなければならないから、第二項は $c_3(g) = 2c_4(g)$ の時に消える。さらに $a\beta = 2\pi$ とすると、$c_4(g) = 1/4\pi A_{\mathrm{pl}}$ という g に独立な量になる。すると P^μ は

$$P^\mu = \frac{1}{4\pi A_{\mathrm{pl}}}\left(2g^{\mu\nu}\partial_\nu\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\partial_\nu g^{\nu\mu}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{-g}}{4\pi A_{\mathrm{pl}}}\left(g^{\mu\lambda}\Gamma^\rho_{\lambda\rho} - g^{\tau\lambda}\Gamma^\mu_{\tau\lambda}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi A_{\mathrm{pl}}}\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(gg^{\nu\mu}\right)$$

と表せる。二番目の等号は (4.2) の関係より得られ、三番目の等号は二項を合せたものである。計量の一階微分の線形である表面項の最も一般的な形は $P^\mu = F_1(g)\partial_\nu\left[F_2(g)g^{\mu\nu}\right]$ である。F_1 と F_2 は行列式 g の任意の関数だ。Rindler 計量 (4.5) に対するこの表面項の評価と (4.3) の仮定は、$F_1 = -1/\sqrt{-g}$ と $F_2 = g$ という結果が導かれる。この結果は注目に値し、更に進む前に見ておく必要がある。

(4.2) で得られた P^μ の一般的な形は c_3、c_4 が特定できないかぎり有用ではない。静的な配置に対して余分な項を時間積分し、二次元の空間的な表面に替えることができる。これは任意の系に対して真であるが、一般にはその形はある単純な形ではなく、時間の不定積分を含むでしょう。しかし重力の場合には、二つの自然な振る舞いがこの表面項の素晴らしい形を与える。その一つが Rindler 系が Euclid 的な時間の周期性をもっていて、時間積分の範囲が $(0,\beta) = (0, 2\pi/a)$ に制限されているという事である。二つ目が、P^μ の生き残り項が加速度 a に線形で、それによって時間積分から生じる因子 $1/a$ が巧く相殺されるという事である。

P^μ の形を与えると、一次の Lagrangian 密度を得るために

$$\left(\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g_{\rho\nu,\mu}}g_{\rho\nu}\right) = P^\mu = \frac{1}{4\pi A_{\mathrm{pl}}}\left(2g^{\mu\nu}\partial_\nu\sqrt{-g} + \sqrt{-g}\partial_\nu g^{\mu\nu}\right) \tag{4.6}$$

を解く必要がある。そしてここから

$$\sqrt{-g}L = \frac{1}{4\pi A_{\mathrm{pl}}}\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\tau_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\tau} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\rho\tau}\right)\right] \tag{4.7}$$

となる。ここで得られた Langrangian はちょうど重力に対する一次の Dirac-Schrodinger の Lagrangian になっているのが分かる。これは通常、Γ^2-Lagrangian と呼ばれているものだ。曲率 tensor の導入なしでこれは得る事ができた。

(4.1) 式から最後の二次の Lagrangian が得られる。これは標準の Einstein-Hilbert Lagrangian

$$\sqrt{-g}L_{grav} = \sqrt{-g}L - \frac{\partial C^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{R\sqrt{-g}}{4\pi A_{\rm pl}} \tag{4.8}$$

である。

このように、完全な二次の Lagrangian が標準な Einstein-Hilbert Lagrangian だと分かる。その作用の表面項が単位表面積当たりのエントロピーに比例すべきだという仮定によってこの結果を得ることができた。この仮定が重力作用の原理を決定し、一般に共変な作用が引き起こされ、そして表面項が Einstein Lagrangian の形を決定することになる。そして表面積が単位面積量当たりの情報を含むという考えが重力相互作用の性質を決定するのを許している。

(4.6) 式の左辺が $g_{\rho\nu,\mu}$ に関する Lagrangian の微分にのみ依存するので、g の関数が (4.7) 式の L もしくは $\mathscr{G}$ で増えるのなら変化はしない。そのような任意の g の関数は、その作用が一般に共変であるのなら定数でなければならないからだ。これは R に (4.8) の未決定な定数を加える事を意味している。

4.2　Einstein-Hilbert 作用

今、空間の計量を正と定義する。そして時空が u^i をもつ超曲面 Σ のような空間の級数であるとする。その時、$g^{ij} = h^{ij} - u^i u^j$ となる。ここで h^{ij} は Σ をつくる計量である。Σ の共役微分から、共役微分演算子の線形結合である三つの vector（$u^j\nabla_j u^i, u^j\nabla^i u_j, u^i\nabla^j u_j$）のみでつくる事ができる。最初のは加速度 $a^i = u^j\nabla_j u^i$ である。二番目のは u^j が単位長さをもつので一致して消える。三番目は Σ の外曲率（$K = -\nabla^j u_j$）の trace に比例している。このように (4.1) 式の表面項の B^i は a^i と $u^i K$ の線形結合でなければならない [34, 35]。事実、

$$\begin{aligned} R &=^3 \mathscr{R} + K_{ab}K^{ab} - K^a_a K^b_b - 2\nabla_i \left(Ku^i + a^i\right) \\ &\equiv \mathscr{L} - 2\nabla_i \left(Ku^i + a^i\right) \end{aligned} \tag{4.9}$$

である。

ここで $\mathscr{L}$ は ADM Lagrangian である。これを証明するために、

$$R = -Rg_{ab}u^a u^b = 2\left(G_{ab} - R_{ab}\right)u^a u^b$$

という関係から始めよう。まずここで

$$2G_{ab}u^a u^b =^3 \mathscr{R} - K_{ab}K^{ab} + K^a_a K^b_b$$

と書き直すことができる。今、$R_{abcd}u^d = (\nabla_a \nabla_b u_c - \nabla_b \nabla_a u_c)$ は

$$\begin{aligned} R_{abcd}u^b u^d &= g^{ac}u^b u^d R_{abcd} \\ &= \left(u^b \nabla_a \nabla_b u^a - u^b \nabla_b \nabla_a u^a\right) \\ &= \nabla_a \left(u^b \nabla_b u^a\right) - \left(\nabla_a u^b\right)(\nabla_b u^a) - \nabla_b \left(u^b \nabla_a u^a\right) + \left(\nabla_b u^b\right)^2 \\ &= \nabla_i \left(Ku^i + a^i\right) - K_{ab}K^{ab} + K^a_a K^b_b \end{aligned}$$

二つの空間的表面 Σ_1, Σ_2 と二つの時間的表面 S_1, S_2 によって制限される四元体積 V に渡って $R/16\pi$ を積分するのに (4.9) を用いた。空間的表面の計量は $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$ であり、一方時間的表面の計量は $\gamma_{ab} = g_{ab} n_a n_b$ である。これら二つの表面は、計量が $\sigma_{ab} = h_{ab} - n_a n_b = g_{ab} + u_a u_b - n_a n_b$ である二次元表面 $\mathscr{Q}$ で交わる。今、(4.9) の両辺を V に渡って積分すると

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{EH}} &= \frac{1}{16\pi}\int_V R\sqrt{-g}d^4x \\ &= \frac{1}{16\pi}\int_V \mathscr{L}\sqrt{-g}d^4x - \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} K\sqrt{h}d^3x - \frac{1}{8\pi}\int_{S_1}^{S_2}\left(a_i n^i\right)\sqrt{\sigma}d^2xNdt \end{aligned} \tag{4.10}$$

ここで、$g_{00} = -N^2$ である。地平線をもつ静的時空では、$K = 0$ で右辺の第二項が消え、時間積分が β の積になり、S_1 表面が地平線に現れるように量 $N\left(a_i n^i\right)$ が地平面の表面重力 κ になる。$\beta\kappa = 2\pi$ を用いると、最後の項は地平面上で

$$\frac{\kappa}{8\pi}\int_0^\beta dt\int d^2x\sqrt{\sigma}=\frac{1}{4}A$$

となる。A は地平面の表面積である。Euclid 型では、最初の項に βE を与える。E は空間体積に渡る ADM Hamiltonian の積分である。よって

$$I_{\mathrm{EH}}^{Euclid}=\frac{1}{4}A-\beta E=S-\beta E$$

だ。

任意の静的な時空の幾何に対して Euclid 的時間で周期性 β を持っていたとすると、Euclid 的な重力作用は時空の自由エネルギーを表す。一次の項は Hamiltonian を与え、表面の項はエントロピーを与える。

表面 Σ（S と同様に表面 $\mathscr{Q}$ 上で交わっている）は対応する外曲率 $K_{ab},\Theta_{ab},q_{ab}$ をもっている。ここでは一階の微分のみを含んだ項として Einstein-Hilbert 作用を書くのは月並みで、境界表面の外曲率の trace に渡る積分を加えている。そして、

$$\Theta_{ab}=q_{ab}+u_au_b\left(n_ia^i\right)+2\sigma^i\left(u_au_b\right)n^jK_{ij}$$

という恒等式を用いるとこの形を得るのは簡単である。ここで、

$$\Theta=q-n_ia^i,\Theta\equiv\Theta^a_a,q\equiv q^a_a \tag{4.11}$$

としている。(4.10) の最後の項で a_in^i を置き換えるのに (4.11) を用いると

$$I_{EH}+\frac{1}{8\pi}\int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2}K\sqrt{h}d^3x-\frac{1}{8\pi}\int_{S_1}^{S_2}\Theta\sqrt{\sigma}d^2xNdt$$

$$=\frac{1}{16\pi}\int_V\mathscr{L}\sqrt{-g}d^4x-\frac{1}{8\pi}\int_{S_1}^{S_2}q\sqrt{\sigma}d^2xNdt$$

となる。右辺の第一項では ADM Lagrangian $\mathscr{L}$ は計量 tensor の二階微分を順番に含んだ ${}^3\mathscr{R}$ をもっている。右辺の第二項は、右辺を重力に対する二次の作用に等

しくさせる二次の微分を取り除いているのが分かる。左辺では第二項と第三項が、Einstein-Hilbert 作用が増えると二階の微分のない二次の作用を与える時の境界表面に渡る外曲率の積分となっている。これがここで用いられている標準的な結果である。不運な事に、この形は (4.10) の加速度 $a^i n_i$ の通常の成分を一次の Lagrangian を得るために ${}^3\mathscr{R}$ の q の結合と $\Theta - q$ に置き換えられている。その過程で加速度の通常の成分は消えて、時空の自由エネルギーとして Einstein-Hilbert 作用の良い解釈を見失っている。

第5章　GUP

5.1　Paradox

Black Hole にはエントロピーがある事を今まで色々な形で見てきた。Black Hole の境界を越えて、内部と外部で熱的なやり取りをしている事とそれは同義であるとみてよい。そして Black Hole は Hawking 放射により段々としぼんでいき、やがては蒸発して何も無くなってしまうと考えられる。

しかし、この現象には大きな問題がある。星が Black Hole になる時、膨大なエントロピーが Black Hole に閉じ込められているという事は 3.1 章でもみてきた。しかし Hawking 放射は熱的な放射である。Black Hole が Hawking 放射により蒸発するとすれば、元々あったエントロピーはどうなったのであろうか。量子力学によると、始状態から終状態への状態遷移がユニタリー変換で書け、そしてその逆変換により終状態から始状態へと戻らなければならない。

5.2　GUP

前節の矛盾を克服しようとするモデルを一つあげよう。それは GUP と呼ばれ、Generalized Uncertainty Principle（一般化された不確定性原理）の略である。

運動量 p の光子によって観測される電子のような粒子の位置の不確定さは

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + \ell_{\mathrm{pl}}^2 \frac{\Delta p}{\hbar} \tag{5.1}$$

という形で書ける [36]。これは経験則的に String Theory から得られたもので、一項目が Heisenberg による結果と同じもので、二項目が光子による重力相互作用からくるものである。この項は光子のエネルギーに重力定数を掛けたものに比例しているはずである。電子の運動量の不確定さ Δp は p の次元であるはずなので、この二項目は $G\Delta p/c^3$ の次元であるはずである。

もう少し物理的に理解しようとすると、質量 M で半径 x の物体にエネルギー $\Delta E = \Delta pc$ の光子をぶつけた時の物体の半径は

$$x \to x + \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{2G\Delta M}{c^2} = \frac{2G(\Delta pc)}{c^4}$$

と書けます。そして電磁気的な不確定さを付け加えると

$$\begin{aligned}\Delta x &\geq \frac{\hbar}{\Delta p} + \frac{2G\Delta p}{c^3} \\ &\sim \frac{\hbar}{\Delta p} + \ell_{\mathrm{pl}}^2 \frac{\Delta p}{\hbar}\end{aligned} \tag{5.2}$$

となる。

5.3　Black Hole の残骸

Black Hole の境界の周辺には Schartzschild 半径程度の不確定さが生じているという事は 2.1.2 節でも論じた。これから、

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{r_{\mathrm{g}}} = \frac{\hbar c^2}{2GM_{\mathrm{BH}}}$$

となる。(5.1) 式を $\Delta p/\hbar$ について解いてやると GUP による運動量の不確定さが求まり、それは

$$\frac{\Delta p}{\hbar} \sim \frac{\Delta x}{2\ell_{\mathrm{pl}}^2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\ell_{\mathrm{pl}}^2}{(\Delta x)^2}}\right] \tag{5.3}$$

となる。(5.3) 式より修正された Black Hole の温度は

$$\begin{aligned}T_{\mathrm{GUP}} &\sim \frac{\Delta pc}{4\pi k_{\mathrm{B}}} \\ &\sim \frac{M_{\mathrm{BH}}c^2}{4\pi k_{\mathrm{B}}}\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{m_{\mathrm{pl}}}{M_{\mathrm{BH}}}\right)^2}\right]\end{aligned}$$

となる。ここで $\Delta x \sim r_{\mathrm{g}}$ とした。これは符号が負の時、Hawking の導いた結果に一致する。ところが符号が正であると、明白な物理的意味はない（ここからは負の

符号だけを考えていく）。注意すべき事は、もしも Black Hole が Planck 質量よりも小さければ温度が、Schwartzschild 半径が $2\ell_{\mathrm{pl}}$ よりも小さければ運動量が複素数となってしまう事である。つまり Black Hole は Planck 質量あたりで蒸発がとまってしまうと考えて良い。

　そしてエントロピーは

$$S_{\mathrm{GUP}} \sim \int \frac{d(Mc^2)}{T_{\mathrm{GUP}}}$$

$$\sim \int \frac{4\pi k_{\mathrm{B}}}{M_{\mathrm{BH}}c^2}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{m_{\mathrm{pl}}}{M_{\mathrm{BH}}}\right)^2}\right]^{-1} dM_{\mathrm{BH}}$$

$$= 4\pi k_{\mathrm{B}} \int \frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}} d\left(\frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}}\right) + 4\pi k_{\mathrm{B}} \int \sqrt{\left(\frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}}\right)^2 - 1}\, d\left(\frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}}\right)$$

$$= 2\pi k_{\mathrm{B}} \left(\frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}}\right)^2 + 2\pi k_{\mathrm{B}} \left[\frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}}\sqrt{\left(\frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}}\right)^2 - 1} - \ln\left|\frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}} + \sqrt{\left(\frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}}\right)^2 - 1}\right|\right]$$

となる。そして表面積を $A(=16\pi G^2 M_{\mathrm{BH}}^2/c^4)$ とおくと

$$S_{\mathrm{GUP}} \sim \frac{A}{8}\frac{k_{\mathrm{B}}c^2}{G\hbar^2} + \frac{A}{8}\frac{k_{\mathrm{B}}c^2}{G\hbar^2}\sqrt{1-\left(\frac{m_{\mathrm{pl}}}{M_{\mathrm{BH}}}\right)^2} - 2\pi k_{\mathrm{B}} \ln\left|\frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{m_{\mathrm{pl}}}{M_{\mathrm{BH}}}\right)^2}\right]\right|$$

となる。ここで Black Hole の質量を Planck 質量程度だとすると、後ろの二項が消える。つまりこれが放射項であると考えてよい。そして残った項は

$$S_{\mathrm{GUP}} \sim \frac{A}{8}\frac{k_{\mathrm{B}}c^2}{G\hbar^2}$$

である。自然単位系を用いるとエントロピーは表面積の 8 分の 1 である。つまり Black Hole が蒸発してしまった後の残骸のエントロピーは表面積の 8 分の 1 であった。

　結果として Black Hole の蒸発が Planck 質量程度で止まったが、それでも微々たる程のエントロピーしか残ってないだろう。つまりこの理論ではまだエントロピーが何処にいってしまったかの解決にはならない。しかし、この Black Hole の残骸は Planck スケールの 1 つの粒子と考えられる。インフレーション時代に原始 Black

Hole が数多く誕生したが、Hawking 放射により Planck スケール程度の粒子になったと考えられる。もしかしたらそれが Dark Matter の候補と成り得るかも知れない。

第6章　結論と発展

重力場における場の量子論を用いて導かれる式と、同等な関係式が、簡明な物理的仮定の下で得られた。つまり不確定性関係を用いることにより Black Hole、Λ 項のある宇宙、及び一様加速する系の温度を推定することができ、その温度に対応する黒体放射を考えることにより、各々に対してエントロピーが地平面に比例する関係が導かれた。そこで宇宙定数 Λ、もしくは $\rho_\Lambda = 3\Lambda/(8\pi G)$ に対する興味ある関係式（$\rho_\Lambda = \sqrt{\rho_\gamma \rho_{\rm pl}}$）が得られ、(4+n) 次元においても、各々の場合エントロピーが表面積に比例するという結果が導出された。

エントロピーは示量変数であり、それが系の体積ではなく、面積に比例するという一見理解し難い結果は、3.1 節でも述べた熱力学、及び統計力学的な考察により、Black Hole を見かけより体積の大きな、例えて言えば奥行きの深い袋状と見なすことで、ある程度は理解可能になったと考える。それは不確定性関係に由来するエネルギーを温度と関連付け、その温度による黒体放射がそこに充満し、それを Black Hole のエントロピーと解釈するものである。

この理解の下では、重力崩壊する放射優勢の星の場合、その Black Hole が形成されるとき体積が増加し、そこに放射が自由膨張してエントロピーが増加し、Black Hole の巨大なエントロピーとなったとする解釈が成立する。これらはあくまでも解釈であり、果たして実際にそこに物理的に意味があるかどうかは不明である。ただ Black Hole 形成時での、エントロピー増大の通常の理解は難しい。

重力不安定により、Black Hole を形成するような黒体放射の光子球のエントロピーは $S \propto A^{3/4}$ であり、必ずしも示量性の変数の様相を示してはいないが、これは重力場中において温度が熱力学的に平衡であったことを反映しているもので、容量性（示量性）変数であることには変わりが無い。それを black Hole へどう理解を拡張するかが問題である。

古典的な一般相対論の立場からすると、粒子は事象地平面を通過すれば決して再び戻ることはない訳であるが、これらの議論はその物理的に十分解明されていない量子重力理論の、統計熱力学的な理解をより深めるのに寄与すると考えられる。今後一層その意味を探るのが課題である。

また、ここでの考察では Black Hole を含めた系全体でのエントロピーの増大や、Λ 項のある宇宙でのエントロピーの増大という一般的な熱力学の第 2 法則については、触れられていない。またより興味深い Black Hole の蒸発についての物理的解釈についても考察していない。

ただ、これも 3.1 節、及び上で触れたように、Black Hole を温度 T の放射場が

ある奥行きの深い袋状のものと見なすと、Black Hole の外と内側をあわせた系全体ではエントロピーが増大し、熱力学の第 2 法則が成立しているとも考えられる。またその境界である表面から温度 T の黒体放射が放出され、やがて Black Hole も蒸発するという考えも受入れ易い。しかし、より仔細な検討は今後の課題である。

また表面項が単位表面積当たりのエントロピーに比例すべきだという仮定によって、つまり曲率 tensor の導入なしで重力を求めることができた。この仮定が重力作用の原理を決定し、一般に共変な作用が引き起こされ、そして表面項が Einstein Lagrangian の形を決定することになる。そして表面積が単位面積量当たりの情報を含むという考えが重力相互作用の性質を決定するのを許している。

このように Black Hole とエントロピー、もっと広義的に重力と熱力学には密接な関係があると言える。ただ、なぜこれだけ重力と熱力学が関係しているかといった問題については何も触れていない。重力と熱力学の密接な関係を証明するもっと詳細なアプローチとその由来が今後の研究課題として残る。

そして、Black Hole は熱放射する事に注目した。Black Hole にはたくさんのエントロピーがあったはずが、熱を放射するだけで蒸発すると考えられていた。これは量子論に反している。この矛盾について GUP を用いて試行錯誤してみたが、GUP だけでは Planck スケール程度（もしくはその半分）のエントロピーしか残らない事が分かった。これについても今後の研究課題となるだろう。しかし一説には最近 Hawking が自論を撤回し、Hawking 放射は熱的な放射だけではなく情報も一部漏れているというような事を発表していた。これがもしも本当なら、エントロピーが放出されずに残ったものが Planck スケール程度だったと考える事もできるだろう。

最後に最近の Black Hole の熱力学に関するレビューをいくつか紹介して、この章を終了しよう。一つは Wald のレビューで Black Hole のエントロピーについて書かれています [37]。次に Page のレビューで、これは Hawking が Hawking 放射が熱放射だけでなく情報も運ぶと発表した前後の仔細について書かれています [38]。重力と熱力学の法則の対応に関するレビューは Kiefer[39]、量子重力理論の登場してきた歴史については Ashtekar[40] が紹介している。

謝辞

この論文を書くにあたって協力して下さった原教授、本大学の教授の皆様方、そして引用した論文の著者と学問を推し進めてきた先人達に敬意を表します。

付 録A

A.1 GUP

5 章では GUP の定義を (5.1) 式としたが、実際 Heisenberg の不確定性関係は

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

とする事もあるので、それを考慮すると (5.1) 式は

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} + \ell_{\mathrm{pl}}^2 \frac{\Delta p}{\hbar} \tag{A.1}$$

と変わる。これを $\Delta p/\hbar$ について解いてやると

$$\frac{\Delta p}{\hbar} \sim \frac{\Delta x}{2\ell_{\mathrm{pl}}^2} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\ell_{\mathrm{pl}}}{\Delta x} \right)^2} \right] \tag{A.2}$$

となる。5 章と同様の操作で温度を求めてやると

$$T_{\mathrm{GUP}} \sim \frac{M_{\mathrm{BH}} c^2}{4\pi k_{\mathrm{B}}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{m_{\mathrm{pl}}}{M_{\mathrm{BH}}} \right)^2} \right] \tag{A.3}$$

となる。ここで注意すべき事は 5 章では Black Hole の蒸発は質量が Planck 質量程度で止まっていたのが、その 2 分の 1 まで蒸発が進む事である。しかし蒸発が Planck 質量の半分まで進むからといって大きな物理的問題になる事はないだろう。

更に 5 章と同様の操作によりエントロピーを求めてみると

$$S_{\mathrm{GUP}} \sim 8\pi k_{\mathrm{B}} \left(\frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}} \right)^2 + 8\pi k_{\mathrm{B}} \left[\frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}} \sqrt{\left(\frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}} \right)^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}} + \sqrt{\left(\frac{M_{\mathrm{BH}}}{m_{\mathrm{pl}}} \right)^2 - \frac{1}{4}} \right| \right]$$

同様に表面積を $A(= 16\pi G^2 M_{\mathrm{BH}}^2/c^4)$ として、Black Hole の質量を Planck 質量の半分程度だとすると

$$S_{\mathrm{GUP}} \sim \frac{A}{8} (1 + \ln 2)$$

となり、残骸としては小さな Black Hole しか残ってないはずが、何故かエントロピーは大きいという奇妙なものになってしまった。

しかしこの場合を考慮したとしても、やはり Black Hole になってしまった直後のエントロピーが何処に行ったかの解決にはならないだろう。

参考文献

[1] the Latest Theoritical Cosmology by Hawking.

[2] R. Penrose, Riv. Nuovo. Cimento **1**(1969)252.

[3] R. Penrose and R.M. Floyd, Nature **229**(1971)177.

[4] D. Christodoulou, Phys. Rev. Letters **25** (1970) 177.

[5] D. Christodoulou, Ph.D. thesis, Princeton University, 1971(unpublished).

[6] D. Christodoulou and R. Ruffini, Phys. Rev. **D4** (1971) 3552.

[7] S. W. Hawking, Phys. Rev. Letters **26** (1971) 1344; *contribution to Black Holes*, edited by B. DeWitt and C. DeWitt (Gordon and Breach, New York, 1973).

[8] J. M. Greif, Junior thesis, Prenceton University(1969).

[9] B. Carter, Nature **238** (1972) 71.

[10] J. D. Bekenstein, Ph.D. thesis, Princeton University, 1972(unpublished).

[11] G. t'Hoot, *On the Quantum Structure of a Black Hole*, Nucl. Phys. **B256** (1985) 727.

[12] 山本格,"物理学辞典－縮刷版－", 物理学辞典編集委員会, 培風館

[13] S. W. Hawking, *Particle creation by black hole*, Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199.

[14] John Archibald Wheeler[著] 戎崎俊一 [訳], "時間・空間・重力", Scientific American library. 10.

[15] 佐藤勝彦, "相対性理論", 岩波基礎物理シリーズ

[16] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curred Space*, Cambridge University Press (1982).

[17] S. W. Hawking, Mon. Not. R. astr. Soc. **152** (1971) 75.

[18] B. J. Carr and S. W. Hawking, Mon. Not. R. astr. Soc. **168** (1974) 399.

[19] J. D. Bekenstein,*Black Holes and Entropy*, Phys. Rev. **D7** (1979) 2333-2346.

[20] H. K. Lee, Phys. Rev. **D66** (2002) 063001.

[21] D. N. Spergel et al. , Ap. J. S. **148** (2003) 175.

[22] G. W. Gibbons and S. W. Haking,*Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation*, Phys. Rev. **D15** (1977) 2738-2751.

[23] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Reed Edu. and Pro. Pub.Ltd. Oxford (1980).

[24] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61** (1989) 1.

[25] T. Padmanabhan, *Classical and Quantum Thermodynamics of horizons in spherically symmetric spacetimes*, Class. Quant. Grav. **19** (2002) 5387-5408.

[26] G. E. A. Matsas and D. A. T. Vanzella,*The Fulling-Davies-Unruh Effect is Mandatory: The Proton's Testimony*, Int. J. Mod. Phys. **D11**(2002)1573-1578.

[27] W. G. Unruh, *Notes on black hole evaporation*, Phys. Rev. **D14** (1976) 870.

[28] T. Padmanabhan, *Gravity from Space-time Thermodynamics*, Astrophys. Space Sci. **285** (2003) 407.

[29] T. Jacobson and R. Parentani, *Horizon Entropy*, Found. Phys. **33** (2003) 323-348.

[30] R.C. Myers and M.J. Perry, *Black Holes in Higher Dimensional Space-Times*, Ann. Phys. **172** (1986) 304-347.

[31] C.M. Harris and P. Kanti, *Hawking Radiation from a (4+n)-dimensional Black Hole: Exact Results for the Schwarzschild Phase*, hep-ph/0309054.

[32] D. Lynden-Bell and T. Padmanabhan, (1994), unpublished
T. Padmanabhan, *Cosmology and Astrophysics - through problems*, (Cambridge university press, 1996).

[33] T. Padmanabhan, *Thermodynamics and/or Horizons: A comparison of Schwarzshild, Rindler and de Sitter spacetimes*, Mod. Phys. Lett. **A17** (2002) 923-942.

[34] C. W. Misner, K. S. Throne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman and co., 1973.

[35] J. W. York, *Between Quantum and Cosmos*,1987
eds W. H. Zurek et al (Princeton University Press, Princeton, 1998).

[36] Pisin Chen, *Generalized Uncertainty Principle and Dark Matter*, astro-ph/0305025.

[37] R. M. Wald, *The Thermodynamics of Black Hole*, Living Rev. Rel. **4**(2001), 6.

[38] Don N. Page, *Hawking Radiation and Black Hole Thermodynamics*, hep-th/0409024.

[39] C. Kiffer, *Quantum Aspects of Black Holes*, astro-ph/0202032.

[40] A. Ashtekar, *Gravity and the Quantum*, gr-qc/0410054.